数理解析研究所講究録
第1787巻 2012年 201-211

「パチョーリの代数学——手稿から刊本へ」

神戸大学国際文化学研究科　三浦伸夫（MIURA Nobuo）
Graduate School of Intercultural Studies
Kobe University

ルカ・パチョーリ(1445 頃－1517)の主著『算術，幾何学，比，比例の大全』(以降は『スンマ』とする)は，「代数学が最初に印刷された書物」として代数学史に名をとどめてきた[1]．それは主として2次方程式解法にかかわることであるが，さらに3次方程式においても重要である．なぜなら彼はその解の不可能性に言及し，後代の数学者に研究の指針と鼓舞を与えたからである．この件で言えば，さらに彼はある重要な人物に影響を与えた可能性がある．それは一部の3次方程式の代数的解法に成功したとされるボローニャ大学教授シピオーネ・デル・フェッロ（1465-1526）にである．おなじころパチョーリはボローニャ大学の数学講師（*lectores ad mathematicam*）でもあり(1501-02)，おそらく同僚といってもよかった．すなわちデル・フェッロは先輩パチョーリから3次方程式解法に向けての刺激を受けた可能性があるのである．

パチョーリが代数学を論じたのは『スンマ』だけではない．彼はそれ以前 1475 年にペルージャ大学で商業算術と代数学を教えたが，その際長編の「ペルージャ手稿」を残している[2]．これは印刷されることはなかったが，その成果がのちに発展し『スンマ』に取り入れられることとなったと考えられる．

ところでパチョーリ『スンマ』の数学にはオリジナリティはないとされ，従来数学史上の研究はほとんどなかった．彼はトスカーナのサンセポルクロ出身で，『スンマ』は主として古いトスカーナ方言で書かれている一方，印刷者パガニーニはヴェネチア出身なので，しばしばヴェネチア綴りが混入されており[3]，読むには容易ではない．「ペルージャ手稿」のほうは未刊で，さらに膨大な量でもあり，研究の対象とはほとんどなってこなかった．本稿は，両者の代数的部分の内容を比較検討し，相互の関係を示し，パチョーリの代数学の展開を考察するものである．

1．『スンマ』の記号法

『スンマ』は1494年と1523年に2度出版されたことになってはいるが，実際にはいくつかの異なるテクストが存在する[東田　1991]．初版（1494）には3つの異本が存在し，IGI 番号は 7132, 7133, 7234であり，それぞれ1494年11月，1508年12月，1502年8月13日に完成された[Clarke 1974]．相違は頭文字や字体など印刷上のもので，内容上の違いはほとんどない．ただし初版と第2版は後半の幾何学を扱った部分に相当の差違がある[4]．

---

[1] パチョーリとその著作については，[三浦　1993]，[Mackinnon 1993]が詳しい．
[2] 編集者カルツォーニとカヴェッツォーニによって仮に「ペルージャの生徒たちへの数学論考」と呼ばれているが，ここでは「ペルージャ手稿」とする．パチョーリは他に1481年ザダルで生徒用に算術と幾何学について著作したと『スンマ』でいうが（67v），これは現存しないし，またそこに代数学が含まれているかどうかは不明．
[3] gの代わりにzが用いられ，eやiの前ではcの代わりにxが用いられたという[Lee 1989, 129]．パチョーリの使用語については[Ricci 1994]が詳しい．
[4] 第2版（1523）はトラコラーノで印刷されたが，トッリ・デル・ベナーコで印刷された第2版の再版（1525）もあるようである（Novamente impressa in Toscolano su la riva dil Benacenes ...,）が詳細は不明．その後『スンマ』は近年になって研究用に復刻され今それをリストしておく．

『スンマ』は 111v-115r と 143r-150v が代数を扱っている[5]. ここではその途中も含めて 111v-150r の内容を紹介しよう. この個所は第 8 区分 (distinctio) で 6 論考 (tractatus) からなる.

第 1 論考 (111v-115r) はプラスとマイナス, 第 2 論考 (115v-119v) は根の計算, 第 3 論考 (119v-143r) は 2 項和と 2 項差, 第 4 論考 (143r-144r) はベキの乗法, 第 5 論考 (144r-147v) は 2 次方程式の 6 種の標準型, 第 6 論考 (148r-150v) は 2 次方程式に還元できない高次方程式についてである.

第 1 論考で興味深いのは, (マイナス) × (マイナス) がプラスになるという演算の説明である (113r). $(10-2)\times(10-2)=64$ を例に, 欄外でいわゆる「たすき掛け」の図を描いて論じている. すなわち, $10\times10=100$ であり, また $10\times(-2)$ と $(-2)\times10$ とはともに -20 であることとはすでに分かっているとする. これら 3 者を加えて 60 となる. ところが答えは $8\times8=64$ でなければならないから, 残りの $(-2)\times(-2)$ は $+4$ でなければならないという. こうして「(マイナス) × (マイナス) がプラスになる」という規則が証明されたという[6].

