

村瀬義益・ニュートン型の拡張漸化式(土倉・堀口法) の数値計算と収束比較条件式

新潟産業大学 堀口 俊二(Shunji Horiguchi)
Niigata Sangyo University

1. 序

1673 年の村瀬義益『算法勿憚改』にはニュートン法の拡張と見られる漸化式がある. これより実変数 x の方程式 $f(x)=0$ の解(根) α の q 乗 α^q を近似する漸化式が得られる[1].

$$x_{n+1}^q = x_n^q - qx_n^{q-1} f(x_n) / f'(x_n) \quad (q \text{ は } 0 \text{ 以外の整数定数}) \quad (1.1)$$

これを村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式あるいは土倉・堀口(*TH*)法(2010)という. 特に $q=1$ のときニュートン法(1669,1690)となる. このように和算は現代数学に繋がり, 生きている. 本稿では *TH* 法の収束比較条件式を与える (§ 3). 次にある 3 次, 5 次方程式に対して q を変化させて *TH* 法の数値計算を行い, これらの収束が収束比較条件式と対応することを確認する (§ 4). 次の § 2 から始める.

2. 土倉・堀口(*TH*)法の導出とグラフ

TH 法と接線 $y=f(x)$ を $x^q=t$ (q は 0,1 でない整数)により変換した関数を $y=g(t)$ とする.

$$g(t) = f(t^{1/q}) \quad (2.1)$$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{g(t_n)}{g'(t_n)} \quad (2.2)$$

この関数は $g(x^q)=f(x)$ となるから, $y=f(x)$ を x 軸方向に $x^q=t$ だけ伸縮したグラフとなる. $g(t)=0$ の $g(t)$ にニュートン法を適用すると,

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n^{1/q})}{f'(t_n^{1/q}) \cdot \frac{1}{q} t_n^{1/q-1}} \quad (2.3)$$

となり, $x^q=t$ により変数 x にもどすと *TH* 法(1.1)が得られる. これは $y=g(t)$ のグラフの点 $(t_n, g(t_n))$ における接線の t 軸との交点 t_{n+1} を意味する. (注. *TH* 法(1.1)は q が 0 でない実数の場合でもよい)

命題 1 (1) $q \geq 2$ のとき, $|x| > (<) 1$ で, $y=g(t)$ は $y=f(x)$ を $x^q=t$ だけ拡大(縮小)したグラフとなる. したがって $y=f(x)$ の根 α が $|\alpha| > (<) 1$ のとき, $|\alpha^q| > (<) 1$ に移る.

(2) $q \leq -1$ のとき, $|x| > (<) 1$ で, $y=g(t)$ は $y=f(x)$ を $x^q=t$ だけ縮小(拡大)したグラフとなる. したがって $y=f(x)$ の根 α が, $|\alpha| > (<) 1$ のとき $|\alpha^q| < (>) 1$ に移る.

(3) $y=g(x)$ と $y=f(x)$ は, q が奇数のとき $x = \pm 1$, q が偶数のとき $x = 1$ で交わる.

定理 2 (1) $y=f(x)$ が $x=a$ で極大(小)値をとれば, $y=g(t)$ は $t=a^q$ で極大(小)値 $g(a^q)=f(a)$ をとる.

(2) q が奇数のとき, $D=(x f''(x) + (1-q) f'(x)) x^{-q} > 0 (< 0)$ (2.4)

なら, $g''(t) > 0 (< 0)$ すなわち下に凸(上に凸)となる.

q が偶数のとき, $g(t)=f(\pm t^{1/q})$ に対して, $\pm (x f''(x) + (1-q) f'(x)) x^{-q} > 0 (< 0)$ (2.5) (複号同順)

なら, $g''(t) > 0 (< 0)$ となる.

命題 3 接線の傾き $f'(x)$ は $g'(t) = g'(x^q) = f'(x)(qx^{q-1})^{-1}$ (2.6) に移る.

定理 4 $y=f(x)$ の曲率 $\mu = \frac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}$ は $y=g(t)$ の曲率 μ_q に移る.

$$\mu_q = \frac{g''(t)}{(1+(g'(t))^2)^{3/2}} = \frac{f''(x) - (q-1)f'(x)x^{-1}}{(qx^{q-1})^2 \left(1 + \left(f'(x)/qx^{q-1}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (2.7)$$

ここで $\mu_1 = \mu$ となる.

定義5 $y = f(x)$ のグラフの x 軸との交点 α における接線が x 軸との成す角を $\theta (0 < \theta < \pi)$ とする. 接線の傾きが+のとき, この θ を $y = f(x)$ と x 軸との成す角とする. 接線の傾きが-のとき, $\pi - \theta$ を $y = f(x)$ と x 軸との成す角とする.

命題6 $f(x) = 0$ の根 α が, 適当な整数 q により x^q に拡大されるとき, α^q に於ける $g(x)$ の x 軸と成す角 $< \alpha$ に於ける $f(x)$ の x 軸と成す角となる. $y = f(x)$ の α の近傍より $y = g(x)$ の α^q の近傍の方が直線に近い形となる.

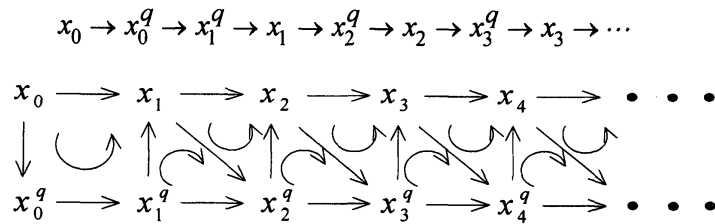
命題7 p 次方程式 $f(x) = x^p - c = 0 (p \geq 2)$ のとき, p 乗の TH 法は

$$x_{n+1}^p = x_n^p - px_n^{p-1} \frac{x_n^p - c}{px_n^{p-1}} = c \quad (2.8)$$

となり, 任意の初期値に対し 1 回で c に収束する. したがってこの漸化式が他の漸化式より反復回数が少ない.

3. TH 法の計算過程と収束比較条件式

TH法の計算過程 初期値 x_0, x_0^q を与える. 次に下図のように $x_i^q \rightarrow x_i$ のように x_i^q と x_i を交互に求める. 反復回数は n でカウントする.



定理8 $f(\alpha) = 0, q (\neq 0)$ を整数定数とする. $x_n \rightarrow \alpha$ のとき, TH 法は, α が単根のとき 2 次収束

$$|x_{n+1}^q - \alpha^q| \doteq \left(\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} + \frac{1-q}{2\alpha} \right) q\alpha^{q-1} |x_n - \alpha|^2 \quad (3.1)$$

する.

α が m 重根のとき $M = (1 - 1/m) |q\alpha^{q-1}| < 1$ なら 1 次収束する.

$$|x_{n+1}^q - \alpha^q| \leq M |x_n - \alpha| \quad (3.2)$$

式(3.1)からニュートン法と TH 法の収束の速さを比較する十分条件を与える.

定理9 α が単根のとき

$$-1 \leq \left(1 + \frac{f'(\alpha)(1-q)}{f''(\alpha)\alpha} \right) q \leq 1 \quad (3.3)$$

なら, TH 法がニュートン法より収束が速いか等しい.

