数理解析研究所講究録
第 1793 巻 2012 年 1-4

解析的既約曲線に付随する半群の計算アルゴリズム

渋田 敬史 (Takafumi Shibuta)
立教大学 (Rikkyo University)/JST CREST

1 はじめに

K を任意の代数閉体, $K[\![\boldsymbol{x}]\!] = K[\![x_1,\ldots,x_r]\!]$ を K 上の形式べき級数環とする. $\mathfrak{p}$ を $K[\![\boldsymbol{x}]\!]$ の 1 次元素イデアルで, 任意の i に対して $x_i \notin \mathfrak{p}$ となるものとし, $A = K[\![\boldsymbol{x}]\!]/\mathfrak{p}$ とする. $\mathfrak{p}$ が多項式生成の場合や, $K = \mathbb{C}$ で $\mathfrak{p}$ が収束べき級数で生成されている場合, A は曲線の原点での特異点を表している環と思うことができる. K を係数体に持つ一次元完備局所ネター整域 A は必ず剰余環 $K[\![\boldsymbol{x}]\!]/\mathfrak{p}$ と表現できる. また, A の整閉包は一変数べき級数環 $K[\![t]\!]$ と同型なので, A を $K[\![t]\!]$ の部分環 $A \cong K[\![\xi_1(t),\ldots,\xi_r(t)]\!]$, $\xi_i(t) \in K[\![t]\!]$, としても表現できる. この二つの表現は曲線を方程式系の零点として表現する事と, 一変数パラメタ付けを与えることで表現することにそれぞれ対応している. K を係数体に持つ一次元完備局所ネター整域 A に対し,

$$\mathrm{S}(A) := \{\dim_K(A/\eta) \mid 0 \neq \eta \in A\}$$

と定義し, A の *semigroup of values* と呼ぶ. $\mathrm{S}(A)$ は A の特異点と密接な関係があることが知られている. Kunz [2] は, A が Gorenstein であることと, $\mathrm{S}(A)$ が対称 (symmetric) であることが同値であることを示した. ここで, 半群 $H \subset \mathbb{N}$, $\gcd(H) = 1$, が対称とは, $m = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \mathbb{N}\}$ と置いたとき, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $n \in H \Leftrightarrow m - n \notin H$ が成立するときをいう. また, 複素解析的な平面曲線 $C = \mathbb{C}[\![x,y]\!]/\langle F(x,y)\rangle$ ($F(x,y)$ は原点で絶対収束する既約なべき級数) の場合は, $S(A)$ は位相幾何的な不変量になっていることが知られている. 十分小さい $0 < \varepsilon \ll 1$ に対し, $S_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon\}$, $C_\varepsilon := \{F(x,y) = 0\} \cap S_\varepsilon$ を考えると, S_ε は 3 次元球面と同相で, C_ε は S_ε 内の結び目となる. 二つの複素解析的な平面曲線 $C^{(1)}, C^{(2)}$ と $0 < \varepsilon \ll 1$ に対し, $C^{(1)}_\varepsilon \hookrightarrow S_\varepsilon$ と $C^{(2)}_\varepsilon \hookrightarrow S_\varepsilon$ が同位 (isotopic) であることと $S(C^{(1)}) = S(C^{(2)})$ であることが同値であることが知られている.

平面曲線 $\mathbb{C}[\![x,y]\!]/\langle F(x,y)\rangle$ の場合は, $S(A)$ は特異点解消や, F の Puiseux expansion を使って計算できることが知られている. 一般の余次元と K に対しては, Hefez–Hernandes [1] が, $\mathrm{S}(A)$ を計算するアルゴリズムを A が $K[\![t]\!]$ の部分環として表されている場合に与え, そのアルゴリズムを A が形式べき級数環の剰余環として表されている場合に適用する方法を与えた. 本文では, A が形式べき級数環の剰余環 $K[\![\boldsymbol{x}]\!]/\mathfrak{p}$ と表されている場合に $\mathrm{S}(A)$ を計算するより効率的なアルゴリズムを与える.

2 Semigroup of values

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ を 0 を含む自然数の集合, $\mathbb{N}_+ = \{1,2,3,\dots\}$ を正の自然数の集合とする. 変数 $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_r)$ と多重指数 $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_r)$ に対し, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}} = x_1^{a_1}\cdots x_r^{a_r}$ と書く.

$\mathfrak{p}$ を $K[\![\boldsymbol{x}]\!]$ の 1 次元素イデアルとし, $A = K[\![\boldsymbol{x}]\!]/\mathfrak{p}$ とする. $f \in K[\![\boldsymbol{x}]\!]$ と $\mathfrak{p}$ の局所交点数を $\mathrm{int}(f;\mathfrak{p}) = \dim_K K[\![\boldsymbol{x}]\!]/\langle \mathfrak{p}, f\rangle$ で定義すると,

$$\mathrm{S}(A) = \{\mathrm{int}(f,\mathfrak{p}) \mid f \in K[\![\boldsymbol{x}]\!], f \notin \mathfrak{p}\}$$

となる.

