

## ルートの重要性を考慮した不確実・不確定状況下での最短路問題

大阪大学大学院・情報科学研究科 蓮池隆(Takashi Hasuike)

Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University

広島大学大学院・工学研究科 片桐英樹(Hideki Katagiri)

Graduate School of Engineering, Hiroshima University

### 1. はじめに

最短路問題はネットワーク計画問題の中でも、重要な問題の 1 つであり、その実社会での適用範囲は流通や交通システム、データの伝送路決定、プロジェクト計画におけるクリティカルパスの発見など多岐にわたる。さらに、甚大な災害発生時に、安全な場所へ素早く移動するための避難経路の決定においても、最短路問題は非常に重要な役割を果たす。これら最短路問題を解くために、厳密かつ効率的な解法から近似解法、ヒューリスティックな解法まで、多様な解法アルゴリズムが開発され、現在においても多くの研究者によって、理論から応用まで多岐にわたる研究がなされている。

中でも各ノード間のエッジにかかるコストが固定されている最短経路問題においては、古くより Dijkstra 法, Bellman-Ford 法やその改良アルゴリズムなどが提案され、実用上でも幅広く適用されている。その一方で、実社会への適用を考えた場合、エッジコストが確定的に得られる場合は少なく、収集したデータを統計的に解析し、コストを確率分布として設定する場合も多い。このような確率的状況下を考慮した確率的な最短路問題に関する研究も盛んに行われてきている[3, 4, 7, 8]。さらに、必要なデータ数が集まらない場合や、言語情報・人間感性情報など非数値情報が多く存在する場合においては、直接的に確率理論を適用することが困難であり、データや情報解釈に人的要因が含まれることになる。このような不確定状況下を考慮した数理モデルとして、ファジィ理論を導入したファジィ最短路問題の研究も近年進められている[1, 6]。これら実社会における不確実・不確定要因は、両方が同時に存在している場合もあり、本発表においては、不確実性と不確定性が混在する状況下での最短路問題について考察を進める。

最短路問題において、所要時間や必要コストを考慮することは重要なことであるが、それと同時にネットワークの信頼性・重要度も考慮する必要がある。情報通信網において、コストが安いからといって、耐久性の低い通信網を構築すると、将来的に設備の劣化に伴う必要以上のコストがかさんでしまう可能性も大きい。逆に信頼性が高いネットワークを構築することになれば、それだけ高額なコストがかかってしまう。このようにコストと信頼性・重要度にはトレードオフの関係があることから、両要因を状況に応じて考慮していく必要がある。さらに実社会において、所要時間などは時々刻々と変化する。現時点では 1 時間で行ける道であっても、渋滞が起りやすく、その道を進むと 30 分後には渋滞につきまら、2 時間かかってしまう可能性もあり得る。このように様々な要因を最短路問題に組み

込んで考えることは必要不可欠であり、かつ実社会で汎用的に利用することが可能となる。よって本論文では、エッジコストの時刻変化要因とともに、信頼性も付与されているネットワークにおける最短路問題に対して、不確定要因も考慮した解法アルゴリズムの構築を行う。

## 2. 基本的な最短路問題の定式化

まず初めに基本的な最短路問題を定式化する。本論文ではノード総数を  $n$ 、ノードの集合を  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 、枝の総数を  $m$ 、有向枝の集合を  $E \subseteq N \times N$  としたグラフ  $G(N, E)$  を想定する。 $c_{ij}$  を枝  $(i, j)$  に関する正数のコストとし、 $x_{ij}$  をその枝を選択する場合は 1、そうでない場合は 0 となる決定変数とする。このとき、コスト最小化のみを考慮した最短路問題は次の数理計画問題として定式化される。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\ & \text{subject to } \mathbf{x} \in X \triangleq \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{l} \sum_{\{j|(i,j) \in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i) \in E\}} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = s \\ 0 & \text{if } i \neq s, t \ (i = 1, 2, \dots, n) \\ -1 & \text{if } i = t \end{cases} \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in E \end{array} \right. \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

