

ソフトウェアリリースゲームにおける最適混合戦略について

広島大学大学院工学研究科 齋藤 靖洋 (Yasuhiro Saito) 土肥 正 (Tadashi Dohi)
Graduate School of Engineering, Hiroshima University

1 はじめに

ソフトウェア製品を市場に出荷する最適な出荷時期を決めることは、ソフトウェア開発者にとって重要な問題の1つである。製品を出荷する前に、ソフトウェアに潜在するフォールトを出来る限り多く修正・除去することが必要となる。ソフトウェアのテスト工程が長引けば、多くのフォールトを発見・除去することが出来るメリットを持つが、それは一方でテスト費用の大幅な増加を招くだけでなく、市場における製品普及の機会を逃してしまふ可能性がある。

このような問題に対し、従来から様々なソフトウェアリリース問題が扱われてきた。従来のソフトウェアリリース問題では、テスト工程や運用段階において観測されるフォールト検出事象をソフトウェア信頼度成長モデルによって記述することで、総期待ソフトウェア費用を最小化する最適出荷時期を決定することに主眼が置かれていた。

これに対して、ソフトウェア製品の出荷において競争相手の存在を仮定した場合、単純に総期待ソフトウェア費用を最小化するだけでは最適な出荷時期を求めることはできない。Zeephongsekul and Chiera [1] はゲーム理論における射撃ゲームの考え方を応用することで、競争相手の存在する市場におけるソフトウェアリリース問題について定式化し、ゲームの解 (Nash 均衡戦略と期待利得) を求めた。しかしながら、彼らの解は各プレイヤーの行動時間を決めるパラメータが等しいという極めて限定的な場合にしか成り立たないものであった。これに対し Dohi ら [2] は [1] の解が実行可能解ではない反例を示し、新たな混合戦略を求めると同時に、ソフトウェアリリースゲームを noisy タイプにまで拡張した。しかし、そこで導出された混合戦略も Nash 均衡戦略としての性質を満たさない可能性を含む不完全なものであった。そこで本稿では、Zeephongsekul and Chiera [1] や Dohi ら [2] によって導出された混合戦略を再考し、より厳密な意味で最適な混合戦略を提案することを目的とする。互いに相手の出荷を認知することが出来ないという条件を持つ (Silent タイプ) ゲームについて問題を定式化し、この問題に対する最適な混合戦略ならびに期待利得を導出する。

2 モデル記述

従来のソフトウェアリリース問題では、主に総期待ソフトウェア費用を最小化する最適出荷時刻を決定することを目的としていた。以下の記号を定義する。

T_{LC} :ソフトウェアのライフサイクル

$N_i(t)$:時刻 t までに検出される総期待フォールト数

$C_i(t)$:プレイヤー i が時刻 t でソフトウェアを出荷したときの総期待費用

c_{1i} :テスト工程における単位時間当たりのテスト費用

c_{2i} :テスト工程において1つのフォールトを除去するためのデバック費用

c_{3i} :運用段階において1つのフォールトを除去するためのデバック費用

各プレイヤーの総期待ソフトウェア費用は狭義凸関数であり、

$$C_i(t) = c_{1i}t + c_{2i}N_i(t) + c_{3i}\{N_i(T_{LC}) - N_i(t)\} \quad (1)$$

で表される。ここで、 $N_i(t)$ は t に関して微分可能であり、 $N_i(0) = 0$ となる増加関数である。

3 ソフトウェアリリースゲーム

市場において競合するプレイヤー（企業）は2名だけと仮定し、それぞれプレイヤー1, 2と呼ぶ。各々のプレイヤーは自社で開発したソフトウェア製品の出荷時期を検討し、その結果、自社の総期待利得が最大となるようソフトウェアの出荷時期を決定する。出荷されるソフトウェアの信頼性・品質・機能には大きな差はないものとし、ソフトウェアが売れて市場を独占できる可能性は確率的であるとする。すなわち、時刻 t でソフトウェアを出荷した場合の市場独占確率を $A_i(t)$ ($i = 1, 2$) で表す。 $A_i(t)$ は $A_i(0) = A_i(T_{LC}) = 0$ を満たす単峰関数である。先に出荷したプレイヤーの製品が売れて市場を独占出来れば、後から出荷したプレイヤーは利益を上げることが出来ないものと仮定する。これは出荷されるソフトウェアの性能等に大きな差がないことから、後から出荷されるソフトウェアを買うメリットがないために他ならない。

p_i をプレイヤー i が開発したソフトウェア製品による利益とする。この時、相手の存在を考慮に入れなかった場合のプレイヤー i の総期待利得関数は

$$g_i(t) = p_i A_i(t) - C_i(t), \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