方程式 $f(x) = 0$ を式変形したものを $g(x) = 0$ とする. これに対する TH 法は

$$x_{n+1}^r = x_n^r - rx_n^{r-1} \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \quad (3.4)$$

であり, α が単根のとき

$$|x_{n+1}^r - \alpha^r| \doteq \left| \left(\frac{g''(\alpha)}{2g'(\alpha)} + \frac{1-r}{2\alpha} \right) r\alpha^{r-1} \right| (x_n - \alpha)^2 \quad (3.5)$$

となり2次収束する. したがって(3.1)と(3.5)の $(x_n - \alpha)^2$ の係数を比較して次を得る.

定理 10

$$\left| \frac{\alpha^{r-1}}{\alpha^{q-1}} \right| \leq \frac{\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{1-q}{\alpha} \right) |q|}{\left(\frac{g''(\alpha)}{g'(\alpha)} + \frac{1-r}{\alpha} \right) |r|} \leq \left| \frac{\alpha^{r-1}}{\alpha^{q-1}} \right| \quad (3.6)$$

なら, $f(x)$ の q 乗のTH法が $g(x)$ の r 乗のTH法より収束が速いか等しい.

4. ニュートン法(N法)とTH法の数値計算例(3次, 5次方程式)

初期値の選び方 (1) 閉区間 $[a, b]$ の中点の近傍に $f(x)=0$ の根 α があるように a, b を選ぶ. 次に $[a, b]$ を n 分割し, 点 a_i を $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ となるように選び, これらの点を N 法($q=1$)の初期値 $x_0 = a_i$ とする. n 分割は n 等分に近くなることが望ましい.

N法の初期値(1)に対応して, TH法(1.1)の初期値の選び方は次の2通りを考える.

(2) 相対初期値 $x_0^q = a_i^q$ を初期値とする. (注. 相対初期値のとき収束比較条件式(3.3), (3.6)が有効である.)

(3) 絶対初期値 閉区間 $[c, d]$ の c, d を, $d-c \doteq b-a$, $[c, d]$ の中点の近傍か内部のどこかに α^q があるように選ぶ. 次に $[c, d]$ を n 分割し, 分点 c_i を $c = c_0 < c_1 < \dots < c_{n-1} < c_n = d$ となるように選び, 初期値 $x_0^q = c_i$ とする.

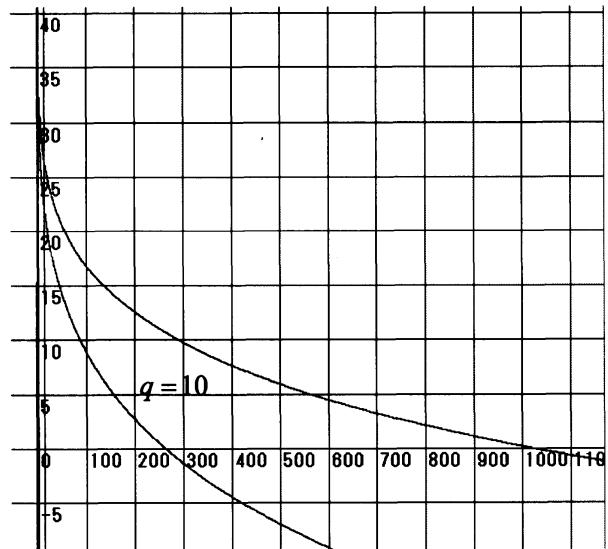
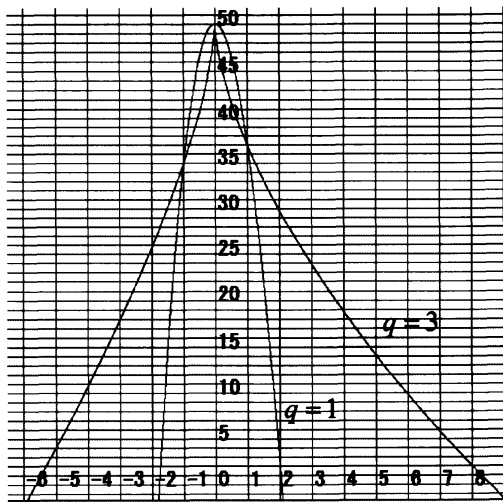
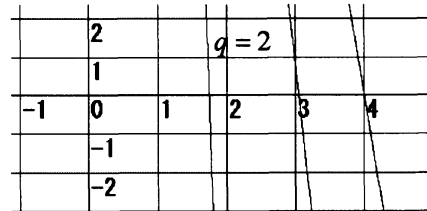
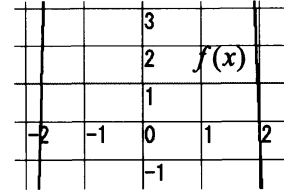
例 2.1 $f(x) = x^3 - 14x^2 + 48 = 0$

これはこの研究の発端となった村瀬義益[1]の炉縁の太さ x を求める方程式である. これは x の項がない方程式であり, 解は $x=2, 6 \pm 2\sqrt{15}$ である.

$f(x)$ のグラフは $x=2$ の近傍で単調減少している.

(1) $q=1, 2, 3, 10$

グラフは $q=2, 3, 10$ のとき, $f(x)$ を変換した $g(x) = \pm x^{3/2} - 14x + 48$, $g(x) = x - 14x^{2/3} + 48$, $g(x) = \pm x^{3/10} - 14x^{1/5} + 48$ のグラフである. $f(x)=0$ の根 2 は 1 より大きいので, $g(x)=0$ の根は $2^2, 2^3, 2^{10}$ となり 2 より大きくなる.



$q=1$ の $f(x)=0$ の根2, $q=2$ の $g(x)=0$ の根 2^2 , $q=3$ の $g(x)=0$ の根 2^3 , $q=10$ の $g(x)=0$ の根 2^{10} における接線の傾きと曲率は次表である. $q=10$ では x 軸と成す角は, 他の q より小さくなり, 直線に近づく.

	1	2	3	10
$f(x)$	x^3-14x^2+48	x^3-15x^2+48	$x^3-14x^2/3+48$	$x^3-14x^2/10+48$
根	2	2^2	2^3	2^{10}
接線の傾き	-44	-11	-367	-00086
曲率	-000019	000028	00035	694E-06

$q=1,2,3,10$ の TH 法 数値計算は Excel を使い 標準の 10桁出力で行う.

$$q=1 \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{3x_n^2 - 28x_n} \quad q=2 \quad x_{n+1}^2 = x_n^2 - 2x_n \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{3x_n^2 - 28x_n} = \frac{48 - 0.5x_n^3}{14 - 1.5x_n}$$

村瀬義益は『算法勿憚改』(1673)で, 炉縁の方程式から次の 2 つの漸化式を考えた:

第 1 法 $x_{n+1}^2 = (48 + x_n^3)/14$ 村瀬は $x_0=0$ を初期値とし, $x_1=1.85, x_2=1.97, x_3=1.9936$ まで計算し, 解を 2 としている.

第 2 法 $x_{n+1}^2 = 48/(14 - x_n)$ ここでは $x_0=0, x_1=1.85, x_2=1.976, x_3=1.9989, x_4=1.9999907$ まで計算し, 解を 2 としている. 第 1 法より第 2 法の漸化式の方が精度が良くなっている. これらの漸化式の延長として, 2 次収束する $q=2$ の TH 法が得られるのである.

第 3 法は長年未解読であったが, 2009 年 5 月に藤井康生(四日市大関孝和数学研)が解読に成功する.