第 2 論考はまず根 ℞ が分類されている. 根記号や省略形はすでに 67v の欄外の表で次のように示されている.

	(略記)	(もとの表記)
1.	n°	numero
2.	co	cosa
3.	ce	censo
4.	cu	cubo
5.	ce co	censo cubo
6.	p° r°	prima relato
7.	ce cu	censo de cubo と cubo de censo
8.	2° r°	secundo relato
9.	ce ce ce	censo de censo de censo
10.	cu cu	cubo de cubo
11.	ce p° r°	censo de primo relato
12.	3° r°	terco relato
13.	cu ce ce	cubo de censo de censo
14.	q° r°	quarto relato
15.	ce 2° r°	censo de secundo relato
16.	cu p° r°	cubo de primo relato

1959 Milano,Rivista bancaria; 1970 Parma,Guanda; 1973 大学堂書店 (IGI 7133. 小島男佐夫によりコロンビア大学モンゴメリー・コレクションから縮小され復刻. 150 部印刷) ; 1989 大日本印刷 (170 部印刷) ; 1990 雄松堂 (IGI 7132 慶応義塾大学図書館所蔵本の復刻) ; 1993 Parma; 1994 Budapest,Balassi Kiadó; 1994 Roma, Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato. さらにウェヴ上でも見ることができる.

5 それらは「コーサの規則」(regola della cosa), 「大いなる技法」(l'arte maggiore), 「アルジェブラとアルムカーバラ」(algebra et muchabala) などと呼ばれていた.

6『スンマ』では乗法規則として次をあげている(112v).

prima regole: piu via piu sempre fa piu
seconda regole: meno via meno sempre fa piu
tertia regole: piu via meno sempre fa meno
quarta regole: meno via piu sempre fa meno

ここで piu は+, meno は−, via は×を意味する. 除法, 加法, 減法はそれぞれ, 113v,114r,115r に述べられている. 加法規則については「ペルージャ手稿」にも見られる(p.545).

17.	ce ce ce ce	censo de censo de censo de censo
18.	5º rº	quinto relato
19.	cu ce cu	cubo de censo de cubo あるいは censo cubo cubo
20.	6º rº	sexto relato
21.	cᵉ cᵉ pº rº	censo de censo de primo relato
22.	cu 2º rº	cubo de secundo relato
23.	ce 3º rº	censo de terco relato
24.	7º rº	septimo relato
25.	cu ce ce ce	cubo de censo de censo de censo
26.	8º rº	octavo relato
27.	ce 4º rº	censo de quarto relato
28.	cu cu cu	cubo de cubo de cubo
29.	ce ce 2º rº	censo de censo de secundo relato
30.	[9º] rº	nono relato

終わり

R.	radici	根
R R	radici de radici	根の根
R v.	radici universal	普遍根
R cu.	Radici cuba	立方根
ꝗᵗᵃ	quantita	量

ここで R v.(Radici vniversale)は式全体をくくる根号で，$\sqrt{x+x^2}$のようなものである．プロニカ根(pronica) はギリシャ語に由来する．a は $a^2+\sqrt{a}$ のプロニカ根である．たとえば 9 は 84 のプロニカ根となる [Paciolo 1494, 115v][7]．パチョーリはそれ以上説明していないが，プロニカ根については他にすでにピエロ・デッラ・フランチェスカ [Arrighi 1970, fol.34r]がパチョーリと同じように述べているものの，その起源は明らかではない．

2．『スンマ』の代数学

パチョーリは 1，2 次方程式解法ではまず 6 つの標準型を示す．単純型は簡単であるが，複合型ではまず x^2の係数で方程式全体が割られ，x^2の係数が 1 にされる．その後は算法学派と同じ手順をとり，ピサのレオナルド『算板の書』第 15 章第 3 部とほぼ同様の内容である．ここで興味深いのは，欄外でラテン語詩(versus)による 3 つの標準型の解法が付加されていることである(145r)．これが彼のオリジナルなのか当時すでに知られていたものなのかはわからないが，欄外であることから後者である可能性が高い．その詩を紹介しておこう．伝統にしたがって x は「もの」，x^2は「財」，数は単位「ドラグマ」で示されている．

まず，ものと財とが数に等しい ($x^2+ax=b$) 場合，$x=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+b}-\frac{a}{2}$が示される．

ものと財とが数に等しいとき，ものから 半分にして，財を作らねばならない	Si res et census numero coequantur a rebus Dimidio sumpto censum producer debes

[7] ペルージャ手稿でも同じように言及されている(p.546).