と表される。 $C_i(t), A_i(t)$ の性質から $g_i(t)$ は狭義凹関数であり、

$$\tau_i = \{t \geq 0 \mid \sup_{0 < t < T_{LC}} g_i(t), i = 1, 2\} \quad (3)$$

において最大となる。

x, y を各プレイヤーのソフトウェア出荷時刻を表す純戦略とし、 $M_i(x, y)$ をプレイヤー1, 2がそれぞれ時刻 x, y でソフトウェアを出荷した際のプレイヤー i の総期待利得関数とする。Silentタイプのソフトウェアリリースゲームにおいては、各プレイヤーは相手がいつソフトウェアを出荷したのか知ることが出来ないと仮定する。Zeephongsekul and Chiera [1] によって定式化された総期待利得関数は次の通りである。

$$M_1(x, y) = \begin{cases} p_1 A_1(x) - C_1(x), & x < y, \\ p_1 \bar{A}_2(y) A_1(x) - C_1(x), & y \leq x, \end{cases} \quad (4)$$

$$M_2(x, y) = \begin{cases} p_2 A_2(y) - C_2(y), & y < x, \\ p_2 \bar{A}_1(x) A_2(y) - C_2(y), & x \leq y. \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 $\bar{A}_i(t) = 1 - A_i(t)$ である。更に、 $(X, Y) \in [0, T_{LC}] \times [0, T_{LC}]$ を各プレイヤーの純戦略の集合とし、プレイヤー i ($i = 1, 2$) の混合戦略をそれぞれ

$$F_1 = F_1(x) = \Pr\{X \leq x\} \in [0, 1], \quad (6)$$

$$F_2 = F_2(y) = \Pr\{Y \leq y\} \in [0, 1] \quad (7)$$

とおく。また、各プレイヤーがそれぞれ混合戦略 F_i をとった時の総期待利得関数を $M_i(F_1, F_2)$ と表わす。この時、各プレイヤーの総期待利得は、

$$M_1(x, F_2) = \int_Y M_1(x, y) dF_2, \quad (8)$$

$$M_2(F_1, y) = \int_X M_2(x, y) dF_1, \quad (9)$$

$$M_i(F_1, F_2) = \int_X \int_Y M_i(x, y) dF_1 dF_2 \quad (10)$$

である。次の不等式を満足するような混合戦略の集合 (F_1^*, F_2^*) を最適混合戦略又はNash均衡戦略といい、対応する総期待利得関数 $M_i(F_1^*, F_2^*)$ を期待利得と呼ぶ。

$$M_1(F_1^*, F_2^*) \geq M_1(F_1, F_2^*), \quad (11)$$

$$M_2(F_1^*, F_2^*) \geq M_2(F_1^*, F_2). \quad (12)$$

4 最適混合戦略の導出

任意の $a_i \in [0, T_{LC})$ に対し,

$$q_i(t) = \frac{A'_{3-i}(t)\{C_{3-i}(t) + g_{3-i}(a_i)\} - C'_{3-i}(t)A_{3-i}(t)}{p_{3-i}\{A_{3-i}(t)\}^2 A_i(t)} \quad (13)$$

とおく. 更に,

$$\mu_i = \sup\{t \geq 0 | q_i(t) > 0, i = 1, 2\} \quad (14)$$

を定義する. Zeephongsekul and Chiera [1] によって, 以下の式を満たすパラメータ a_i と μ_i が存在することが証明されている.

$$\int_{a_i}^{\mu_i} q_i(t) dt = 1. \quad (15)$$

ここで, 式 (8) と (9) に対して, 一階の最適性条件は

$$\frac{\partial}{\partial x} M_1(x, F_2) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M_2(F_1, y) = 0 \quad (17)$$

のように与えられる. 式 (16),(17) を満たす混合戦略 F_i の一階微分

$$h_i(t) = \frac{dF_i(t)}{dt}, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

が存在すると仮定し, この関数 $h_i(t)$ について

$$\tilde{\mu}_i = \inf\{t > a | h_i(t) < 0, i = 1, 2\} \quad (19)$$

を定義する. ここで, $a = \max(a_1, a_2)$ である.