定義 2.1. 重みベクトル $\boldsymbol{w} = (w_1,\dots,w_r) \in \mathbb{N}_+^r$ と形式べき級数 $0 \neq f = \sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{N}^r} c_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}} \in K[\![\boldsymbol{x}]\!]$, $c_{\boldsymbol{a}} \in K$, に対し,

$$\mathrm{ord}_{\boldsymbol{w}}(f) = \min\{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a} \mid c_{\boldsymbol{a}} \neq 0\} \in \mathbb{N}$$

を f の $\boldsymbol{w}$ に関する **オーダー** *(order)* と呼び,

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(f) = \sum_{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a}=\mathrm{ord}_{\boldsymbol{w}}(f)} c_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}} \in K[\boldsymbol{x}].$$

を f の $\boldsymbol{w}$ に関する**イニシャル形式** *(initial form)* と呼ぶ. $\mathrm{ord}_{\boldsymbol{w}}(0) = \infty$, $\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(0) = 0$ とする. イデアル $I \subset K[\![\boldsymbol{x}]\!]$ に対し,

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(I) = \langle \mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(f) \mid f \in I\rangle \subset K[\boldsymbol{x}]$$

を I の $\boldsymbol{w}$ に関する イニシャルイデアル *(initial ideal)* と呼ぶ.

以下, $\boldsymbol{w} = (w_1,\dots,w_r)$, $w_i = \mathrm{int}(x_i;\mathfrak{p})$ とする. $\mathrm{S}(A)$ は $w_1,\dots,w_r$ で生成される半群 $\langle w_1,\dots,w_r\rangle$ を含むが, 一般には等号 $\mathrm{S}(A) = \langle w_1,\dots,w_r\rangle$ は成立しない.

定理 2.2 ([3]). (i) ある $\alpha_1,\dots,\alpha_r \in K^\times$ が存在し,

$$\sqrt{\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})} = \mathrm{Ker}\Big(K[\boldsymbol{x}] \to K[t], x_i \mapsto \alpha_i t^{w_i}\Big).$$

(ii) $\mathrm{S}(A) = \langle w_1,\dots,w_r\rangle$ となるには, $\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p}) = \sqrt{\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})}$ となることが必要十分.

$\mathrm{S}(A) \neq \langle w_1,\dots,w_r\rangle$ のとき, $\mathrm{int}(f;\mathfrak{p}) \in \mathrm{S}(A)\setminus\langle w_1,\dots,w_r\rangle$ となる $f \in K[\![\boldsymbol{x}]\!]$ が存在するが, このような f は次のようにして取ってくることができる.

補題 2.3. $\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p}) \neq \sqrt{\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})}$ とする. 二項式 $f_0 \in \sqrt{\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})}\setminus \mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})$ を取る. このとき, $\ell \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{c}_i \in \mathbb{N}^r$, $\alpha_i \in K^\times$ *($1 \leq i \leq \ell$)* が存在して, $\mathrm{int}(f_i;\mathfrak{p}) = \boldsymbol{c}_i\cdot\boldsymbol{w} < \mathrm{int}(f_{i+1};\mathfrak{p})$, $\mathrm{int}(f_\ell;\mathfrak{p}) \notin \langle w_1,\dots,w_r\rangle$ *(ただし $f_i = f_{i-1} - \alpha_i\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{c}_i}$)* が成り立つ.

$\mathbb{N}$ の部分半群たちの間には, 包含関係に関して昇鎖律が成立する.

補題 2.4. $H_1 \subset H_2 \subset \cdots$ を $\mathbb{N}$ の部分半群の無限昇鎖とすると, ある i が存在し, $j \geq i$ に対し $H_j = H_i$ となる.

アルゴリズム 2.5 ([3]). $\mathfrak{p}$ を $K[\![\boldsymbol{x}]\!]$ の 1 次元素イデアルで, 任意の i に対して $x_i \notin \mathfrak{p}$ となるものとし, $A = K[\![\boldsymbol{x}]\!]/\mathfrak{p}$ とする. 以下の手順で $\mathrm{S}(A)$ を計算することができる.

(1) $\boldsymbol{w} := (w_1, \ldots, w_r)$, $w_i := \mathrm{int}(x_i; \mathfrak{p})$.

(2) $\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p}) = \sqrt{\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})}$ となるまで, 以下を繰り返す.

- $\mathrm{int}(g; \mathfrak{p}) \notin \langle w_1, \ldots, w_r \rangle$ となる $g \in K[\![\boldsymbol{x}]\!]$ を 補題 2.3 のように取る.
- $\mathfrak{p}$ を $\langle \mathfrak{p}, x_{r+1} - g \rangle \subset K[\![x_1, \ldots, x_{r+1}]\!]$ に置き換える.
- $R := K[\![x_1, \ldots, x_{r+1}]\!]$, $w_{r+1} := \mathrm{int}(g; \mathfrak{p})$, $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}) \in \mathbb{N}^{r+1}$, $r := r+1$,

(3) いつしか $\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p}) = \sqrt{\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})}$, が成り立ち, $\mathrm{S}(A) = \langle w_1, \ldots, w_r \rangle$ となる.

