数理解析研究所講究録
第 1787 巻 2012 年 291-303

数概念に関する 18 世紀の展開

足立恒雄（早稲田大学名誉教授）

数概念に関する 18 世紀の展開をニュートン、オイラー、コーシーという三人の大数学者に代表してもらうことにする。

1　ニュートン（1642-1727）

「増加、あるいは減少するものは量であり、数とは量の比である」というオイラーの言葉はとても有名で、明治時代の日本の教科書にすらこれが紹介されているほどである。しかしこの言葉は実は歴史上すでに何度か使われてきた常套句であり、バロウやニュートンによっても述べられていることが指摘されてきた。またステヴィンも内容的には同じことを言っている。

ホワイトサイド編集の “The Mathematical Papers of Isaac Newton” のおかげでニュートンの著作が多くの場合英訳付きで読むことができるようになった。以下に、『普遍算術』の一節を引用してみよう。ホワイトサイドの英訳はちょっと現代的

すぎる匂いを感じるので、ニュートンが自著として承認したのではないが、ニュートンの著作として世間に出回った（事実、講義の草稿としてニュートンがケンブリッジ大学に提出したものである）“Arithmetica Universalis”の英訳 (1720) も参考にする。

数によってわれわれは単位の多数性と理解しているが、むしろ単位として採られた同種の量に対して抽出された比として捉える方が良いだろう。このように見たとき、数には3種類あると言える：整数（自然数のこと－足立注)、分数、無理数 (surd) がこれである。整数は単位によって計られるものであり、分数は単位の部分によって計られるものであり、無理数は単位とは非共測 (incommensurable) なものである。

（中略：この後に10進法の説明が続く。ただし小数は有限小数のみで、無限小数の説明はない。）

量は肯定的であるか、すなわち零より大きいか、あるいは否定的である、すなわち零より小さい。かくして人間の事柄で言えば、所有は肯定的利益であると呼ばれ得るし、負債は否定的利益である。運動においてもそうである:前進は肯定的運動と呼ばれ得るし、後退は否定的運動と呼ばれ得る。というのも、前者は成される道を増大させるが、後者は減少させるからである。幾何学にお

いても、ある方角に前進している運動で描かれる線は肯定的であり、反対方向に後退して引かれる線は否定的であるとされる。たとえば、AB が右方向に引かれ、BC が左方向に引かれ、AB が肯定的と定められるならば、BC は否定的とみなされる。なぜならそれが引かれるときには AB を減じて、より短い AC を得るからである。

（中略：この後正の量には＋符号を付して表し、負の量には − 符号を付して表すこと、そしてそれらの加法が説明される。）

二つ、あるいはそれ以上の変数が連続して書かれるならば、それはこれらの積、すなわちこれらを順番にすべてかけ合わせることを意味する。したがって、ab あるいは ba（というのは、これらは順序にかかわりなく同じものである）は b に a を掛けることから生じる量を表す。（“Arithmetica Universalis”: 1720）

実数と量との関係については、数学の完全な独立が確立される以前としてはほぼ完成されていると言えるのではないだろうか。さすがニュートンと言うべきであろう。これに無限小数の解説があって、数とは無限小数のことだという主張でも付いていれば完璧である。（無限小数についてだれが最初に完全な解説をしたのか私は寡聞にして知らない。）ニュートンも負数の扱いには初期にはぎこちなかったが、数学の研究が進むにつれ

て自在に扱えるようになっていったようである。上記のように、負数を「逆向き」と捉える考え方は西洋世界ではニュートンが最初に表明したのではないかと見られている。

バロウは著書『幾何学講義』の序文において、時刻は線上の点と正確に対応すると述べている。バロウの弟子であるニュートンは、時間は量であると明確に述べている。またニュートンは曲線を経過時間との関連で捉え、時間をパラメータとして表された関数を曲線とみなしている。しかし、時点を点として捉えるというバロウの考え方からは少し後退したような印象を受ける。おそらくはニュートンは直線や時間が点（時点）から成り立つというような考え方から生じる難点に対する警戒心があったからではないだろうか。

2　オイラー (1707-1783)

量を論じたオイラーの『代数学入門』（1770）は大変有名で、これまで限りない回数引用されているが、ここでもこの引用から始めよう：

> 1. 増加、あるいは減少する可能性のあるものは何であれ、量 (magnitude,quantity) と呼ばれる。
> 金額は、増加させたり、減少させたりできるから、したがって量 (quantity) である。重量その他この