第 3 法 $48 - x^3 = (14 - 2x)x^2$ 村瀬はこの方程式で解(根)2 の確かめをしている. これより

漸化式 $x_{n+1}^2 = (48 - x_n^3)/(14 - 2x_n)$ が得られる.

$$q=3 \quad x_{n+1}^3 = x_n^3 - 3x_n^2 \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{3x_n^2 - 28x_n} \quad q=10 \quad x_{n+1}^{10} = x_n^{10} - 10x_n^9 \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{3x_n^2 - 28x_n}$$

これらの TH 法の
 相対初期値, 絶対
 初期値の数値計算
 は右表である.
 N 法と TH 法の
 収束比較条件
 $-1 \leq (1 - \frac{f'(2)}{f''(2)} \frac{1-q}{2})q \leq 1$
 を計算すると
 $-1 \leq \frac{1}{8}(19 - 11q)q \leq 1$

表 2.1 (1) 相対初期値 $f(x)=x^3-14x^2+48=0$

初期値 x_0	ニュートン法	TH法($q=2$)	TH法($q=3$)	TH法($q=10$)
1	2($n=5$)	4($n=4$)	8($n=5$)	1024($n=5$)
1.2	2($n=4$)	4($n=4$)	8($n=5$)	1024($n=7$)
1.4	2($n=4$)	4($n=3$)	8($n=4$)	1024($n=6$)
1.6	2($n=4$)	4($n=3$)	8($n=4$)	1024($n=6$)
1.8	2($n=3$)	4($n=3$)	8($n=4$)	1024($n=5$)
2.1	2($n=3$)	4($n=3$)	8($n=3$)	1024($n=4$)
2.2	2($n=3$)	4($n=3$)	8($n=4$)	1024($n=6$)
2.4	2($n=4$)	4($n=3$)	8($n=4$)	#NUM!($n=2$)
2.6	2($n=4$)	4($n=4$)	8($n=5$)	#NUM!($n=2$)
2.8	2($n=4$)	4($n=4$)	8($n=5$)	#NUM!($n=2$)
3	2($n=4$)	4($n=4$)	8($n=5$)	#NUM!($n=2$)

表 2.1 (1) 絶対初期値 $f(x)=x^3-14x^2+48=0$

x_0^3	TH法($q=3$)	x_0^{10}	TH法($q=10$)
7	8($n=3$)	1023	1024($n=2$)
7.2	8($n=3$)	1023.2	1024($n=2$)
7.4	8($n=3$)	1023.4	1024($n=2$)
7.6	8($n=3$)	1023.6	1024($n=2$)
7.8	8($n=3$)	1023.8	1024($n=2$)
8.1	8($n=3$)	1024.1	1024($n=2$)
8.2	8($n=3$)	1024.2	1024($n=2$)
8.4	8($n=3$)	1024.4	1024($n=2$)
8.6	8($n=3$)	1024.6	1024($n=2$)
8.8	8($n=3$)	1024.8	1024($n=2$)
9	8($n=3$)	1025	1024($n=2$)

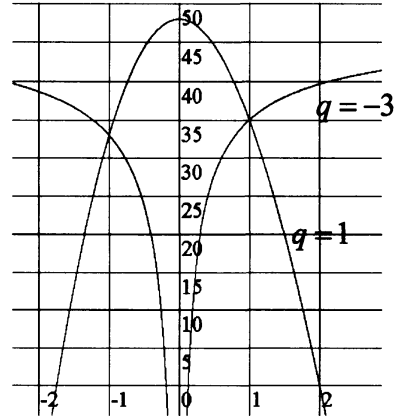
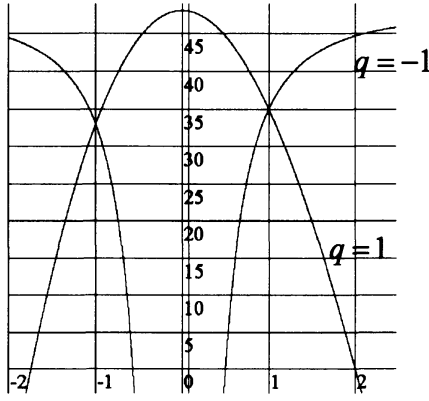
となる. これを満たすのは $q=2$ であり, このとき N 法より TH 法が収束が速いか等しい.
 これは計算結果と一致する.

絶対初期値のとき、初期値を表のようにとる。この場合、 $q=3, 10$ のとき、根に収束するときの反復回数
の平均は、3回、2回となり、ニュートン法より速く収束する。

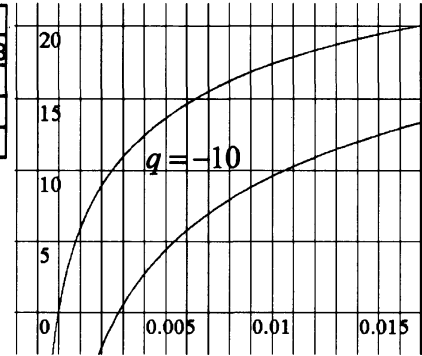
(2) $q=1, -1, -3, -10$

グラフは $q=-1, -3, -10$ のとき、 $f(x)$ を変換した $g(x)=x^{-3}-14x^{-2}+48$ 、 $g(x)=x^{-1}-14x^{-2/3}+48$ 、 $g(x)=\pm x^{-3/10}-14x^{-1/5}+48$ のグラフである。

$f(x)=0$ の根 $\alpha=2$ は1より大きいので、 $g(x)=0$ の根は $2^{-1}, 2^{-3}, 2^{-10}$ となり1より小さくなる。



q	1	-1	-3	-10
	$f(x)=x^3-14x^2+48$	$g(x)=x^{-3}-14x^{-2}+48$	$g(x)=x^{-1}-14x^{-2/3}+48$	$g(x)=x^{-3/10}-14x^{-1/5}+48$
根	2	2^{-1}	2^{-3}	2^{-10}
接線の傾き	-44	176	234	9011
曲率	-0.00019	-0.00018	-0.00023	-1.5E-05



$q=-10$ では x 軸と成す角は、他の q より大きくなり、直線に
近づく。グラフの x 軸との交わる角度は $y=f(x)$ のそれより
 $q=-1, -3, -10$ のグラフの方が大きい。

$q=1, -1, -3, -10$ のTH法

$$N法 \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{3x_n^2 - 28x_n}$$

$$q=-1 \quad x_{n+1}^{-1} = x_n^{-1} + x_n^{-2} \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{3x_n^2 - 28x_n}$$

$$q=-3 \quad x_{n+1}^{-3} = x_n^{-3} + 3x_n^{-4} \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{3x_n^2 - 28x_n}$$

$$q=-10 \quad x_{n+1}^{-10} = x_n^{-10} + 10x_n^{-11} \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{3x_n^2 - 28x_n}$$

N法と3つの漸化式を相対初期値で選んだ
ときの計算結果は表 2.1 (2)である。

N法の初期値 x_0 を1.6から2.4まで
0.1間隔に取る。これらの初期値に対する
 $q=-1, -3, -10$ の初期値 $x_0^{-1}, x_0^{-3}, x_0^{-10}$ は、
いずれも0と1の間の狭い範囲の値となる。
反復回数は $q=-10$ の#NUM!を除くと、
いずれもN法より1, 2回多い。