このアルゴリズムは, Hefez–Hernandes のアルゴリズムに, 定理 を組み込んだものといえる. さらに, 計算が終了した時点で, $\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})$ は素イデアルとなっている. 一般に, イデアル $I \subset K[\![\boldsymbol{x}]\!]$ と重みベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{N}_+^r$ に対し, $\mathrm{in}_{\boldsymbol{v}}(I)$ が素イデアルなら I も素イデアルであることが知られている. よって, Algorithm 2.5 を $\mathfrak{p}$ の素イデアル性を証明するのにも使える.

注意 2.6. 根基イデアルの計算は一般には計算量が大きいが, $\sqrt{\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})}$ は 定理 2 (i) のように特別な形をしているので, これを利用した計算方法がある. まず, 何かひとつ零点 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in V_K(\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p}))$, $\alpha_i \neq 0$, を見つけることができれば,

$$\sqrt{\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})} = \mathrm{Ker}\Big(K[\boldsymbol{x}] \to K[t], x_i \mapsto \alpha_i t^{w_i}\Big)$$

となる. また, $\{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}_1} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_1}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}_\ell} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_\ell}\}$ を, トーリックイデアル $\mathrm{Ker}\Big(K[\boldsymbol{x}] \to K[t], x_i \mapsto t^{w_i}\Big)$ の生成系とする. このとき $\beta_i \in K^\times$, $1 \le i \le \ell$, が存在し, $\{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}_1} - \beta_1 \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_1}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}_\ell} - \beta_\ell \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_\ell}\}$ が $\sqrt{\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})}$ の生成系となる. この β_i は次の同値な条件を満たす唯一の元である:

(1) $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}_i} - \beta_i \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_i} \in \sqrt{\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})}$.

(2) $x_j \notin \sqrt{\langle \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}_i} - \beta_i \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_i}, \mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p}) \rangle}$ for some (any) j.

(3) $\mathrm{int}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}_i} - \beta_i \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_i}; \mathfrak{p}) > \mathrm{int}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}_i}; \mathfrak{p})$ ([1] before Example 3.4).

条件 (2) を用いると, 新しい変数 s, t を導入し, $\langle 1 - tx_1, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}_i} - s\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_i}, \mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p}) \rangle \cap K[s]$ の生成元 $p(s)$ を考えると, β_i は $p(s)$ の根となる.

例 2.7. $\mathfrak{p} = \langle x^3 - z^2 + x^4yz, (y^2 - xz)^2 - x^2y^5z^3 \rangle \subset K[\![x, y, z]\!]$ とする. $\mathrm{int}(x; \mathfrak{p}) = 8$, $\mathrm{int}(y; \mathfrak{p}) = 10$, $\mathrm{int}(z; \mathfrak{p}) = 12$ である. $\boldsymbol{w} = (8, 10, 12)$ とおくと, $\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p}) = \langle x^3 - z^2, (y^2 - xz)^2 \rangle$. $y^2 - xz \in \sqrt{\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})} \setminus \mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(\mathfrak{p})$ をとると, $\mathrm{int}(y^2 - xz; \mathfrak{p}) = 51 \notin \langle 8, 10, 12 \rangle$. $\mathfrak{p}' = \langle \mathfrak{p}, u - (y^2 - xz) \rangle \subset K[\![x, y, z, u]\!]$ とおくと, $\mathrm{int}(x; \mathfrak{p}') = 8$, $\mathrm{int}(y; \mathfrak{p}') = 10$, $\mathrm{int}(z; \mathfrak{p}') = 12$, $\mathrm{int}(u; \mathfrak{p}') = 51$. $\boldsymbol{w}' = (8, 10, 12, 51)$ とおくと, $\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}'}(\mathfrak{p}') = \langle x^3 - z^2, u^2 - x^2y^5z^2, y^2 - xz \rangle$ は K-代数準同型 $K[x, y, z, u] \to K[t]$, $x \mapsto t^8$, $y \mapsto t^{10}$, $z \mapsto t^{12}$, $u \mapsto t^{51}$ の核であり, 素イデアル. 特に $\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}'}(\mathfrak{p}') = \sqrt{\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}'}(\mathfrak{p}')}$ であり, $\mathrm{S}(K[\![x, y, z]\!]/\mathfrak{p}) = \mathrm{S}(K[\![x, y, z, u]\!]/\mathfrak{p}') = \langle 8, 10, 12, 51 \rangle$.

参考文献

[1] A. Hefez, M.E. Hernandes, Standard bases for local rings of branches and their modules of differentials, J. Symb. Comp. **42** (2007), 178–191.

[2] E. Kunz, The value-semigroup of a one dimensional Gorenstein ring, Proc. Amer. Math. Soc. **25**, (1970), 748-751.

[3] T. Shibuta, Irreducibility criterion for algebroid curves, preprint, to appear in Mathematics of Computation.

[4] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, Univ. Lecture Ser., vol. 8, Amer.Math. Soc., Providence, 1996.