全てのパラメータが正数の固定値の場合、Dijkstra 法などの既存解法を用いることによって、解析的かつ効率的に上記の問題の最短路を求めることが可能である。しかし、コストに不確実性・不確定性がある場合、つまりコストが確率変数やファジィ数として表現される場合、コストが変動するため、既存解法を直接的に用いることはできない。また信頼性や重要度も考慮した場合、制約条件が追加される場合が多く、一般的な最短路問題に比べて複雑になるため、この場合も既存解法を直接用いることはできない。さらにこの定式化のままでは、コストの時刻変化を表現することも困難である。よって次章において、提案モデルの定式化に必要な数理的モデリング手法を導入し、提案モデルを定式化、その解法アルゴリズムについて考察する。

## 3. 提案モデルの定式化

コストの時系列変化を表すために、ネットワークフロー問題などで広く用いられている、時空間ネットワークの概念を導入する。

### 3.1. 時空間ネットワーク

時空間ネットワーク (Time Expanded Network) は、ネットワークを時間軸発展させたもので

あり、一般的なネットワーク計画問題に対し時間発展要素を導入することが可能となる。よって近年でも、時空間ネットワークを用いた様々な応用研究がなされている[2, 5]。これにより、所与の単一ネットワークにおける各エッジコストなども時間的に変動させることが可能となり、かつエッジに対し他の様々なパラメータを導入することで、またノードやエッジを追加・削除することにより、ネットワークを状況や時刻に応じて、柔軟に変化させることも容易となる。与えられたネットワークに対し、時空間ネットワークの生成過程は以下の通りである。

(時空間ネットワークの生成過程)

- STEP1: 時刻を横軸にとり、刻み幅を意思決定者により設定する。各時刻に対して、与えられたネットワーク内の全てのノードを並べる。
- STEP2: 各ノードに対し、その時点で移動可能な経路を有効枝で連結する。これにより、各エッジの時刻変化が表現可能となる。
- STEP3: 各エッジに対し、コストや重要度の値を設定する。これにより、1つの静的なネットワーク上で時刻変化を持つコストや重要度の導入や表現が可能となる。

この生成過程により得られる時空間ネットワークの一例(9ノード)が以下の図1である。

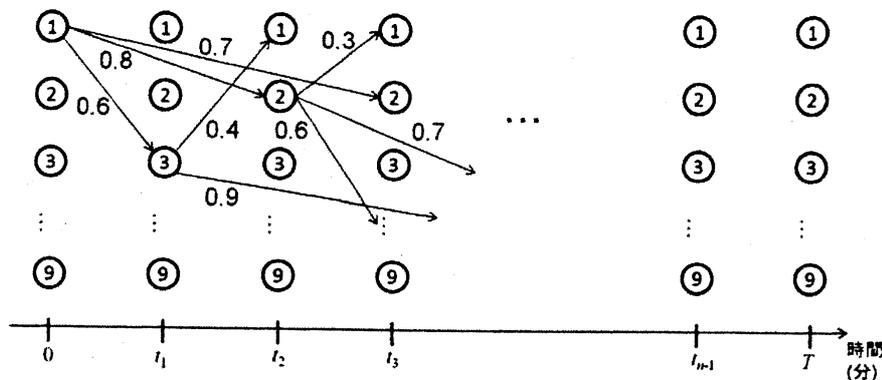


図1 9ノードによる時空間ネットワーク

### 3.2. 時空間ネットワークを利用した提案モデルの定式化

3.1節で導入した時空間ネットワークを利用して、エッジコストが各時刻で変化し、かつその値が確率的に変化する状況、および各エッジに対する信頼性を考慮した最短路問題の定式化を行う。2章で導入したパラメータを時空間ネットワークに拡張するために、以下のパラメータを再設定する。