そしてその数に加えて，その平方根全体から ものの半分を引け，財の辺が出てくるであろう	Addereque numero cuius a radice totiens Tolle semis rerum census latusque redibit

次に，ものとドラグマとが平方に等しい（$x^2=ax+b$）場合，$x=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+b}+\frac{a}{2}$を示す.

ものとドラグマとが平方に等しいとき， 最初のように，ものの半分の平方と数とを合わせ その平方根をとる ものの半分に加えると，財が明らかになる	Et si cum rebus dragme quadrate pares sint Adde sicuit primo numerum product quadrate Ex rebus medijs; cuiusque radice recepta Si rebus medie addes census patefiet

最後は，数と財とが根に等しい（$x^2+b=ax$）場合，$x=\pm\frac{a}{2}+\sqrt{(\frac{a}{2})^2+b}$を示す.

それに対して，数と財とが根に等しいとき ものの半分の平方にドラグマを加え そしてその平方根をとり，ものの半分に加えるか引く こうして財の側が知られるようになる	At si cum numero census radicem equabit Dragmas a quadrate dime rerum medietarum Cuiusque supererit radicem adde traheve A rebus medijs sic census costa notescet

幾何学的証明に入る前にパチョーリは「もっとも有益な注意」として判別式を与えている．たとえば,「方程式において平方とともにある数が，ものの半分の平方に等しいか，小さくないなら，この場合，解不能（insolubile）であり，...しかし数がものの 1/2 の平方に等しいなら，そのとき平方根 R はものの半分である」（147r)．すなわち，$x^2+b=ax$ なる方程式において，$b<(\frac{a}{2})^2$，$b=(\frac{a}{2})^2$ でないならば，解不能．$b=(\frac{a}{2})^2$ ならば，$x=\frac{a}{2}$としている．ここではパチョーリは従来の算法学派数学者たちとは異なり，方程式を単に解き数値を出すのみならず，さらに方程式論に進みつつあったことがうかがえる．しかしそのために必要な記号法はまだ欠如していた.

さて 2 次以上の方程式は，x^nで割って（schisare）次数を下げ，もし 2 次方程式に還元できれば同じように解くことができる．たとえばパチョーリの記号では,

.1.cu.p.1.ce.ce.equale a .1.p°.r°

すなわち，$x^3+x^4=x^5$ は,

.1.n°.p.1.co.eqli a.1.ce

すなわち，$1+x=x^2$ という標準形に還元できる．この解法はすでにアラビアのアブー・カーミル以来既知のものである．しかしそのようには還元できない場合が問題なのである．それについてパチョーリは次のように述べている.

> しかし数，もの，立方，あるいは数，平方，立方，あるいは数，立方，平方の平方が合わさった場合，それらの間の非比例性によって，今日までいかなる一般的規則も作られてこなかった．それらの間には何ら等しい間隔はないからである．というのも，ものと数の間には中間の力あるいは性質がなく，ものと立方の間には中間があるからである．したがってそれらの間には適切な関係は維持できないのである．なぜなら一方は他方よりその相手方からより離れているからである．そして同時に平方と立方の間には中間はなにもなく，平方と数の間にはものがある．こういうわけで，(上で述べたように）試行錯誤に（a taston）でなければそれらの方程式にはいかなる一般的規則も与えられることはない．そうであるから，方程式において，非比例性(disproportionati)を持つ異なる間の項に出くわすなら，この場合，円の方形化(quadrare del cerchio)に解法が与えられないのと同様に，この術は解法を与えないとあなたは言うであろう．そして今や事態はこの様なのである．問題は可能かもしれないが，それを解く方法は不比例性(inproportionalita)ゆえに与えられず，これこそが元凶なのである．（150r)

すなわち3次以上の方程式は，試行錯誤では解法は可能かもしれないが，一般的解法はないと結論付けている．そしてその理由は非比例性（または不比例性）であるとする．パチョーリは2次方程式に還元できないものは解不能と考えたようであり，比例性が重要な概念であった．『スンマ』にはタイトルそのものに比例性(proportionalita)という言葉が挿入され，その重要性は明らかである．彼は言う，「もしあなたがあらゆる学術について語るなら，比例(proportione)がそれらの中の母であり女王（madre e regina）であることが分かるであろうし，それなしでは誰もそれら学術を称賛することはできない．」(68v)

3．パチョーリと先行者[8]

『スンマ』の代数学の構成はピサのレオナルド『算板の書』やその追従である算法学派の著作とかなり似通っているが，概して言えるのはそれらより詳しいということである[9]．

パチョーリは参照した数学者について第8部冒頭で言及している．そこでは，サクロボスコ，パドゥヴァのプロドチーモ，エウクレイデス，ボエティウス，プトレマイオスのほか，アルキメデスらしき人物が見える[10]．またゲーベルやアルジェブラの名が挙げられているが，前者は天文学者のジャービル・イブン・アフラフではなく，おそらく錬金術師で著名なほうのジャービル・イブン・ハイヤーンを示している．後者のアルジェブラというのは人物名と誤解したのであろう．当時代数学はジャービル（そのラテン語名はゲーベル Geber）が作ったと誤解していた人々がおり，Algebra はその名前にアラビア語定冠詞 al がついたものと考えられていたのである．