表2.1 (2) 相対初期値 $f(x)=x^3-14x^2+48=0$

初期値 x_0	ニュートン法	x_0^{-1}	TH法($q=-1$)
1.6	2(n=4)	0.625	0.5(n=5)
1.7	2(n=4)	0.588235294	0.5(n=4)
1.8	2(n=3)	0.555555556	0.5(n=4)
1.9	2(n=3)	0.526315789	0.5(n=3)
2.1	2(n=3)	0.476190476	0.5(n=3)
2.2	2(n=3)	0.454545455	0.5(n=4)
2.3	2(n=3)	0.434782609	0.5(n=4)
2.4	2(n=4)	0.416666667	0.5(n=4)

x_0^{-3}	TH法($q=-3$)	x_0^{-10}	TH法($q=-10$)
0.244140625	0.125(n=7)	0.009094947	#NUM!(n=2)
0.203541624	0.125(n=5)	0.004960332	#NUM!(n=2)
0.171467764	0.125(n=4)	0.002800754	#NUM!(n=2)
0.145793847	0.125(n=4)	0.001631038	0.000976562(n=5)
0.1079797	0.125(n=4)	0.000599525	0.000976562(n=4)
0.09391435	0.125(n=4)	0.000376507	0.000976562(n=5)
0.082189529	0.125(n=4)	0.000241391	0.000976562(n=4)
0.07237963	0.125(n=5)	0.00015772	0.000976562(n=6)

$q=-1, -3, -10$ の漸化式を絶対初期値で選んだときの計算結果は右表である。

$q=-1, -3, -10$ の場合, $0.5, 0.125, 2^{-10}$ に収束する反復回数を除けば, N 法より反復回数は多いか等しい。

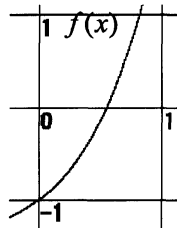
以上により, 相対初期値, 絶対初期値に取った場合, 根が $2(>1)$ の場合は, N 法より TH 法が反復回数が多くなる。

これは $q=-1, -3, -10$ のグラフの $\alpha^{-1}, \alpha^{-3}, \alpha^{-10}$ における x 軸となす角が, N 法のグラフの根 α における x 軸となす角より大きいことが原因と推測される。

表2.1 (2) 絶対初期値 $f(x)=x^3-14x^2+48=0$

x_0^{-1}	TH法($q=-1$)	x_0^{-3}	TH法($q=-3$)
-0.099000099	-0.572748612($n=10$)	-0.473500052	0.125($n=5$)
0.071999424	0.072748612($n=3$)	-0.302302121	-0.187885012($n=6$)
0.243013366	0.5($n=6$)	-0.131598052	-0.187885012($n=5$)
0.414078675	0.5($n=4$)	0.039512258	0.125($n=6$)
2	0.5($n=1$)	0.125	0.125($n=1$)
0.586166471	0.5($n=4$)	0.210521696	0.125($n=6$)
0.757002271	0.5($n=6$)	0.381335469	-0.187885012($n=5$)
0.927643785	-0.572748612($n=10$)	0.552063308	#DIV/0!($n=14$)
1.098901099	-0.572748612($n=8$)	0.723343241	#DIV/0!($n=13$)

x_0^{-10}	TH法($q=-10$)
1E-11	#NUM!($n=2$)
1E-10	#NUM!($n=2$)
0.000000001	0.000976563($n=13$)
0.0000001	0.000976563($n=11$)
0.000976563	0.000976563($n=2$)
0.085976563	#NUM!($n=2$)
0.256976563	#NUM!($n=2$)
0.427976563	#NUM!($n=2$)
0.598976563	#NUM!($n=2$)



例 2.2 $f(x)=x^3+x^2+x-1=0$

根 α は約 0.54369 であり, $f(x)$ のグラフはその近傍で単調増加である。

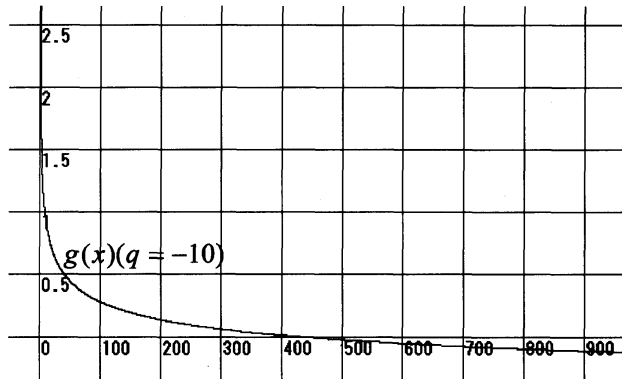
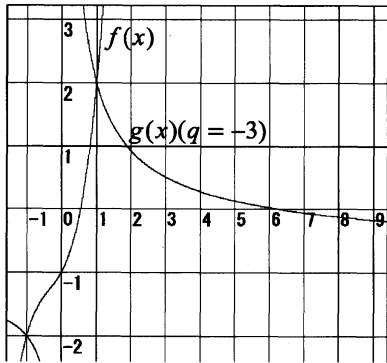
$q=-10, -3, 1, 2, 3, 10$ の TH 法の数値計算

N 法と TH 法の収束比較式

$$-1 \leq \left(1 - \frac{f'(0.5437)}{f''(0.5437)} \frac{1-q}{0.5437}\right) q \leq 1$$

より, $q=2$ を得る。このとき $q=2$ の TH 法が N 法より反復回数が少ないか, 等しい。

(1) $q=-3, -10$ のとき $g(x)=x^{-1}+x^{-2/3}+x^{-1/3}-1$, $g(x)=x^{-3/10}+x^{-1/5}+x^{-1/10}-1$ となる。



$q=1$ の $f(x)=0$ の根 α , $q=-3$ の $g(x)=0$ の根 α^{-3} , $q=-10$ の $g(x)=0$ の根 α^{-10} における曲率はそれぞれ約 0.174, 0.023, $9.85E-07$ となり, 直線に近づく。 x 軸と成す角は, $f(x), g(x)(q=-3), g(x)(q=-10)$ の順に小さくなる。

$q=1, -1, -3, -10$ の TH 法

$$q=1 \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n^2 + x_n - 1}{3x_n^2 + 2x_n + 1}$$

$$q=-1 \quad x_{n+1} = x_n^{-1} + x_n^{-2} \frac{x_n^3 + x_n^2 + x_n - 1}{3x_n^2 + 2x_n + 1}$$

$$q=-3 \quad x_{n+1}^{-3} = x_n^{-3} + 3x_n^{-4} \frac{x_n^3 + x_n^2 + x_n - 1}{3x_n^2 + 2x_n + 1}$$

$$q=-10 \quad x_{n+1}^{-10} = x_n^{-10} + 10x_n^{-11} \frac{x_n^3 + x_n^2 + x_n - 1}{3x_n^2 + 2x_n + 1}$$

N 法と3つの漸化式を相対初期値で選んだときの計算結果は右表である。この場合、 N 法より TH 法が初期値の範囲が広くなり、 $|x_0^{-1}|, |x_0^{-3}|, |x_0^{-10}|$ が大きいとき、 $\#DIV/0!$ あるいは $\#NUM!$ となる。収束するときは N 法より反復回数が少しずつ多くなる。

