数理解析研究所講究録
第 1799 巻 2012 年 44-48

2011 年度冬の LA シンポジウム [8]

合同な四角形による球面タイリングの分類

赤間陽二* 坂野 雄大† 中村 公亮 ‡

平成 24 年 3 月 19 日

1 はじめに

球面タイリングは, 世界で流行しつつある日本の伝統工芸である手毬の模様として見ることができる [1]. アルキメデス多面体・アルキメデスタイリングという名があるように, 多面体や多角形によるタイリングの研究は 2000 年前に終わっていると考える人間もいる. しかし, 決して狭く完結してはない. 生体分子のみならず金属がつくるクラスタとしての離散幾何的構造は, 研究が必要と思われる [13].

球面は定曲率の曲面の一つであり, その他の定曲率の曲面は, 平面と双曲面である. それらの曲面の上での, 合同な凸な多角形の辺に関してその多角形を折り返して, タイリングができるか否かは, 単純逆数条件として調べられている [Poincaré]. 平面的な 3-連結なグラフの "convex embedding" がまた, 定曲率の曲面のタイリング全てを表す Delaney-Dress 記号 [8, 9, 11] がある.

著者は合同な四角形による球面タイリングの分類の研究を行っているが [1, 2, 3], 合同な凹な四角形による球面タイリングは直観に反するものがある [1, 2] ので, 計算機で合同な凹な四角形による球面タイリングを列挙したい.

ベルギーの Ghent 大学の Department of Applied Mathematics and Computer Science の Gunnar Brinkmann のグループは, Australian National University の Research School of Computer Science の Brendan McKay とともに化学へのグラフ理論の応用を研究している. 彼らが開発したプログラム `plantri` [5, 6] は球面の四角形分割 (すなわち球面に埋め込める graph で面が全て四角形であるもの) を列挙できる. 第一著者は Brinkmann のグループを訪問し, 冬の LA で発表した内容に以下の命題 1 を加えたものを "Classification of spherical tilings by congruent quadrangles" として 2 月 14 日に発表し, 彼らと討論した. 討論の内容と, 彼らが開発したグラフ理論教育支援ソフトウェアについて報告し, 合同な四角形による球面タイリングの分類に有用な予想などを提示する.

2 合同な四角形による球面タイリングの列挙戦略

球面の四角形分割の map を, Gunnar Brinkmann と Brendan McKay [2]らが開発したプログラム `plantri` [6] で列挙する. プログラム `plantri` は, (合同な図形に埋め込めるという意味で) 同型なグラフを棄却する方法として, McKay の *canonical construction path method* [14] ([12] では canonical augmentation と呼ばれている) を用いている [3].

彼らに著者の "Classification of spherical tilings by congruent quadrangles" を説明したところ, まず定曲率の曲面のタイリング全てを表す Delaney-Dress 記号 [8, 9, 11] を紹介された. 球面の時は若干取扱が特別になっている. Delaney-Dress 記号は, flag の

*東北大学大学院理学研究科数学専攻
†国際協力機構
‡東北大学理学研究科化学専攻
[1] http://www.temari.com

[2] McKay は Ramsey 数のいくつかを計算した. $R(4,5)=25$ [16], $R(3,8)=28$ [15] を証明した

[3] Brinkmann によると, McKay の方法を特殊化したものが福田先生の逆探索法とのことである

概念に基づいて辺に関する折り返しなどを群を用いて記述し，タイリングの対称型の議論がしやすいそうだ．

彼らは，合同な四角形による球面タイリングを列挙するにあたり，そのタイリングのグラフの次数の種類の個数があらかじめ分かっていれば効率的に列挙できる (表 1 参照) ことに注目した．

面数	1	2	3	4	5	6
6	1					
8	0	1				
10	0	3				
12	0	7	5			
14	0	11	43	10		
16	0	13	298	199		
18	0	46	1937	2981	182	
20	0	33	13792	38715	6242	
22	0	103	100691	474123	141059	631

表 1: 球面の 4 角形分割の map を，異なる次数の個数で分類した結果．表側は面数．表頭は異なる次数の個数．Van Cleemput 氏による計算

そこで第一著者は次を予想した:

予想 1 合同な四角形による球面タイリングのグラフにおいては，異なる次数の個数は高々*3*である．

というは，タイルである球面四角形の 4 個の内角を未知変数とすると，四角形であるタイルの面積はその内角の和から 2π を引いたものであるが，異なる次数の個数だけ独立な方程式が得られる場合は，線形代数の議論により，次数の個数は高々4 である．合同な菱型，合同な凧型，合同な矢じり型による球面タイリングを網羅的に分類したところ [3]，この予想は正しい．実際，位相的に deltoidal hexecontahedron (凧形六十面体) [7, Ch 21] である球面タイリングは次数 3，次数 4，次数 5 の頂点からなる (図 1 参照)．