ところでパチョーリは算法教師の伝統の最後の時代に生きたものの，彼自身は算法教師ではない．なぜなら彼は教師ではあるが算法学校のではなく，大学教授であったからである．テイラーの伝記によれば，ペルージャ(1478-87,1510)，ザラ（当時ヴェネチア領，現クロアチアのザダル）(1481)，フィレンツェ(1481-86)，ピサ(1499-1504)，ナポリ(1481-86)，ローマ(1481-86, 1489-90, 1514)，ミラノ(1496)，ボローニャ（1501-02）などの大学で数学を教えたという[11]．こうしてみると，実は彼は当時イタリアでもっとも有名な数学教授であったということがいえる．各地で招聘され転々としたことは，彼の数学教育法が大変評価されていたことを物語る．そしてその間各地の教育経験から多くの著作を生み出したのである．

テイラーによると，パチョーリは1475年からペルージャで150人の学生を前に数学を教えたが，1477年俸給に不満を覚え昇給を希望した．これに対して当局は，パチョーリが教育熱心であったこ

---

[8] パチョーリの著作に関しては剽窃問題がたびたび指摘されてきた[Picutti 1989]．ヒーファーにしたがって今それをまとめておくと次のようになる（カッコ内はそれを指摘した研究者）．『6つの正立体に関する3つに分けられて論ぜられた小冊子』はピエロ・デッラ・フランチェスカ『正立体について』のイタリア語訳とみなされ（Loria)，『スンマ』の正多角形27問はピエロ・デッラ・フランチェスカ『算法論』を使用し(Davis 1977)，『スンマ』簿記論はジョルジ・カリーニの手稿をもとにし(Mancini)，『スンマ』の幾何学の冒頭から f.59r までは Codex Palatino 577 最初から f.241 までと同一 [Picutti 1989][Heeffer 2009]．

[9] ローズによれば，パチョーリはヴェネチアのサン・アントニオでピサのレオナルド『算板の書』に注釈を付け，後にカルダーノがそれを見たが，それはのちに消失したという [Rose 1975, 144]．

[10] それぞれ，Giovannni de Sacro Buscho, Prodocimo de Beldomandis, Euclide, Boetio, Ptholomeo, Melchimellech, Geber (f.157r)．

[11] この時期，大学外の公共学校でも算術や幾何学が教えられており，パチョーリはミラノやヴェネチアのその種の学校で数学をも教えた．ヴェネチアでは，1508年8月11日リアルト橋のサン・バルトロメオ教会でエウクレイデス『原論』について公開講義を行ったということが『スンマ』の序文に見える．これは大学とは関係ないものの，演題が『原論』であるから，商人の子弟向きの実用数学でないことは想像できる．

ともあり，希望をかなえたという[Taylor 1942, 128]．その給料がどれ程かの資料は残されてはいないが，医学教授や法学教授に比べるとかなり少ないことだけは想像できる[12]．1480年12月11日付の給与支払記録が残っているので，少なくともこの時期までペルージャにいたことになる．

パチョーリはローマ大学教授であったとき法王レオ10世から一度だけ占星術師と呼ばれたことがある．当時その大学には数学教授は二人，占星術教授は一人いたが，パチョーリはその法王お抱え占星術師であったらしい[Taylor 1942, 390]．これはパチョーリの経歴の中ではきわめて異例で，また残された彼の作品には占星術的内容は何ら見られない．しかし当時にあっては，広義の占星術は数学的内容，つまりエウクレイデス『原論』，プトレマイオス『アルマゲスト』，算術，幾何学，アストロラーベ等の器具操作法，天文計算法などを含み，数学ともとれるものであった[13]．ガリレオがパドヴァ大学で占星術を教えたというのもこの意味で解さねばならない．さらにパチョーリと占星術との結びつきを示唆する間接的証拠が他にもある．エジンバラ大学所蔵の『スンマ』初版には59ページにわたって手書きでメモがつけられている[Lee 1989]．それはフィリッポ・カランドリ(15世紀末)が1497/8-1503/4年ころ付け加えたものと考えられ，そこには占星術に用いられた計算や図表が含まれている．カランドリ自身が狭義の占星術師であったという証拠は今日見つかっていないが[14]，『スンマ』に見られる計算法が占星術に利用されていたことが見て取れる．