表2.2 (1) 相対初期値 $f(x)=x^3+x^2+x-1=0$

x_0	N 法	x_0^{-1}	x^{-1}
-0.4	0.543689013(n=7)	-2.5	#DIV/0!(n=9)
-0.1	0.543689013(n=6)	-10	#DIV/0!(n=9)
0.2	0.543689013(n=5)	5	#DIV/0!(n=10)
0.5	0.543689013(n=3)	2	1.839286755(n=4)
0.8	0.543689013(n=4)	1.25	1.839286755(n=5)
1.1	0.543689013(n=5)	0.909090909	1.839286755(n=6)
1.4	0.543689013(n=5)	0.714285714	1.839286755(n=7)
1.7	0.543689013(n=6)	0.588235294	1.839286755(n=8)

x_0^{-3}	x^{-3}	x_0^{-10}	x^{-10}
-15.625	#DIV/0!(n=17)	9536.743164	#NUM!(n=3)
-1000	#DIV/0!(n=15)	10000000000	#NUM!(n=3)
125	#DIV/0!(n=16)	9765625	#NUM!(n=2)
8	6.222262523(n=4)	1024	443.0925366(n=7)
1.953125	6.222262523(n=6)	9.313225746	443.0925352(n=8)
0.751314801	6.222262523(n=7)	0.385543289	443.0925366(n=10)
0.364431487	6.222262523(n=8)	0.034571613	443.0925364(n=11)
0.203541624	6.222262523(n=9)	0.004960332	443.0925325(n=12)

$q=-1, -3, -10$ の漸化式を絶対初期値で選んだときの計算結果は次表である。

表2.2 (1) 絶対初期値 $f(x)=x^3+x^2+x-1=0$

x_0	x_0^{-1}	x^{-1}	x_0	x_0^{-3}	x^{-3}
1	1	1.839286755(n=6)	0.58	5.125261388	6.222262523(n=4)
0.9	1.111111111	1.839286755(n=6)	0.57	5.39977213	6.222262523(n=4)
0.8	1.25	1.839286755(n=5)	0.56	5.694241983	6.222262523(n=3)
0.7	1.428571429	1.839286755(n=5)	0.55	6.010518407	6.222262523(n=3)
0.6	1.666666667	1.839286755(n=4)	0.54	6.350657928	6.222262523(n=4)
0.5	2	1.839286755(n=4)	0.53	6.716954264	6.222262523(n=4)
0.4	2.5	1.839286755(n=6)	0.52	7.111970869	6.222262523(n=4)
0.3	3.333333333	#DIV/0!(n=18)	0.51	7.538578676	6.222262523(n=4)

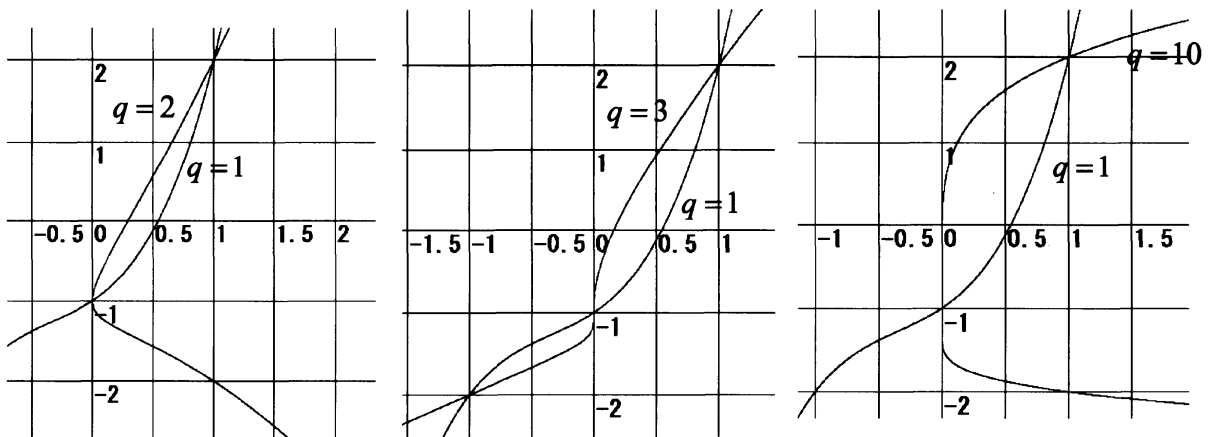
$q=-3, -10$ の場合は N 法より反復回数は少なくなる。これは $q=-3, -10$ のグラフが $f(x)$ のグラフより x 軸となす角が小さい、 $\alpha^{-3}, \alpha^{-10}$ の近傍では、直線に近い形となっていることが原因と推測される。

(2) $q=2, 3, 10$ のとき、それぞれ

$g(x)=\pm x^{3/2} + x \pm x^{1/2} - 1$ (複号同順), $g(x)=x + x^{2/3} + x^{1/3} - 1$,

$g(x)=\pm x^{0.3} + x^{0.2} \pm x^{0.1} - 1$ (複号同順) となる。

x_0	x_0^{-10}	x^{-10}
0.5499	395.5148582	443.0925363(n=3)
0.5482	407.9525837	443.0925365(n=3)
0.5465	420.8219041	443.0925366(n=3)
0.5448	434.1392093	443.0925366(n=3)
0.5431	447.9215652	443.0925352(n=2)
0.5414	462.1867444	443.0925366(n=3)
0.5397	476.9532576	443.0925365(n=3)
0.538	492.2403868	443.0925363(n=3)



$q=2$ の $g(x)=0$ の根 α^2 , $q=3$ の $g(x)=0$ の根 α^3 , $q=10$ の $g(x)=0$ の根 α^{10} における曲率はそれぞれ約 $-0.091, -0.135, -0.027$ となる。 $q=2$ の $g(x)=0$ の根 α^2 , $q=3$ の $g(x)=0$ の根 α^3 , $q=10$ の $g(x)=0$

の根 α^{10} における接線の傾きは, 2.735, 3.354, 71.65 となるので, x 軸との成す角は $q=2, 3, 10$ の順に大きくなる.

$$q=2, 3, 10 \text{ の TH 法} \quad q=2 \quad x_{n+1}^2 = x_n^2 - 2x_n \frac{x_n^3 + x_n^2 + x_n - 1}{3x_n^2 + 2x_n + 1}$$

$$q=3 \quad x_{n+1}^3 = x_n^3 - 3x_n^2 \frac{x_n^3 + x_n^2 + x_n - 1}{3x_n^2 + 2x_n + 1} \quad q=10 \quad x_{n+1}^{10} = x_n^{10} - 10x_n^9 \frac{x_n^3 + x_n^2 + x_n - 1}{3x_n^2 + 2x_n + 1}$$

N 法と上の3つの漸化式を相対初期値, 絶対初期値で選んだときの計算結果は次表である.