この予想を 2 週間程度一緒に彼らと考えたが解けなかった．オイラーの法則から，4 角形による球面タイリングのグラフには必ず次数 3 の頂点があり，その頂点に集まる内角の最大値は $2\pi/3$ 以上で最小値は $2\pi/3$ 以下である．このような条件を線形計画法としてとらえると予想の解決に有用かもしれない．

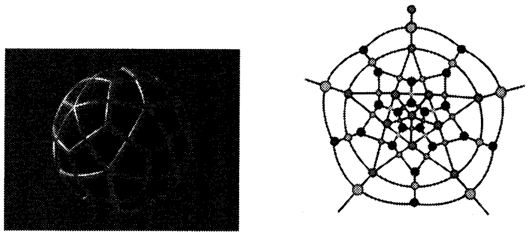

図 1: 左の図は deltoidal hexecontahedron **(凧形六十面体)．右の図はそのグラフ．**

合同な四角形による球面タイリングにおける，次数の種類の個数のみならず，タイルの内角とグラフがあらかじめ分かったとしても，合同な四角形による球面タイリングが一意に決まるわけではない (命題 1)．とりあえずタイルを凸に限って議論していくべきと思われる．

命題 1 ([2]) *6*以上の勝手な偶数 F に対して F 個の合同な凹な四角形からなる球面タイリング T_1, T_2 が存在し，T_1 と T_2 は合同ではないが，T_1 のタイルの内角と T_2 のタイルの対応する内角は等しく，T_1 のグラフと T_2 のグラフも等しい．

彼らからの他の質問として

質問 1 合同な四角形による非対称的な球面タイリングは存在するか？

があった．彼らの質問の背景だが，四角形分割を列挙するプログラム `plantri` による列挙には，自明な自己同型射しか持たないグラフが多く含まれるということである．

合同な四角形による球面タイリングのグラフにおいてにおいて，二個の隣接する面を一つの六角形と見なすと，球面の六角形分割が得られる．球面の四角形分割の場合のように，球面のどんな六角形分割も，基本的なグラフから有限個の局所的な拡張操作により得られるとの結果が McKay の周辺から最近発表された．また日本のグラフ理論の専門家からの貢献があったそうだ．この六角形分割の考え方により Van Cleemput 氏は次を証明した．まず，合同な

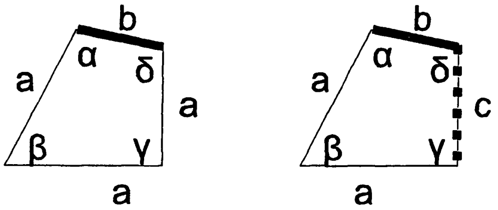

図 2: 2 型の四角形 (左) と 4 型の四角形 (右)

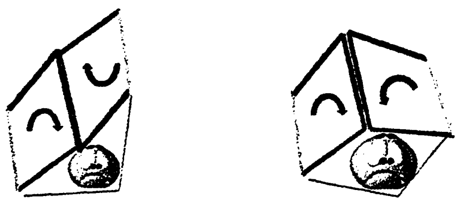

図 3: *abcd* 型と *abab* 型の四角形が不可能な理由.

四角形による球面タイリングにおいては, タイルである四角形は, 菱型, 凧型, 矢型, あるいは, 図 2 の 2 型 (= *aaab* 型), または 4 型 (= *abca* 型) に限ることに注意する. つまり, タイルは長さが *abcd* の四角形ではありえないし, 長さが *abab* の四角形ではありえない (図 3 参照).

Lemma 1 ([19]) *2* 型の合同な四角形による球面タイリングにおいて, 少なくとも *6* 個の頂点が丁度 *2* 個の長さ a の辺に接続する.

Lemma 2 ([19]) *4* 型の合同な四角形による球面タイリングにおいて, 少なくとも *6* 個の頂点が丁度 *2* 個の, 長さが b でない辺に接続する.

Lemma 3 ([19]) *4* 型の合同な四角形による球面タイリングにおいて, 少なくとも *6* 個の頂点が丁度 *2* 個の, 長さが c でない辺に接続する.

合同な四角形による球面タイリングの分類の戦略としては, まず, 記号的な角度割り当て決める. すると辺の記号的長さ割り当てがきまる. すると, 部分グラフたちの球面上での合同性が議論できる. 結晶の点群を表すシェーンフリース記号を決めるように, 最も回転対称性の高い軸を定める. ここで, Symmetry finding [4] などのテクニックが使えるかもしれない. その後に, 球面三角法を用いて実際に球面タイリングとして実現できるかを見ることになる.