4．「ペルージャ手稿」

ボンコンパーニは1861年にヴァチカンで従来知られていなかったパチョーリの手稿を発見した(Vat.lat.3129)．これは大きさ291×215mm，396フォリオ，31分冊から成立し[15]，パチョーリ自身の手書き原稿であるとされる．1477年12月12日に書き始め，1480年4月29日に完成したとある(2r)．本文は枠内にあたかも清書したかのごとく丁寧に書かれている．だが字体は独特で，判読は容易ではない．フォリオ1rには後にイニシャルを書かせるためか大きな空白がある．欄外では計算の手順や図などが示されているが，いくつかの書き込み（396vなど）はパチョーリ自身のものなのかどうかは不明である．通常著作はパトロンなど権威者に献上されるのが常であるが，この手稿はペルージャで教えた彼の学生たち自身に献上されている．実際この手稿はパチョーリがペルージャ大学で教えたとき書かれ，そのときの講義内容を記したものであろう．この手稿は1点しかなく，書き写されたことはない．

いまここで17の主要部分に分けられたその内容を概観すると次のようになる（1r-3v）．目次はアルファベット順に書かれているが(3v)，ここでは序文に記された内容をも合わせて，さらにフォリオ順に並べ替えた（内容と問題数も添えておく）．

章	分冊	フォリオ	タイトル	内容	問題数
1		1r-3v	（序文）		
		4r-v	（空白）		
		5r-7v	（欠）		
		8r-12v	（空白）		
E 1	2	13r-24v	Rotti overo fractioni	分数	

12 テイラーによると，ローマ大学では，医学教授は500－530フローリン金貨，法学教授も同等で，哲学教授は300フローリン金貨，倫理学教授は130フローリン金貨の報酬で，平均では165フローリン金貨であった[Taylor 1942, 390-91]．

13 ただしそこにはさらに占星医学，予言なども含まれてはいた．

14 カランドリの主著は『算術』（*Arithmetica*, 1491）で，印刷された初期の算術書のひとつ．

15 フォリオの5,6,7,53,325-349は欠損．また4r-v, 8r-12v, 54r-60v, 84r-v, 106v-108v, 384vは空白[Derenzini 1998]．

C 2	3-5	25r-52v	Compagnie	コンパーニア	
		53r-v	(欠)		
		54r-60v	(空白)		
D 3	6-7	61r-83v	Baratti,	物品交換	55
		84r-v	(空白)		
L 4	8-9	85r-105v	Cambii,	異なる貨幣の交換	65
		106v-108v	(空白)		
E 5	10-11	109r-132v	Meriti e imprestanze	利益と値引き	60
A 6	12	133r-144v	Arechare a un di		16
J 7	13	145r-156v	Ori e arienti	銀貨と金貨	46
R 8	14	157r-168v	Progressioni	数列	29
M 9	15	169r-180v	Positioni	仮置法	54
S 10	16-18	181r-216v	Straordinarie[16]	特別	92
B 19		217r-228v	Bolzoni o voi tastoni[17]	試行錯誤	38
F 12	20-22	229r-256v	Divisioni e partimenti de numeri	数の分割	74
T 13		257r-264v	Inventioni e trovamenti de numeri	数の発見	39
U 14	23-26	265r-312v	Geometri	幾何学	196
15	27	313r-324v	Radici in diferentem	根	
16	28-30	325-(一部欠)	Cosa, censo, cubo	もの，財，立方	
Q 16		327-(一部欠)	Capitoli de algebra	代数学の章	
17	31-32	361r-381r	Tariffa mercantescha	商品税金	
		384v	(空白)		

序文（1r-3v）はボンコンパーニによってすでに活字に移されているが，略記がそのまま書き写されているので，それ自体読みやすいわけではない[Boncompagni 1879]. 全文はカルツォーニとカヴァッツォーニによってすでに活字にされている [Calzoni e Cavazoni 1996]. 数の分割問題（229r-256v）はヒーファーによって詳細に研究されている[Heeffer 2009].

構成内容から判断すると 12 フォリオが 1 分冊になっていることは間違いない. しかし現行の内容順を見ると明らかに混乱がみられる. すなわち基本的な「根」「数の分割」などが後半にきて，応用である「物品交換」などが前半にあることである. これは後に分冊が綴じられるときに順が混乱したと考えられる[Derenzini 1998].

「ペルージャ手稿」の代数学の基本にかかわる部分は残念ながら一部欠損がみられ，パチョーリによる代数学構想の詳細はわからない. しかし代数学自体は全編にわたり使用されており，ペルージャにいたころの代数学の実際は推定できる[18]. ここで代数学の問題 1 題を具体的にとりあげ，そこからわかることを記しておく.

---

[16] 「11 頭の馬が 5 日に 13 の穀物を食べるとする. 12 頭の馬が 29 日ではどれだけ食べるか」[Calzoni and Cavazzoni 1996, 289]のような問題.