相対初期値 $q=2$
 の TH 法は N 法の
 反復回数より少ない
 いか等しい. これ
 は収束比較式から
 得られた結果と一
 致する. q が大き
 くなると, グラフの
 曲率が小さくなり,

表2.2 (2) 相対初期値 $f(x)=x^3+x^2+x-1=0$

初期値 x_0	ニュートン法	TH法($q=2$)	TH法($q=3$)	TH法($q=10$)
0.1	0.543689013($n=5$)	0.295597743($n=4$)	0.160713245($n=6$)	0.002256865($n=9$)
0.2	0.543689013($n=5$)	0.295597743($n=4$)	0.160713245($n=5$)	0.002256865($n=7$)
0.3	0.543689013($n=4$)	0.295597743($n=3$)	0.160713245($n=4$)	0.002256865($n=6$)
0.4	0.543689013($n=4$)	0.295597743($n=3$)	0.160713245($n=4$)	0.002256865($n=5$)
0.5	0.543689013($n=3$)	0.295597743($n=3$)	0.160713245($n=3$)	0.002256865($n=3$)
0.6	0.543689013($n=3$)	0.295597743($n=2$)	0.160713245($n=3$)	0.002256865($n=5$)
0.7	0.543689013($n=4$)	0.295597743($n=3$)	0.160713245($n=4$)	#NUM!($n=2$)
0.8	0.543689013($n=4$)	0.295597743($n=3$)	0.160713245($n=5$)	#NUM!($n=2$)
0.9	0.543689013($n=4$)	0.295597743($n=3$)	0.160713245($n=5$)	#NUM!($n=2$)
1	0.543689013($n=5$)	0.295597743($n=3$)	0($n=1$)	#NUM!($n=2$)
1.1	0.543689013($n=5$)	0.295597743($n=3$)	0.160713245($n=8$)	#NUM!($n=2$)

直線に近づく. また x 軸と成す角も大きくなり, 反復回数が多くなったり, #NUM! となる.

絶対初期値

$q=2$ の計算は省略する. この場合も
 q が大きくなると, 反復回数が多
 くなったり, #NUM! となり, ニュート
 ン法より収束が劣る.

表2.2 (2) 絶対初期値 $f(x)=x^3+x^2+x-1=0$

x_0^3	TH法($q=3$)	x_0^{10}	TH法($q=10$)
-0.339	0.160713245($n=11$)	1E-11	0.002256865($n=10$)
-0.239	0.160713245($n=10$)	0.1	#NUM!($n=2$)
-0.139	0.160713245($n=9$)	0.2	#NUM!($n=2$)
-0.039	0.160713245($n=6$)	0.3	#NUM!($n=2$)
0.061	0.160713245($n=4$)	0.4	#NUM!($n=2$)
0.161	0.160713245($n=2$)	0.5	#NUM!($n=2$)
0.261	0.160713245($n=4$)	0.6	#NUM!($n=2$)
0.361	0.160713245($n=4$)	0.7	#NUM!($n=2$)
0.461	0.160713245($n=4$)	0.8	#NUM!($n=2$)
0.561	0.160713245($n=5$)	0.9	#NUM!($n=2$)
0.661	0.160713245($n=5$)	1	#NUM!($n=2$)

例 2.3 $f(x) = -x^5 + 2x^4 + 1 = 0$

これは x, x^2, x^3 の項がない方程式であり, 根 $\alpha \approx 2.056$ である.
 グラフは $x=0$ で極小, この近傍で x 軸と並行, $x=8/5$ で極大
 となり, ここから単調減少して根 α と交わり, 変化が激しい.

N 法と TH 法の収束比較式

$$-1 \leq \left(1 + \frac{f'(2.056)}{f''(2.056)} \frac{1-q}{2.056} \right) q \leq 1$$

を満たす q は, $q=8,9$ である. このとき TH 法が N 法より反復回数が
 少ないか等しい.

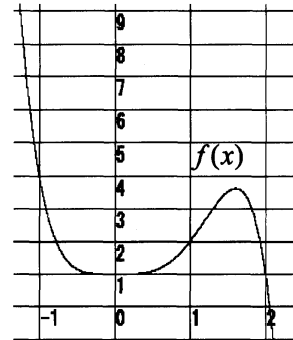
以下の数値計算でこのことを確かめる.

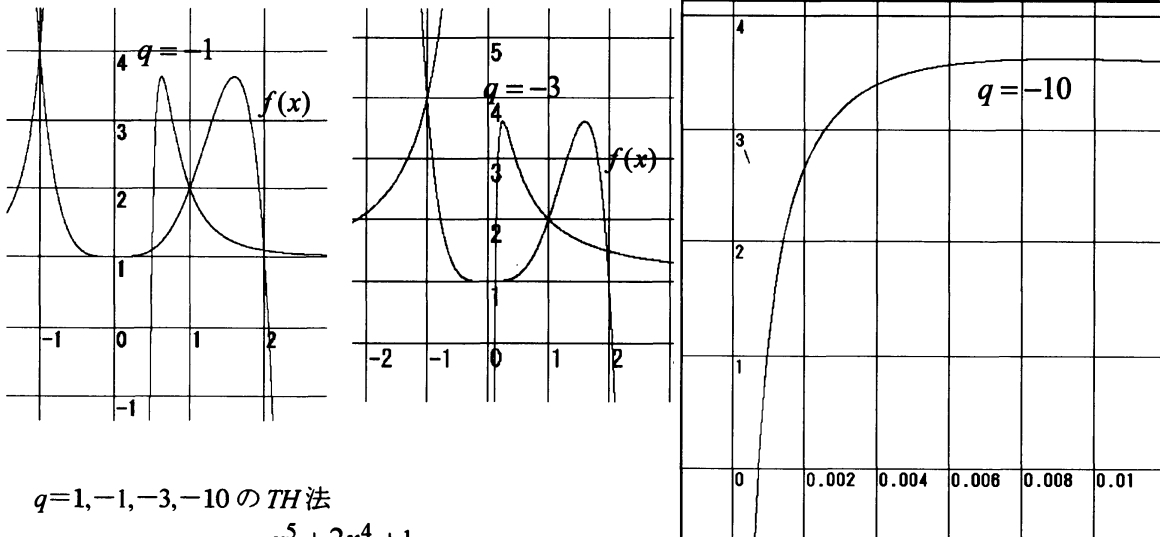
(1) $q=1, -1, -3, -10$

グラフは $q=-1, -3, -10$ のとき, $f(x)$ を変換した $g(x) = -x^{-5} + 2x^{-4} + 1, g(x) = -x^{-5/3} + 2x^{-4/3} + 1,$
 $g(x) = -x^{-1/2} + 2x^{-2/5} + 1$ のグラフである.

$f(x)=0$ の根 $\alpha, q=-1$ の $g(x)=0$ の根 $\alpha^{-1}, q=-3$ の $g(x)=0$ の根 $\alpha^{-3}, q=-10$ の $g(x)=0$ の根 α^{-10}
 における曲率はそれぞれ約 $-0.0093, -0.0028, -0.0024, -8.3E-05$ となり直線に近づく.