$((i, t), (j, t'))$ : 時刻  $t$  におけるノード  $i$  から時刻  $t'$  におけるノード  $j$  への有向枝。

$$t, t' \in \{0, t_1, \dots, t_{n-1}\}, t < t'$$

$A$ : 時空間ネットワーク内に存在する有向枝の集合,  $((i,t),(j,t')) \in A$

$\tilde{a}_{ij}(t,t')$ : 時刻  $t$  におけるノード  $i$  から時刻  $t'$  におけるノード  $j$  への経路に対する重要度. 本論文では, 不確定性を有するパラメータと仮定し, 三角型ファジィ数として定義する. つまり,  $\tilde{a}_{ij}(t,t') = (\bar{a}_{ij}(t,t'), \alpha_{ij}(t,t'), \beta_{ij}(t,t'))$  として, センター値  $\bar{a}_{ij}(t,t')$ , 両側の広がり度合  $\alpha_{ij}(t,t'), \beta_{ij}(t,t')$  を意思決定者が設定する.

$x_{ij}(t,t')$ : 時刻  $t$  におけるノード  $i$  から時刻  $t'$  におけるノード  $j$  への経路を取る・取らないに  
対する 0-1 決定変数

これらのパラメータを導入して, 提案する最短路問題は次の定式化となる.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{((i,t),(j,t')) \in A} c_{ij}(t,t') x_{ij}(t,t') \\ & \text{subject to} && \Pr \left\{ \sum_{((i,t),(j,t')) \in A} c_{ij}(t,t') x_{ij}(t,t') \leq C \right\} \geq \beta, \\ & && \sum_{((i,t),(j,t')) \in A} \tilde{a}_{ij}(t,t') x_{ij}(t,t') \geq Q, \\ & && \mathbf{x} \in X' \end{aligned} \tag{2}$$

ただし,  $C$  は総コストに対する目標値,  $\beta$  は制約条件を満たす確率レベル,  $Q$  は重要度に対する目標値とする. また  $X'$  は時空間ネットワーク内における最短路問題固有の制約条件の集合である. この問題は第 1 制約として確率機会制約条件, および第 2 制約としてファジィ制約条件が導入されており, 数理計画問題の枠組みで最適経路を求めるためには, これらを等価確定変換する必要性がある.

確率機会制約条件に関して, 離散確率を仮定し, 図 2 のように時空間ネットワークのエッジとして, 複数の有向枝を描き, そこに累積確率  $p_{ij}(t,t')$  を付与することで対応することが可能である.