ような性質のものについても同様である。

2. この定義から、異なる種類の量 (magnitude) は数え上げるのがとても困難なほど多岐にわたるということは明らかである。この故に数学に異なった分野があり、それぞれが固有の量（magnitude）に充てられるのである。一般的に言って、数学は量の科学 (science of quantity) である。すなわち、量を測る手段を探求する科学である。
3. さて、どんな量でも、他の同種の量が知られていて、お互いの関係を指摘するのでなければ、測ることも決定することもできない。たとえば、お金の量（quantity）を決定するように求められたとするなら、ルイ、クラウン、ダカットなどの既知のお金の単位を採り、与えられたお金にこの単位がどれだけ含まれているかを示さねばならない。同様に、重量の量 (quantity) を決定するように求められたなら、一定の既知の量、たとえばパウンド、オンス等を採り、この基準の重さが確定しようとしている物の中にどれだけ含まれているかを示さねばならない。もし長さか何かを測りたいというなら、フィートといった既知の長さを利用することになろう。
4. したがってあらゆる種類の量（magnitude）の決定、ないし測定は以下に帰される：決定さるべき量

(magnitude) と同一種のものから任意に既知の量 (magnitude) を決め、それを尺度、すなわち単位と考える：そして要求された量 (magnitude) のこの尺度に対する比を決定する。この比はつねに数によって表される。ゆえに数とは一つの量 (magnitude) の、単位として採られた他の任意に選ばれた量に対する比以外の何物でもない。

5. 以上のことから、すべての量 (magnitude) は数によって表されるということがわかる。そしてすべての数理科学分野の基礎は異なった種類の方法の計算の精査の元に数の科学の上に据えられねばならない。

   数学のこの基本的な部門は解析、あるいは代数と呼ばれる。

6. 代数では、もっぱら数を考察するが、ここでは数は量を表し、異なる種類の量を考慮することはない。これは数学の他の分野の主題である。

7. 算術はとりわけ数について論ずるので、正しくも「数の学問」と呼ばれている。しかしこの学問はある種の決まった分野の計算法にのみ言及する。これとは逆に、代数は一般に数の教義や計算に存在し得るすべての場合を包含する。(『代数学入門』: 1770)

その後負数が導入されるが、量を中心に考えているため、負数には負債といった別の動機付けが必要となる。さらに

$$(-a)(-b) = ab$$

の説明は、$(-a) \cdot b = -ab$ なのだから $(-a)(-b) = -ab$ ではおかしなことになるので、$+ab$ でなければならないということである。

こうやってみて行くと、後の方で高度な問題が解かれている割には基礎的、或いは初等的命題に関する証明技術は素朴であるという印象を受ける。基礎的な命題に対する、もっと言うなら集合論を始めとする数学の基礎の発展がどんなに飛躍的なものだったかよくわかるだろう。

要約すると、算法の論理的基礎付けというのは先端の数学が十分の発達を見せてから遅ればせながら 20 世紀になって確立されたのである。

なお、オイラーは『代数学』に先立って、『無限解析入門第 II 巻』(1748) の冒頭で数直線について次のように説明している：

> 1. 変量 (variable quantity) は一般的に考えられた量 (magnitude) である。そのゆえに変量はすべての定量を含む。幾何学におけると同様、図のように、変量は不定の長さを持つ直線 RS によって表すのが大変便利である。不定の長さの直線から任意

の定量（determined magnitude）を切り取ることができるので、直線は心の中で変量と関連付けることができる。まず直線 RS 上の点 A を選び、定量 (determined quantity) に対して A に始まるその量 (magnitude) の区間を対応させる。かくして直線上の一定部分 AP が変量に含まれている定値を表す。

2. x を直線 RS で表される変量とせよ。そうすれば、x の現実の定値は直線 RS の区間によって表され得ることは明らかである。たとえば、P が点 A と一致するならば、区間 AP は消えてしまい、$x = 0$ という値を表す。点 P が A から遠去かるに従い、区間 AP で表される x の定値は大きくなる。
   区間 AP は横座標 (abscissa) と呼ばれる。横座標は x の定値を示している。
3. 直線 RS は A から双方向にいくらでも延びているから、x の正負の値がともに表せる。A の右方向へ区間を切り取ることによって x の正の値を表し、A の左方向へ区間を切り取ることによって、負の値を表す。A から右方向に点 P が遠ざかるに従って区間 AP によって表される x の値は大きくなるが、一方点 P が左方向に遠ざかるに従って x の値は減少する。P が A と一致するなら、x の値は 0 である。このため、P が左方へ動かされるならば、x の値は

> 0より小さい、すなわち負であり、Aから右方へ切り取られた区間APはxの正の値を割り当てられる。どちらの方角がxの正の値を表すかの選択は任意であるが、どちらかの方向が選ばれたなら、反対の方向はxの負の値を表す。