[17] 本文での表題は「数学遊戯ニツイテノヨウナ B そして汝の言う T」[Calzoni and Cavazzoni 1996, 357].『数学遊戯』とはアルベルティの著作が想起される. とりあげられている問題は，「サイコロ(dado)賭博」[Calzoni and Cavazzoni 1996, 365-66]や，ヨセフ問題と言われる「同一船上のユダヤ教徒とキリスト教徒について」[Calzoni and Cavazzoni 1996, 362-64]など. これらの問題はまたパチョーリの他の著作『量の力』にも関係する.

[18] ペルージャ手稿では代数学は algebra[Calzoni and Cavazzoni 1996, 551,569, 576], arzibra[Calzoni and Cavazzoni 1996, 9, 11]などと呼ばれていた.

「ペルージャ手稿」　問題 1(229r)[Calzoni and Cavazzoni 1996, 377]

> 私に 10 を，大を小で割ると 7 が生じるように 2 分させてください．それらの部分を私は問う．
>
> 一方を 1^{co} とおくと，他方は 10-1^{co} となる．さて大きいほうつまり 10-1^{co} を，1^{co} で割ると，(10-1^{co})/1^{co}．これが 7 となる．分数を取り除け（leva fractum）．1^{co} を 7 で掛けて，7^{co} となり，これが 10-1^{co} に等しい．部分を復元して(restora), 8^{co} が 10 に等しくなる．10 を 8^{co} で割って，1　1/4．これがもの(cosa)である．これを記憶して，他方は残り，8　3/4 から得られる．
>
> 証明をせよ（*fane prova*）．$8\frac{3}{4}$ を $1\frac{1}{4}$ で割ると，7 となり，コレガ提示サレタコトデアル．

この問題は x+y=10,　x ÷y=7 と表せるが，パチョーリは 1 つの未知数で処理している[19].

ここで指摘しておくべきことがいくつかある．

まず記号法である．未知数は本来「もの」(cosa)と呼ばれるが，ここではそれが略され 1^{co} と表示されている．記号法について「ペルージャ手稿」の箇所は失われてしまったので，手稿全体で用いられる記号法をまとめておく．

現代記号	呼び方	パチョーリの記号
+	plus	
−	meno	
=	fanno	
x	cosa	1^{co}
x^2	censo	$1^{\square}$
x^3	cubo	$1^{\triangle}$
x^4	censo di censo	$1^{\square\square}$
x^5		1^{φ}
x^6		$1^{\square\triangle}$
x^8		$1^{\square\square\square}$
x^9		$1^{\triangle\triangle}$
x^{10}		$1^{\square\varphi}$

つまり□＝2，△＝3，ϕ＝5の乗法で作られる．

こうしてたとえば $x^2\times(-24x)=-24x^3$ は，$1^{\square}$via meno 24^{co} fanno $24^{\triangle}$ で表される．しかし記号法はあたかも既知であるかのように説明もなく使用されているので[Calzoni and Cavazzoni 1996, 595]，必ずしもパチョーリのオリジナルではないであろう．実際少なくともこの三角や四角の記号と同様な記号をすでにラファエッロ・カナッチ（15 世紀後半）の『代数学の計算』のいわゆる「編集 B 版」が詳細に論じているからである[Franci e Rigatelli 1985][20].ほかにボエティウス『算術教程』，アルキメデスへの言及がある（p.5,7）．ところがパチョーリは『スンマ』ではこれら△□の記号を

---

19 パチョーリが言うには，「古い実用書」の場合は cosa と cosa　seconda（省略形は q^a）を用いるが，現代人は単に cosa と quantita を用いる（148v）としているので，未知数が 2 つの場合も考えることは可能であった．たしかにその前のアントニオ・デ・マッツィンギはすでにそれら 2 者を用いてはいる[Arrighi 1967].

20 ピエロ・デッラ・フランチェスカ『算術論』は x，x^2 を 1（上にバー）cosa，1（上に□）censo で示す[Arrighi 1970].

採用していない．自由に記号の書ける手稿と，特殊な記号は印刷するのに手間がかかる刊本の違いであろうか[21].

次に，本文はイタリア語であるが，しばしばラテン語文が挿入されていることである．もっともこれは「ペルージャ手稿」に限らず『スンマ』にも言えることではある．ここでは *quod est propositum* という表現が見えるが，*exemplum in vero numero*（「では数の例［で示そう］」）など，他にもさまざまな表現が見える．前者からはエウクレイデス『原論』の伝統形式が想起される．手稿自体にその古典書への言及がしばしば見られるので[22]，ペルージャ大学で数学講義をした際，エウクレイデス『原論』しかもカンパヌス版が用いられたことがうかがえる．

またしばしば「証明をせよ」(*fane prova*)として，得られた答えに対して検算を行っている．これはもちろんギリシャ的幾何学的証明ではないが，テクストとして生徒への教育的配慮であろう．

5．手稿からテクストへ

手稿と『スンマ』は扱っている内容は類似しているが，用いられる数値が同一なものはほとんどない．あっても表現形式は異なっている．その相違は文体のみならず，使用される用語にまで及ぶ．今ここでは内容が同じコンパーニア(*Compagnie*)問題を比較検討してみよう．コンパーニアとは少数の者が共同出資してつくった組織であり，今日の会社（英語 *campany*）の語源となった．その問題は出資額に応じて利益を配分するもので比例計算となる．これらの問題は *Regula de societate* (L.), *Company* (Eng.), *Rule of fellowship* (Eng.), *Partnership* (Eng.)とも呼ばれ，パチョーリは 85 題を挙げているが（150r－159r），中世実用数学で採用された種類の問題である[23].