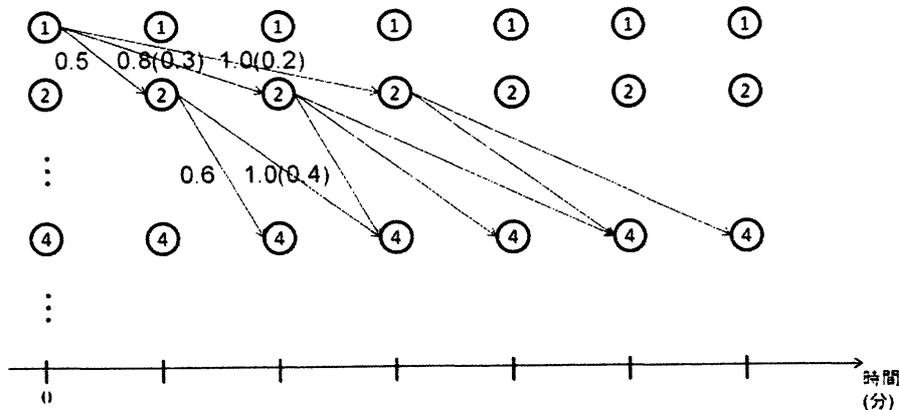


図 2 時空間ネットワークに対する累積確率の付与

よって、確率機会制約条件は以下の形で等価確定変換が可能である。

$$\begin{aligned}
& \Pr \left\{ \sum_{((i,t),(j,t')) \in A} c_{ij}(t,t') x_{ij}(t,t') \leq C \right\} \geq \beta \\
& \Leftrightarrow \prod_{((i,t),(j,t')) \in A} p_{ij}(t,t') x_{ij}(t,t') \geq \beta \\
& \Leftrightarrow \log \prod_{((i,t),(j,t')) \in A} p_{ij}(t,t') x_{ij}(t,t') \geq \log \beta \\
& \Leftrightarrow \sum_{((i,t),(j,t')) \in A} (\log p_{ij}(t,t')) x_{ij}(t,t') \geq \log \beta
\end{aligned} \tag{3}$$

次にファジィ制約条件に関して、等価確定変換を行うためには最適性の基準が必要となる。本論文では、Yager により提案された以下の ranking method:  $R(\tilde{Z})$  を利用する。

$$R(\tilde{Z}) = \bar{z} + \frac{w_R - w_L}{4}, \quad \tilde{Z} = (\bar{z}, w_L, w_R) \tag{4}$$

この  $R(\tilde{Z})$  をファジィ制約条件に適用することで、以下の形に確定変換が可能となる。

$$\begin{aligned}
& \sum_{((i,t),(j,t')) \in A} \tilde{a}_{ij}(t,t') x_{ij}(t,t') \geq \mathcal{Q} \\
& \rightarrow R \left( \sum_{((i,t),(j,t')) \in A} \tilde{a}_{ij}(t,t') x_{ij}(t,t') \right) \geq \mathcal{Q} \\
& \Leftrightarrow \sum_{((i,t),(j,t')) \in A} \left( \bar{a}_{ij}(t,t') + \frac{\beta_{ij}(t,t') - \alpha_{ij}(t,t')}{4} \right) x_{ij}(t,t') \geq \mathcal{Q}
\end{aligned} \tag{5}$$

この2つの不等式(3)と(5)を提案モデル(2)に適用することで、以下の問題を解くことで、提案モデルの最適経路を求める。

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad \sum_{((i,t),(j,t')) \in A} c_{ij}(t,t') x_{ij}(t,t') \\
& \text{subject to} \quad \sum_{((i,t),(j,t')) \in A} (\log p_{ij}(t,t')) x_{ij}(t,t') \geq \log \beta, \\
& \quad \sum_{((i,t),(j,t')) \in A} \left( \bar{a}_{ij}(t,t') + \frac{\beta_{ij}(t,t') - \alpha_{ij}(t,t')}{4} \right) x_{ij}(t,t') \geq \mathcal{Q}, \\
& \quad \mathbf{x} \in X'
\end{aligned} \tag{6}$$

問題(6)は、一般的な制約付き最短路問題に帰着されているため、Dijkstra 法などの厳密解法、ラグランジュ緩和問題を利用した近似解法、ヒューリスティックな解法のいずれも、問題の規模に応じて適用が可能である。

#### 4. 数値例

提案モデルと既存モデルとの比較として、以下の図3に示されている9ノードのネット

ワークにおけるノード1から9への最短経路問題を考える。

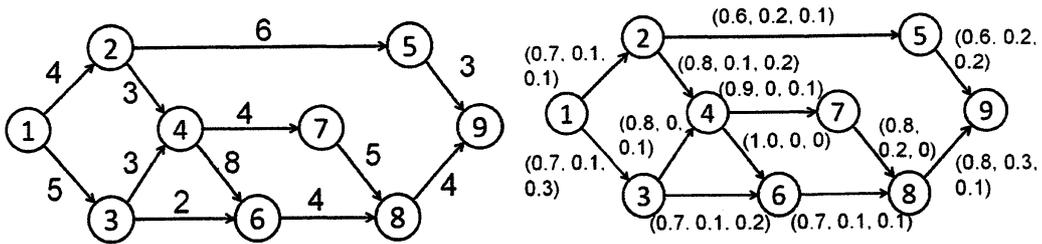


図3 9ノードのネットワークにおける数値例

図3において、左図はエッジコストを確定値で、右図bは各エッジに対する重要度を三角型ファジィ数により与えたものである。また確率的变化として、本数値例では簡単のため、図3の左図に加えて、ノード2から4への移動時間が3分後に確率0.5で倍の6分となり、ノード4から7へのルートが9分後に通れなくなる場合を想定する。