この後、xの関数$y = f(x)$の値を直線RSの垂直方向に採ることによって、曲線を描くことができるという説明が続く。

縦軸は当初は選ばれない（これはデカルトと同じ)。そのうち、正負が入れ替わる点、あるいは漸近線などが適宜縦軸に選ばれる。曲線より前に（要するに対象となる関数が与えられないうちから）xy座標系を設定するという考え方はまだない。

座標(x, y)という考え方は19世紀に教科書に現れたのが最初であるとカジョリは述べている。

直線の一部分ＡＰが定量を表す。$\cdots$ 直線は双方向に限りなく伸びているので、正負の値が表現できる。おそらくはこれが公刊された著作の中で直線上の点と数との対応を説明した最初の文献なのではないかと思われる。

オイラーのこの本の段階になると次元の統一というような思想はかけらも残っていないし、量というのも数とほとんど同じ扱いを受けるようになっている。オイラーの実数は線分の長さを1文字で表したものということになる。これは幾何学的直観（即ち量の概念）に頼る限り避けがたい。これは単に基礎の説

明をするときに、便宜上線分を持ち出すというだけのことで、オイラーの段階で現代の中学での数学とほとんど変わらないレベルに達したと言えるだろう。

3　コーシー（1789-1857）

われわれはまず「数」および「量」の二語に割り当てるにはどのような考えがふさわしいかを示すことにしよう。

われわれはこれまでと同様に「数」の名称は算術においてこれを用いる意味で捉えることにしよう。大きさの絶対的な（向きを考えない、の意：足立注）測定から「数」は生じるのである。そして「量」の名称は、「正」、ないしは「負」の「実量」、すなわち＋あるいは－の符号に先立たれた数にのみ適用しよう。

さらにわれわれは、量を増大、もしくは減少を表すためにも使われるものとみなそう。そうすることによって、その大きさを、単位として捉えられた同種の別の大きさと比較するだけでよしとするのであるならば、与えられた任意の大きさは単に一つの数によって示されることになるし、そしてまた、同種の大きさからの増代もしくは減少に用いられるべきものと考えるなら、＋の符号または－の符号に先立たれた数によって示されること

になる。

そのように仮定するなら、ある数の前に置かれる＋、あるいは − の符号は、あたかも形容詞が名詞の意味を限定するのほぼ同様に、その数の意味を限定するのである。ある量の基礎をなす数を、その量の「数値」と呼び、同じ数値で同じ符号を持つ量を「等」量、そして数値においては等しいが相反する符号を付与された二つの量を互いに「反対」量と呼ぶことになるだろう。

以上の原則から出発するならば、さまざまな量に対して科しうる多様な計算を説明することは容易である。(『解析教程』:1821)

ニュートンの記述からほとんど変化がない。

量という言葉で（正負の）実数をあらわし、正実数のことを数と読んでいると読み取るのが正しい。そうでなければ、量の積についてやっかいな議論をしなければならなくなるはずだが、そういうことは一切気にしていないらしいからである。したがってこの後コーシーが「定量」、「変量」と呼んでいるものは、現代的に言えば、一貫して「定数」であり、「変数」のことである。だからといって、『微分積分学要論』（1823）のように「定数」、「変数」と翻訳してしまって良いのかどうかは別問題である。

そうするとコーシーの書いていることは「あまりにも幼稚ではないか！」ということになりかねないが、実際その通りなのではなかろうか。著書の中で扱われている数学は目の覚めるように近代的だが、基礎に対する杜撰さは、オイラーでも感じられたのだが、コーシーになると一段と目立っている。それだけ数学の世界が「量」や「負数」の概念の呪縛から脱して、当然のこととして取り扱われるようになったということなのだろう。「幼稚」ということは、それだけ抱える問題について何の気兼ねもなく、気にもせず、実数を自由に使えるようになったということでもある。その厳密性については新たな見地からの研究が必要となってくるのである。

先に引用した箇所の後に「無理数」の定義を述べている箇所が続く：

> 無理数はその値にだんだんに近付いていく近似的分数（＝有理数─足立注）の列の極限である。

ここには有理数だけで実数を説明しようという明確な意図を読み取ることができる。カジョリが「コーシーとともに算術化（arithmetization）の進展が始まったのである」と書いているのは妥当な指摘であろう。しかしこれもカジョリが書いている通り、「どうしてその極限が存在すると言えるのか」についての考察は一切ない。やはりまだ大いに直線の直観的イメージに頼っていることは明らかである。

「算術化の進展」とは数学の厳密な基礎付けへの志向であり、同時にそれは数学の独立運動でもあった。この欲求は、カジョリによれば、非ユークリッド幾何学の出現に関係しているのだそうである。言われてみれば確かに、幾何学的イメージというのが一意絶対のものではないということになれば、絶対的な真理の拠り所としていわゆる「幾何学」を当てにすることはできないことになるからである。