3 グラフ理論教育支援ソフト

予想 1 を考えるのに, Brinkmann から有用かもしれないとすすめられたのがグラフ理論教育支援ソフトウェア GrinvIn (**Graph Invariant Investigator**, http://www.grinvin.org) [18] である. グラフ理論の教育ソフトおよび, 論理推論の教育ソフトとして, Houston(米), Bielefeld(ドイツ), Ghent 大学 (ベルギー), Purderbourne 大学 (ドイツ) などで使われ, 学生にグラフ理論を紹介するに当たり非常に動機づけに成功し [17], UI や描画機能もよいので化学者も使っているそうである. Journal of Mathematical Chemistry などにもグラフ理論の論文が掲載される. Mohar index, 細矢 治夫先生の Hosoya index [10] など様々な index が提唱されているが, 化学でも利用されているそうである. GrinvIn はベルギーの Ghent 大学の Brinkmann と Van Cleemput らが中心となって開発されている.

GrinvIn の使い方であるが, グラフの不変量 (頂点数, 辺数, 面数, 直径, マッチング数, ...) を 2 個以上選び, 典型的なグラフのクラスから適当なグラフを選ぶ. すると, システムは不変量の表を適当にフィッティングした数式を「予想」として表示する. ユーザーはその反例であるグラフを選ぶかエディタで入力するか, あるいは, それを証明する. ユーザーである学生は, 先生も解決が困難な予想に挑むこともあるそうである.

4 おわりに

日本は世界最速の列挙プログラムを開発し (有村先生, 上野先生, 中野先生), また, 多面体展開図の列挙 (堀山先生) や折り紙関係の列挙に関する研究 (上原先生) があるので, 諸賢の結果を踏まえて, 研究を進めていきたい.

参考文献

[1] Yohji Akama. Classification of spherical tilings by congruent quadrangles over pseudo-double wheels (I) — a special tiling by congruent concave quadrangles. *Hiroshima Math. J.*, Vol. xx, No. x, pp. xxx–xxx, 2012.

[2] Yohji Akama, Kosuke Nakamura, and Yudai Sakano. On spherical tilings by congruent quadrangles (II) — the continua and the symmetries. 2011.

[3] Yohji Akama and Yudai Sakano. Classification of spherical tilings by congruent rhombi (kites, darts). in preparation, 2012.

[4] M. J. Atallah. On symmetry detection. *IEEE Trans. Comput.*, Vol. 34, pp. 663–666, 1985.

[5] G. Brinkmann and B. D. McKay. Fast generation of planar graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, Vol. 58, pp. 323–357, 2007.

[6] Gunnar Brinkmann, Sam Greenberg, Catherine Greenhill, Brendan D. McKay, Robin Thomas, and Paul Wollan. Generation of simple quadrangulations of the sphere. *Discrete Math.*, Vol. 305, No. 1-3, pp. 33–54, 2005.

[7] John H. Conway, Heidi Burgiel, and Chaim Goodman-Strauss. *The symmetries of things*. A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 2008.

[8] A. W. M. Dress. Presentations of discrete groups, acting on simply connected manifolds. *Advances in Mathematics*, Vol. 63, pp. 196–212, 1987. This paper contains the formal definitions and proofs regarding Delaney-Dress symbols.

[9] A. W. M. Dress and D. H. Huson. On tilings of the plane. *Geometriae Dedicata*, Vol. 24, pp. 269–296, 1987.

[10] Haruo Hosoya. Topological index. a newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons. *Bulletin of the Chemical Society of Japan*, Vol. 44, No. 9, pp. 2332–2339, 1971. doi:10.1246/bcsj.44.2332.

[11] D. H. Huson. The generation and classification of tile-k-transitive tilings on the euclidean plane, sphere, and hyperbolic plane. *Geometriae Dedicata*, Vol. 47, pp. 295–310, 1993.

[12] P. Kaski and P. R. J. Östergård. *Classification Algorithms for Codes and Designs*. Springer, 2006.

[13] Leonard R. MacGillivray. Design rules: A net and archimedean polyhedra score big for self-assembly. *Angewandte Chemie International Edition*, Vol. 51, No. 5, pp. 1110–1112, 2012.

[14] B. D. McKay. Isomorph-free exhaustive generation. *J. Algorithms*, Vol. 26, pp. 306–324, 1998.

[15] B. D. McKay and Zhang Ke Min. The value of the Ramsey number $R(3,8)$. *J. Graph Theory*, Vol. 16, pp. 99–105, 1992.

[16] Brendan D. McKay and Stanislaw P. Radziszowski. $R(4,5) = 25$. *Journal of Graph Theory*, pp. 309–322, 1995.

[17] Adriaan Peeters, Kris Coolsaet, Gunnar Brinkmann, Nicolas Van Cleemput, and Veerle Fack. Grinvin for graph theory teaching and research. In Johann Hurink, Walter Kern, Gerhard F. Post, and Georg Still, editors, *CTW*, pp. 123–126. University of Twente, 2007.

[18] Adriaan Peeters, Kris Coolsaet, Gunnar Brinkmann, Nicolas Van Cleemput, and Veerle Fack. Grinvin in a nutshell. *Journal of Mathematical Chemistry*, Vol. 45, pp. 471–477, 2009. 10.1007/s10910-008-9420-5.

[19] Nicholas van Cleemput. personal communication, 15 Feb. 2012.