まず「ペルージャ手稿」を見ておこう．

> 3 人がコンパーニアを作った．第 1 の人物は 300 リラ，第 2 は 50 フィオリーノ，第 3 は羊毛 2350 リブラ投入した．年頭に彼らは全体で 300 リラ見出し，儲けた．最初の人物は 110 リラ，第 2 は 100 リラ，第 3 は 90 儲けた．私は問う，1 フィオリーノは何と等しく，羊毛 100 は何と等しいかを．
>
> 次のようにせよ．この方法で各々の資本を見いだせ．第 1 の人物は 300 リラ投入し，110 リラ儲けたことを汝は知っている．今，5 リラ投入した人物によって行え．するとあなたは言うであろう，儲けの 110 リラが 300 リラの出資から出てくるなら，第 2 の人物が得る 100 リラはどこから来るのかと．100 を 300 で掛けよ．30000 となる．110 で割れ．$272\frac{8}{11}$が出てくる．このリラが第 2 の人物の 50 フィオリーノに値する．今 1 に等しいのが何であるかを見るため，$272\frac{8}{11}$を 50 で割れ．5 リラ，9 ソルド，1　1/11 デナーロとなり，これが 1 フィオリーノの値である．今羊毛 100 がどれだけの値かを見るため，その資本を見出すために同様に言う．110 が 300 から出てくると，$245\frac{5}{11}$の資本から 90 が出てくる．それゆえ 3 番目の人物の羊毛は全体で $245\frac{5}{11}$に値する．10 がいくらか知るため，あなたは言うであろう，235 の羊毛は $245\frac{5}{11}$に値すると．これは 100 の羊毛である．掛けて割れ．100 は 10 リラ，8 ソルド，$10\frac{398}{517}$デナールに値し，多数の合資の場合も同様に従う．(「ペルージャ手稿」f.26v)

ペルージャ手稿は具体的手順を示して懇切丁寧に説明されている．次に『スンマ』を見よう．『スンマ』は算法学派の伝統にあり，ラテン語が挿入され，他方で大学教育の伝統下にある．

---

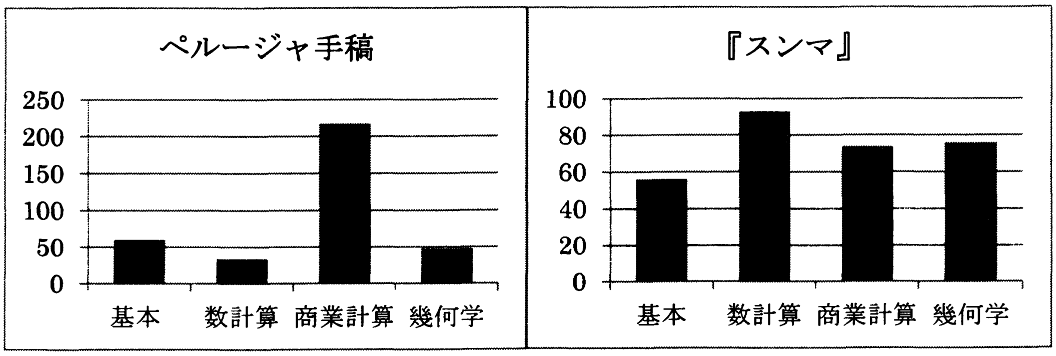
[21] パチョーリの著作『神聖比例論』(1509)の手稿と刊本でも同様なことがいえる．手稿では△，□，□□が用いられ，刊本ではそれぞれ cosa, censo, censo di censo と書かれている．

[22] エウクレイデスの名前[Calzoni and Cavazzoni 1996, 511,552,440,652]，『原論』第 II 巻(p.571)，　III(p.478 欄外)，X(p.551)，XII(p.522)，XIII(p.576,593)．カンパヌス版への言及は II-11(p.597).

