数理解析研究所講究録
第 1800 巻 2012 年 90-93

連接剛体系の端が非線形局在モードに及ぼす影響

阪大院・基礎工　渡邉 陽介 (Yosuke WATANABE),
丹生 清也 (Seiya NIU),
杉本 信正 (Nobumasa SUGIMOTO)
Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1　はじめに

形状および性質が等しい多数の剛体の部材（はりやパネル）がそれぞれの両端で, 連結部を介して隣の部材とつながってできた構造を「連接剛体系」とよぶ. 地上あるいは宇宙空間に作られる巨大な構造物や機械装置はしばしば多数のユニットを連結することによって作られているが, この場合, 連結部（接合部）の存在により構造物には必然的に離散性と周期性が内在することになり, 外因に対して, 離散周期系に特有な伝播特性をもつ横波や振動モードの励起が想定される. 連接剛体系はこれらの波動・振動を記述, 考察するための最もシンプルな力学モデルの一つである. 筆者らはこれまでに, 各連結部での曲げに対して非線形的に応答する復元モーメントが作用するものと仮定して, 系を支配する方程式系を導出し, 適当な初期条件の下で数値解析をおこない, 連接剛体系に局在振動（「非線形局在モード」）が励起すること [1], および一般にこの局在振動が系内を移動することを明らかにした [2]. 非線形局在モードの一般的な定義は, 離散周期系において励起される, 少なくとも長時間に渡って安定に存在する局在した周期振動で, 系に内在する非線形性のためにその周波数が線形波伝播禁止帯にあるもの, とされている [3, 4]. 縦波を記述する格子力学系に対して非線形局在モードに関する研究が既に数多くおこなわれているが, これらの系に励起した非線形局在モードは移動しにくく定在する傾向にある [5]. 対照的に連接剛体系では, 系内の任意の位置に励起された局在振動は本質的に移動する. これは局在振動の移動には系内の張力の分布が関与しており, 任意の初期条件（初期形状）での系の非対称性が張力の分布の非対称性を生み出していることによると考えられる. このことから局在振動の移動には系の端の存在が大きく効いていることがわかる. また先行する研究では, 系の両端が自由である場合, 特別な場合を除いて, 系内を移動する局在振動は系端での反射を繰り返し, 最終的に一方の端に捕捉されることを明らかにした [2]. 系の端の存在は, 周期構造を伝搬する波動や振動にとって, 周期性を壊す一種の“不純物”と捉えることができる。本稿では図 1 のように系の一端が壁に固着された場合の, 特に非線形局在モードの伝播に与える影響ついて, 明らかになったことを報告する.

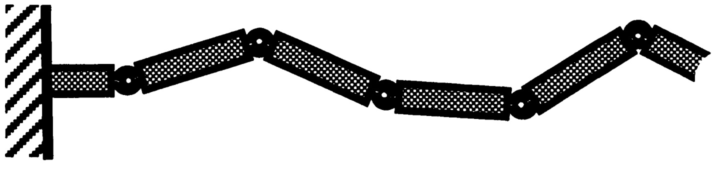

図 1: 一端が壁に固着された連接剛体系（境界条件: 固定端—自由端）

2 定式化と境界条件

連接剛体系内の連結部では二つの部材の中心軸がなす相対回転角 $\Delta\phi$ に応じた復元モーメントを与える回転バネ（ここでは復元モーメントの大きさを $\Delta\phi$ に比例する部分に加え, $\Delta\phi$ の 3 乗に比例するモーメントとの和の形によって与える）が仕込まれており, 系に陽に非線形性を与えている. 連接剛体系が N 個の部材からなり, 系左端の第 1 番目の部材が壁に対して垂直に固着されているものとする（固定端）. 系右端（第 N 番目の部材の右端）は束縛を受けず自由であるとする（自由端）. 平衡状態にある系は壁に垂直な一直線上となるが, この直線に沿って x 軸をとり, 壁に沿って y 軸をとる. 系の運動が x-y 平面内に限定されていると仮定するとその運動は, 個々の部材の質量中心に関する x, y 方向と回転についての運動方程式, および連結部での x, y 方向の変位の連続の幾何学的条件によって記述される. これらの関係式から質量中心の座標 $(x_{\mathrm{j}}(t), y_{\mathrm{j}}(t))$, 中心軸が x 軸となす角 $\phi_{\mathrm{j}}(t)$ を変数とする支配方程式系 ($j = 1, \cdots, N$. 但し $x_1(t) = y_1(t) = \phi_1(t) = 0$) が導出される. これらの方程式は適当な量を用いて無次元化されるが, このとき回転バネの非線形性の強さを表す無次元パラメータ κ が導入される.