$f(x)=0$ の根 $\alpha, q=-1$ の $g(x)=0$ の根 $\alpha^{-1}, q=-3$ の $g(x)=0$ の根 $\alpha^{-3}, q=-10$ の $g(x)=0$ の根 α^{-10}
 における接線の傾きはそれぞれ $-19.8, 83.8, 118, 5498.7$ となり, x 軸と成す角は, 順に大きくなる.





q=1,-1,-3,-10 の TH 法

N法
$$x_{n+1} = x_n - \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^4 + 8x_n^3}$$

q=-1
$$x_{n+1}^{-1} = x_n^{-1} + x_n^{-2} \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^4 + 8x_n^3}$$

$$= x_n^{-1} + \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^6 + 8x_n^5}$$

q=-3
$$x_{n+1}^{-3} = x_n^{-3} + 3x_n^{-4} \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^4 + 8x_n^3}$$

$$= x_n^{-3} + 3 \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^8 + 8x_n^7}$$

q=-10
$$x_{n+1}^{-10} = x_n^{-10} + 10x_n^{-11} \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^4 + 8x_n^3}$$

$$= x_n^{-10} + 10 \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^{15} + 8x_n^{14}}$$

N法と3つの漸化式を絶対初期値で選んだときの計算結果は右表である。収束する場合、N法よりTH法が反復回数が多いか等しい。

例2.3 (1) 相対初期値 f(x)=-x^5+2x^4+1=0

x ₀	ニュートン法	x ₀ ⁻¹	x ⁻¹
1.2	振動	0.833333333	#DIV/0!(n=7)
1.4	2.055967397 (n=24)	0.714285714	#DIV/0!(n=7)
1.6	振動	0.625	#NUM!(n=3)
1.8	2.055967397 (n=6)	0.555555556	0.486389036(n=7)
2	2.055967397 (n=4)	0.5	0.486389036(n=4)
2.2	2.055967397 (n=4)	0.454545455	0.486389036(n=4)
2.4	2.055967397 (n=5)	0.416666667	0.486389036(n=5)
2.6	2.055967397 (n=6)	0.384615385	0.486389036(n=6)
2.8	2.055967397 (n=6)	0.357142857	0.486389036(n=7)

3つの漸化式を絶対初期値で選んだときの計算結果は次表である。

x ₀ ⁻³	x ⁻³	x ₀ ⁻¹⁰	x ⁻¹⁰
0.578703704	#NUM!(n=10)	0.161505583	#DIV/0!(n=18)
0.364431487	#NUM!(n=10)	0.034571613	#NUM!(n=18)
0.244140625	#NUM!(n=5)	0.009094947	#NUM!(n=2)
0.171467764	0.115067143(n=10)	0.002800754	#NUM!(n=2)
0.125	0.115067143(n=4)	0.000976563	0.000741033(n=4)
0.09391435	0.115067143(n=5)	0.000376507	0.000741033(n=5)
0.072337963	0.115067143(n=6)	0.00015772	0.000741033(n=6)
0.056895767	0.115067143(n=6)	7.0838E-05	0.000741033(n=7)
0.045553936	0.115067143(n=7)	3.37613E-05	0.000741033(n=8)

例2.3 (1) 絶対初期値 f(x)=-x^5+2x^4+1=0

x ₀ ⁻¹	x ⁻¹	x ₀ ⁻³	x ⁻³	x ₀ ⁻¹⁰	x ⁻¹⁰
-0.313577924	#DIV/0!(n=13)	-0.685742137	#NUM!(n=11)	1.00E-40	0.000741033(n=84)
-0.113597637	#NUM!(n=18)	-0.484746619	#DIV/0!(n=12)	1.00E-30	0.000741033(n=63)
0.086400553	0.486389036(n=15)	-0.284753608	#DIV/0!(n=13)	1.00E-20	0.000741033(n=42)
0.286450874	0.486389036(n=8)	0.085041051	0.115067143(n=5)	1.00E-10	0.000741033(n=22)
0.485436893	0.486389036(n=3)	0.115061669	0.115067143(n=2)	0.000740916	0.000741033(n=1)
0.686341798	#DIV/0!(n=7)	0.31480962	#NUM!(n=10)	0.201056923	#DIV/0!(n=18)
0.886524823	#DIV/0!(n=7)	0.514465485	#NUM!(n=10)	0.399847568	#NUM!(n=17)
1.086956522	#NUM!(n=6)	0.715607015	#DIV/0!(n=10)	0.602341244	#NUM!(n=17)
1.287001287	#DIV/0!(n=6)	0.915141659	#NUM!(n=9)	0.804435156	#NUM!(n=17)

q=-1,-3,-10 の何れにおいても絶対初期値の範囲が相対初期値の範囲より広くなり、#DIV/0! や #NUM! とエラーが多くなる。すなわち初期値を α⁻¹, α⁻³, α⁻¹⁰ の近くに選ばないと収束しない。相対初期値と絶対初期値でこのような結果になるのは、グラフのx軸との交わる角度はy=f(x)のそれより

$q=-1, -3, -10$ のグラフの方が大きいこと, $x_0^{-1}, x_0^{-3}, x_0^{-10}$ を $\alpha^{-1}, \alpha^{-3}, \alpha^{-10}$ から遠ざかったところを選んでために接線の傾きが 0 に近くなったことが原因と推測される。

(3) $q=2, 3, 8, 9$ の TH 法

$$q=2 \quad x_{n+1}^2 = x_n^2 - 2x_n \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^4 + 8x_n^3} = x_n^2 - 2 \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^3 + 8x_n^2}$$

$$q=3 \quad x_{n+1}^3 = x_n^3 - 3x_n^2 \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^4 + 8x_n^3} = x_n^3 - 3 \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^2 + 8x_n}$$

$$q=8 \quad x_{n+1}^8 = x_n^8 - 8x_n^7 \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^4 + 8x_n^3} = x_n^8 - 8x_n^4 \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n + 8}$$

$$q=9 \quad x_{n+1}^9 = x_n^9 - 9x_n^8 \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n^4 + 8x_n^3} = x_n^9 - 9x_n^5 \frac{-x_n^5 + 2x_n^4 + 1}{-5x_n + 8}$$

表2.3 (3) 相対初期値 $f(x)=-x^5+2x^4+1=0$

x_0	ニュートン法	TH法($q=2$)	TH法($q=3$)	TH法($q=8$)	TH法($q=9$)
0.1	2.055967397($n=54$)	#NUM!($n=2$)	振動	#NUM!($n=2$)	656.3659005($n=15$)
0.5	2.055967397($n=28$)	#NUM!($n=2$)	振動	#NUM!($n=2$)	656.3659005($n=13$)
1	2.055967397($n=45$)	#NUM!($n=2$)	振動	#NUM!($n=2$)	656.3659005($n=9$)
1.5	2.055967397($n=54$)	#NUM!($n=2$)	振動	#NUM!($n=2$)	656.3659005($n=5$)
1.65	2.055967397($n=10$)	4.227001937($n=8$)	8.690578167($n=7$)	319.2491777($n=4$)	656.3659005($n=5$)
1.7	2.055967397($n=8$)	4.227001936($n=7$)	8.690578167($n=6$)	319.2491775($n=4$)	656.3659005($n=4$)
1.8	2.055967397($n=6$)	4.227001939($n=5$)	8.690578167($n=5$)	319.2491775($n=4$)	656.3659005($n=4$)
2	2.055967397($n=4$)	4.227001936($n=4$)	8.690578167($n=4$)	319.2491775($n=3$)	656.3659005($n=3$)

$q=8, 9$ のとき, 収束する場合, N 法より TH 法が反復回数は少なく理論と一致する。特に $q=9$ の場合に収束の様子を調べる。

$x^9 = t$ すなわち $x = t^{1/9}$ により $f(x)$ を変換すると $y = g(t) = f(t^{1/9}) = -t^{5/9} + 2t^{4/9} + 1$ となり,