[23] フィボナッチは[Boncompagni 1879, 135－143]，ピエロ・デッラ・フランチェスカは[Piero della Francesca 1970, 10r-12v, 38v]で述べている．

3人がコンパーニアを作った．第1の人物は300リラ，第2の人物は50フィオリーノ，第3の人物は羊毛2350リブラ投入した．年末に彼らは300リラ儲けた．最初の人物は110リラ，第2は100リラ，第3は残りを得た．私は問う，フィオリーノは何リラか，羊毛100は何に等しいか．行え．1フィオリーノは5リラ，9ソルド，$1\frac{1}{11}$ピチオーロに値し，羊毛100は10リラ，8ソルド，$10\frac{398}{517}$ピチオーロに値する．（『スンマ』f.151r）

『スンマ』の記述はきわめて簡潔である．「ペルージャ手稿」と『スンマ』の内容をそれに割り当てられたフォリオ数に応じて比べてみよう．基本（分数，根，代数学など），数計算(x+y=10, xy=aなどの問題)，商業問題，幾何学の4つに分けて考える．



こうしてみると，「ペルージャ手稿」は具体的計算問題（商業計算）の寄せ集めという性格が見えてくる．他方『スンマ』は，基本演算の説明に紙幅が割かれ，総括的参考書の色彩を帯びている．こうして『スンマ』は従来の算法学派に見られる問題集成という形態からテクストという形態へと完成されていったのである．

【テクスト】

Pacioli, Luca

Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos, Vat. Lat. 3129.

Pacioli, Luca　1494.

Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita, Paganino de Paganini: Venice.

Calzoni, Giuseppe and Gianfranco Cavazzoni (eds.) 1996

Tractatus Mathematicus ad Discipulos Perusinos, Citta di Castello : Perugia.

【2次文献】

Arrighi, Gino (ed.) 1967.

Antonio de' Mazzinghi. Trattato di Fioretti, secondo la lezione del codice L.IV.21 (sec. XV) della Biblioteca degli Intronati di Siena, Domus Galilaeana, Pisa.

Boncompagni, Baldassarre 1879.

"Appendice di documenti inediti relativi a Fra Luca Pacioli", *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* 12, 420-38.

Cavazzoni, Gianfranco 1998.

"Tractatus Mathematicus ad Discipulos Perusinos", in E. Giusti (ed.) , *Luca Pacioli e la mathematica del Rinascimento*, Petruzzi Editore: Castello, 199-208.

Clarke, Derek Ashdown 1974.

"The First Edition of Pacioli's 'Summa de arithmetica' (Venice, Paganinus de Paganinis, 1494)" , Gutenberg-Jahrbuch 90-92.

Davis, Margaret Daly 1977.
Piero della Francesca's Mathematical Treatises: the Trattato d'abaco and Libellus de quinque corporibus regularibus, Speculum artium 1, Longo Ravenna.

Derenzini, Giovanna 1998.
"Il codice Vat. Lat. 3129 di Luca Pacioli", in Enrico Giusti (ed.) *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*, Petruzzi Editore: Castello, 169-92.

Franci, Rafaella and Laura Toti Rigatelli 1985
"Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli", *Janus* 72, 17-82.

Piero della Francesca 1970.
Trattato d'abaco, dal Codice Ashburnhamiano 280 della Bibliolteca Medicea Laurenziana di Firenze, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, Domus Galilaeana : Pisa.

Heeffer, Albrecht 2008.
"A Conceptual Analysis of Early Arabic Algebra" in T. Street, S. Rahman and H. Tahiri (eds.) *The Unity of Science in the Arabic Tradition: Science, Logic, Epistemology and their Interactions*, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 89-129.

Heeffer, Albrecht 2009.
"Algebraic partitioning problems from Luca Pacioli's Perugia manuscript (Vat. Lat. 3129)" *SCIAMVS* 11, 1-45.

Lee, Geoffrey 1989.
"Manuscript Additions to the Edinburgh University Copy of Luca Pacioli's *Summa de Arithmetica", Abacus* 25, 125-34.

Mackinnon, Nick 1993.
"The Portrait of Fra Luca Pacioli", *The Mathematical Gazette* 77, 129-219.

Picutti, Ettore 1989.
"Sui plagi matematici di frate Luca Pacioli", *La Scienze* (246), 72-9.

Ricci, Laura 1994.
"Il Lessico Matematico dell Summa di Luca Pacioli", *Studi di lessicografia italiana* 12, 5-71.

Rose, Paul Lawrence 1975.
The Italian Renaissance *of Mathematics: Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo*, Droz: Geneve.

Taylor, Emmett, R. 1972.
No Royal Road. Luca Pacioli and His Times, The University of North Carolina Press: Chapell Hill.

van Egmond, Warren 1980.
Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalog of Italian Abacus Manuscripts and Printed Books to 1600, Istituto e Museo di Storia della Scienza: Florence.

東田全義 1991.
「パチョーリ『スンマ』の形態と書誌記述」, 『私立大学図書館協会会報』96, 57-66.

三浦伸夫 1999.
「パチョーリの数学」, *Accounting, Arithmetic & Art Journal* 14, 2-9.