3 数値計算

前節で導出した支配方程式系に対し, 適当な初期条件（系の初期形状）を与えて数値計算を行い, 非線形局在モードの存在およびその性質を調べる. 初期形状は ϕ_{j} （$j = 2, \cdots, N$）について π モードの定在波（最短波長のジグザグ形状）に振幅が A の sech 型の変調を加えた形, すなわち

$$\phi_{\mathrm{j}}(0) = (-1)^j A \ \mathrm{sech}\left[\alpha(j - c - \sigma)\right], \qquad j = 2, \cdots, N$$

で与える. また $d\phi_{\mathrm{j}}/dt$ の初期値は全ての j の値について 0 とする. ここで α は変調による局在の幅を示す任意パラメータであり, c は系の対称中心位置（$c = N/2 + 1/2$）, σ は c からのずれ ($|\sigma| \le N/2$. σ が正: 自由端側, σ が負: 固定端側）を表す. $x_{\mathrm{j}}(0)$, $y_{\mathrm{j}}(0)$ は変位の連続を要求する式により $\phi_{\mathrm{j}}(0)$ から一意に定められる. N の値は生成される局在振動部の幅に影響を与えない程度に十分に大きく取る. 先行する研究結果を参考に [1, 2], 本研究では $N = 64$, $A = \pi/180$, $\alpha = 0.6$ とする. 以下では κ と σ をパラメータとして, これらの様々な値の組み合わせに対して数値計算をおこなった. なお計算には 4 次の Runge-Kutta 法を用いている. 各計算結果に対する局在化・脱局在化の判定や励起された局在部の系内での移動のパターンの把握は, 系の時空間波形と各部材の有する力学的エネルギー（ユニットエネルギー）の空間的な分布を観察することによりおこなった.

上で与えた N, A, α の値に対しては κ の値が $600 \sim 6,000$ 程度の範囲で顕著な局在化がみられた. 任意の σ の値に対して励起された局在振動は系の両端での境界条件の非対称性のために系内を移動する. $\sigma = 0$ とした場合の最も典型的な移動パターンを図 2(a) に示す. 励起位置である系の中央から自由端に向って移動し始めた局在振動は, 端に捕捉され, そこでの反射を繰り返すようになる. 実行した計算時間（$t < 2,000$）の範囲では, 極めて限定的な κ の値の場合を除いて, 局在部は自由端に捕捉されることが確認された.

任意の $\sigma \neq 0$ の値に対して励起された局在振動は, 十分時間が経過した後は, 一般に, 自由端あるいは固定端のいずれかに捕捉される. 両者のうちのどちらに捕捉されるかは σ の値に強く依存しており, $|\sigma| \sim 0$ の例外を除いて, σ が正の値の場合は前者, 負の場合は後者となる. $|\sigma|$ の値が大きくなるにつれ端での捕捉が強くなり, 端近傍で励起された場合は移動せずに励起位置で定在するようになる. σ の値が負の場合の例を図 2(b) に示す. 更に, ちょうど系の端で励起された場