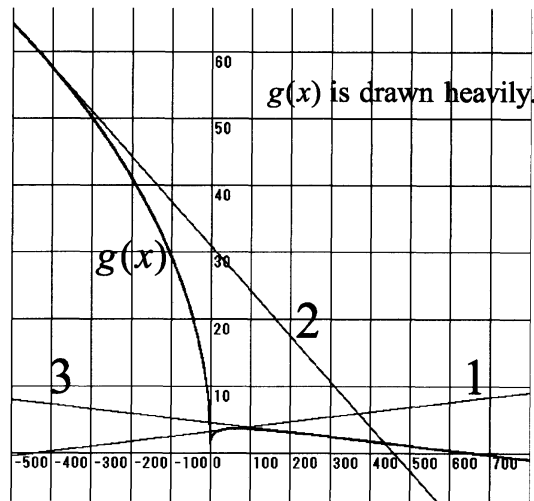
$(t_n, g(t_n))$ に於ける接線は $y = (-\frac{5}{9t_n^{4/9}} + \frac{8}{9t_n^{5/9}})t - (-\frac{5}{9t_n^{4/9}} + \frac{8}{9t_n^{5/9}})t_n + g(t_n)$

となる。初期値が 1.5^9 のとき, 656.3659005 に収束するまでの 9 乗の TH 法と接線の変化は次の表とグラフである。

直線 1, 2, 3 は反復回数 1, 2, 3 のときの接線である。 $f(x)$ のグラフは $x=1.2$ が変曲点であり, $x < 1.2$ で下に凸, $x=0$ で極小となり, この近傍では x 軸と平行に近い。

TH法($q=9$)					
i	x_i	x_i^9	$x_i^9 - 9x_i^8 f(x_i) / f'(x_i)$	接線の傾き	切片
1	1.5	38.44335938	-444.234375	0.007315958	3.25
2	-1.96869813	-444.234375	459.9298761	-0.06704118	30.8342426
3	1.976307982	459.9298761	656.2643436	-0.00693422	4.55068328
4	2.055932049	656.2643436	656.3659	-0.00689579	4.52615939
5	2.055967397	656.3659	656.3659005	-0.00689573	4.52612119
6	2.055967397	656.3659005	656.3659005	-0.00689573	4.52612119

1.2 < x では, 上に凸で $x=1.6$ で極大となる。したがってニュートン法で初期値を 1.5 に選ぶと振動を起こし反復回数が多くなる。9 乗の TH 法のグラフ $g(t)$ は $t=0$ で極小となるが, $f(x)$ のような x 軸に平行に近い部分は存在しない。また $t < 2^9$ で上に凸, $2^9 < t$ で下に凸, $t = 656.3659005$ で t 軸と交わり, この近傍で直線の形状に近くなる。これらのことにより振動が起らず, 単調増加数列となり, 反復回数が少なくなる。



例 2.4 $f(x) = x^2 - 2 = 0$ と $g(x) = 1 - 2/x^2 = 0$ に TH 法を適用し, これらの収束を調べる。

(a) $f(x)$ のときのニュートン法と TH法の収束比較条件式は

$$-1 \leq \left(1 + \frac{f'(\sqrt{2})}{f''(\sqrt{2})} \frac{1-q}{\sqrt{2}}\right) q \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq (2-q)q \leq 1$$

となり, $q=2$ を得る. このとき TH法が N法より収束が速い.

実際に数値計算を行う. その結果は右表であり, 理論と一致する.

(b) $g(x)$ のときのニュートン法と TH法の収束比較条件式は

$$-1 \leq \left(1 + \frac{g'(\sqrt{2})}{g''(\sqrt{2})} \frac{1-q}{\sqrt{2}}\right) q \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{3}(2+q)q \leq 1$$

となる. これを満たす q は, $q=-1, -2, -3$ である.

このとき TH法が N法より収束が速い.

数値計算は右表であり理論と一致する.

例2.4 (a) $f(x)$ のTH法
初期値 $x_0=1.5$

q乗	反復回数 n
-5~-1	4
1	3
2	1
3	3
4	3
5, 6, 7	4

例2.4 (b) $g(x)$ のTH法 初期値 $x_0=1.5$

q乗	反復回数 n	q乗	反復回数 n
-10~-5	4	1~5	4
-4,-3	3	10	5
-2	1		
-1	3		

(c) $f(x)=x^2-2=0$ と $g(x)=1-2/x^2=0$ の TH法の収束比較条件式(3.6)は

$$-\left| \frac{2^{\frac{r-1}{2}}}{2^{\frac{q-1}{2}}} \right| \leq \frac{\left(\frac{f''(\sqrt{2})}{f'(\sqrt{2})} + \frac{1-q}{\sqrt{2}} \right) |q|}{\left(\frac{g''(\sqrt{2})}{g'(\sqrt{2})} + \frac{1-r}{\sqrt{2}} \right) |r|} \leq \left| \frac{2^{\frac{r-1}{2}}}{2^{\frac{q-1}{2}}} \right|$$

となり, このとき $f(x)$ の q 乗の TH法が $g(x)$ の r 乗の TH法より収束が速いか, 等しい.

例えば $q=1$ に固定すると

$$-|2^{\frac{r-1}{2}}| \leq \frac{1}{(-2-r)|r|} \leq |2^{\frac{r-1}{2}}|$$

となる. この条件を満たす範囲を数値計算から求めると, $-13 \leq r \leq -4$ or $1 \leq r$ となる.

数値計算(a),(b)の表は理論と一致する.

これまでの考察より絶対初期値に関して以下の性質 1,2 が判る.

性質 1 $q(>1)$ のとき $1 \leq |\alpha|$ なら $1 \leq |\alpha^q|$ となる. ここで $q(>1)$ が適当に大きい整数のとき, $y=g(x)$ の x 軸と成す角 $< y=f(x)$ の x 軸と成す角となり, $y=g(x)$ の $x=\alpha^q$ の近傍は $y=f(x)$ の $x=\alpha$ の近傍より直線に近くなる. この場合, 絶対初期値を選んだ場合, N法が α に収束する反復回数より q 乗の TH法が α^q に収束する反復回数の方が少なくなる.

性質 2 $q(<-1)$ のとき $|\alpha| \leq 1$ なら $1 \leq |\alpha^q|$ となる. ここで q が適当に小さい整数のとき, $y=g(x)$ の x 軸と成す角 $< y=f(x)$ の x 軸と成す角となり, $y=g(x)$ の $x=\alpha^q$ の近傍は $y=f(x)$ の $x=\alpha$ の近傍より直線に近くなる. この場合, 絶対初期値を選んだ場合, N法が α に収束する反復回数より q 乗の TH法が α^q に収束する反復回数の方が少なくなる.

参考文献

[1] 村瀬義益著・西田知己校注:『算法勿憚改』,研成社,1993
 [2] 鈴木武雄:『和算の成立』,恒星社厚生閣,2007.7
 [3] 長田直樹:お話:数値解析第10回 非線型方程式(前編)
<http://www.cis.twcu.ac.jp/~osada/rikei/rikei2009-03.pdf>
 [4] 永坂秀子:『計算機と数値解析』,朝倉書店,1980.3
 [5] 戸川隼人:『数値計算法』,コロナ社,1981.1
 [6] 堀口俊二:土倉・堀口法について,日本数学会2011年会,応用数学分科会講演アブストラクト
 [7] 堀口俊二:ニュートン法と土倉・堀口法の数値計算,日本数学会2011年会,応用数学分科会講演アブストラクト