この状況下で、(i)基本的な最短経路問題(重要度や確率的变化を考慮しない)、(ii)重要度を考慮した最短経路問題(目標値 $C = 21$ ,  $Q = 3.0$ , 確率的变化は考慮しない)、(iii)確率変動も考慮した最短経路問題(確率レベル $\beta = 0.8$ )の3つのパターンに関して最短経路問題を求めた結果、以下の表1の結果が得られた。

表1 想定異なる3つの最短経路問題における最短経路

モデル	最短経路
(i)基本的な最短経路問題	1→2→5→9
(ii)重要度を考慮した最短経路問題	1→2→4→7→8→9
(iii)確率変動も考慮した最短経路問題	1→3→4→7→8→9

この結果より、提案モデルである(iii)はノード2から4のエッジで起こる確率的变化による影響を避けつつ、かつ重要度の高いルートを選択していることがわかる。よって、本論文での提案モデルは、一種のロバスト性を有するモデルとなっていると考えられる。

## 5. まとめ

本論文では、エッジコストの時刻変化要因とともに、信頼性も付与されているネットワークにおける最短経路問題を提案した。主問題の目的関数や制約条件に対して、時空間ネットワークによって時刻変化を、時空間ネットワークのエッジコストに累積確率を付与することで確率機会制約条件の等価確定変換を、ファジィ数を含む重要度に関しては、Yager's ranking methodを導入することで確定変換を行い、主問題を一般的な制約付き最短経路問題へと確定変換を行った。

今後は、変換された制約付き最短経路問題に対するより効率的かつ汎用的な解法アルゴリズムの開発や、実社会に適用した際のモデルの改良点の考察を行っていく。

## 参考文献

- [1] Y. Deng, Y. Chen, Y. Zhang, and S. Mahadevan, "Fuzzy Dijkstra algorithm for shortest path problem under uncertain environment", *Applied Soft Computing*, 12(3), pp. 1231-1237, 2012.
- [2] F.G. Engineer, G.L. Nemhauser, and M.W.P. Savelsgergh, "Dynamic programming-based column generation on Time-Expanded Network: Application to the Dial-a-Flight problem", *INFORMS Journal on Computing*, 23(1), pp. 105-119, 2011.
- [3] Y. Fam, R.Kalaba, and J. Moore, "Shortest paths in stochastic networks with correlated link costs", *Computers and Mathematics with Applications*, 49, pp. 1549-1564, 2005.
- [4] P. Kouvelis and G. Yu, *Robust Discrete Optimization and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [5] N. Shah, S. Kumar, F. Bastani, and I.L. Yen, "Optimization models for assessing the peak capacity utilization of intelligent transportation systems", *European Journal of Operational Research*, 216, pp. 239-251, 2012.
- [6] A. Tajdin, I. Mahdavi, N.Mahdavi-Amiri, and B. Sadeghpour-Gildeh, "Computing a fuzzy shortest path in a network with mixed fuzzy arc lengths using  $\alpha$ -cuts", *Computers & Mathematics with Applications*, 60(4), pp. 989-1002, 2010.
- [7] B. Thomas, and C. White, "The dynamic shortest path problem with anticipation", *European Journal of Operational Research*, 176(2), pp. 836-854, 2007.
- [8] S. Waller, and A. Ziliaskopoulos, "On the online shortest path problem with limited arc cost dependencies", *Networks*, 40(4), pp. 216-227, 2002.