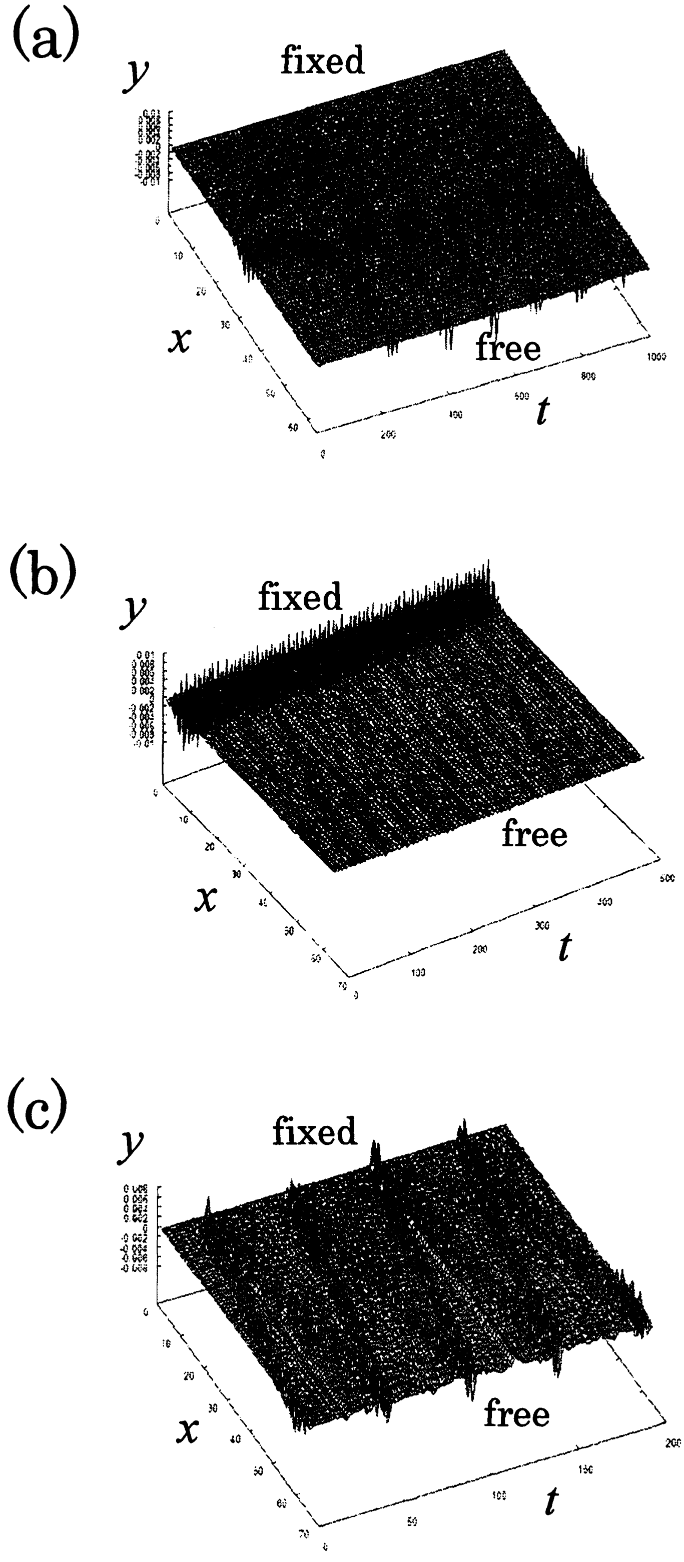

図 2: 系に励起された ILM の時空間発展 ($\kappa = 1400$): (a) $\sigma = 0$, (b) $\sigma = -25$, (c) $\sigma = 32$.

合は, 端の束縛を振り切って動き出し, 系の端から端への移動および両端での反射を繰り返すことが明らかになった（図 2(c)）. また図 2(c) からは, 局在振動が固定端で反射する瞬間は局在振動に加え系全体が一様に振動する様子が観察され, 自由端の場合とは反射のメカニズムが異なっていることがわかる.

4 おわりに

一端が壁に固着され他端が自由に動ける連接剛体系においても適切な条件の下で非線形局在モードが励起される. これら二つの異なる境界条件のために系は左右非対称なシステムとなり, 局在振動は本質的に系内を移動する. 端の存在を系の完全な周期性を乱す一種の不純物とみなすならば, 局在振動の端での捕捉や反射は局在振動と不純物の相互作用を示しており, 局在振動にとって, 自由端, 固定端は共に吸引的であることがわかる. 両者が及ぼす影響の違いは, 特に局在振動の反射時の, 系全体の振る舞いにおいてはっきりと認められる.

参考文献

[1] Y. Watanabe, K. Hamada, N. Sugimoto, " Localized oscillations of a spatially periodic and articulated structure," *Wave Motion*, **45**, 100-117 (2007).

[2] Y. Watanabe, K. Hamada, N. Sugimoto, " Mobile intrinsic localized modes of a spatially periodic and articulated structure," *J. Phys. Soc. Jpn.*, **81**, 014002 (2012).

[3] A. J. Sievers and S. Takeno, "Intrinsic Localized Modes in Anharmonic Crystals," *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 970-973 (1988).

[4] D. K. Campbell, S. Flach and Y. S. Kivshar, "Localizing Energy through Nonlinearity and Discreteness," *Physics Today*, **57**, 43-49 (2004).

[5] K. Yoshimura, Y. Doi, " Moving discrete breathers in nonlinear lattice: Resonance and stability," *Wave Motion*, **45**, 83-99 (2007).

（本稿は第 60 回理論応用力学講演会講演論文集の原稿を元に作成している.）