同様に, 各プレイヤーの最適混合戦略の確率密度関数を以下のように定義する.

$$f_i^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ h_i(t), & a_i \leq a \leq t < \mu \leq \tilde{\mu}_i, \\ \alpha_i, & t = \mu, \\ 0, & \mu < t < T_{LC}. \end{cases} \quad (20)$$

$$f_{3-i}^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ h_{3-i}(t), & a \leq t < \mu, \\ 0, & \mu \leq t < T_{LC}. \end{cases} \quad (21)$$

ここで, $\mu = \tilde{\mu}_{3-i}$ であり, パラメータ α_i ($i = 1, 2$) はマスパートとして

$$\alpha_i = 1 - \int_a^\mu h_i(t) dt \quad (22)$$

によって表され,

$$h_i(t) = \frac{A'_{3-i}(t)\{C_{3-i}(t) + g_{3-i}(a)\} - C'_{3-i}(t)A_{3-i}(t)}{p_{3-i}\{A_{3-i}(t)\}^2 A_i(t)} \quad (23)$$

は一階の最適性条件を満たす関数である. 式 (20),(21) は, 相手の出荷可能期間 $[a_i, \tilde{\mu}_i]$ を知ったプレイヤーは自社の開発力や販売力を勘案し, 相手より短い期間 $[a, \mu]$ での出荷を試みることを想定している. 更には, 自社の製品出荷可能期間 $[a, \mu]$ を知った相手プレイヤーが総期待利得を増加させるべく出荷可能開始時刻を

遅らせ、先に市場を独占されてしまう場合のデメリットを考えて出荷可能終了時刻を早めることも同時に意味している。これら時刻調整のために削られた確率の総和がマスパートとして付加されている。

次のように2つの仮定をおく。

仮定 1: $\mu = \tilde{\mu}_{3-i}$ の時、

$$A_i(\mu)\alpha_i \geq \int_{\mu}^{\tilde{\mu}_i} A_i(t)h_i(t)dt, \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

仮定 2: 任意の時刻 t に対して、

$$C_i(t) + g_i(a) \geq 0. \quad (25)$$

ここで、 α_i はプレイヤー i が時刻 μ でソフトウェアを出荷する確率である。仮定 1 は、 α_i と時刻 μ での市場独占確率 $A_i(\mu)$ との積が $h_i(t)A_i(t)$ を $(\mu, \tilde{\mu}_i)$ の範囲で積分したものより大きいことを意味する。また、仮定 2 においては、 $g_i(a)$ はプレイヤー i が最も早くソフトウェアを出荷した際の利得を表し、 $C_i(t)$ が常に正である事からこの仮定は適切であると考えられる。

補題 1: $a \leq \tau_i$ であると仮定すれば $h_i(a) \geq 0$, ($i = 1, 2$) である。

証明: プレイヤー 1 について考える。式 (23) より $h_1(t)$ の分母は常に正であるため、 $a \leq \tau_1$ の場合に分子が正となる事を示す。 $h_1(t)$ の分子に $t = a$ を代入すると、

$$A_2'(a)\{C_2(a) + g_2(a)\} - C_2'(a)A_2(a) = A_2(a)g_2'(a) \stackrel{\geq}{\neq} 0 \quad (26)$$

となる。プレイヤー 2 についても同様なので、 $a \leq \tau_2$ の時、必ず $h_i(a) \geq 0$ である。 \square

補題 2: 一階の最適性条件を満たす関数は次のように与えられる。

$$f_i^*(t) = h_i(t), \quad a \leq t < \mu. \quad (27)$$

証明: プレイヤー 1 について考える。 $a \leq x \leq \mu$ でソフトウェアを出荷すると、総期待利得関数は

$$M_1(x, F_2^*) = p_1 A_1(x) - C_1(x) - \int_a^x \{p_1 A_1(x) A_2(y)\} dF_2^* \quad (28)$$

となる。これより一階の最適性条件から、

$$\frac{1}{p_1} \cdot \frac{\partial C_1(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[A_1(x) \left\{ 1 - \int_a^x A_2(y) dF_2^* \right\} \right] \quad (29)$$

を得る。両辺を x について積分すると、

$$A_1(x) \left\{ 1 - \int_a^x A_2(y) dF_2^* \right\} = \frac{C_1(x) + d}{p_1}. \quad (30)$$

ここで、 d は積分定数である。 $x = a$ を代入すれば積分定数が求められ、最終的に

$$h_2(t) = \frac{A_1'(t)\{C_1(t) + g_1(a)\} - C_1'(t)A_1(t)}{p_1 \{A_1(t)\}^2 A_2(t)}, \quad a \leq t < \mu \quad (31)$$

を得る。プレイヤー 2 についても同様である。 \square

定理 1: 各プレイヤーについての最適混合戦略は

$$F_1^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a, \\ \int_a^x h_1(t)dt + \alpha_1 I(x), & a \leq x \leq \mu, \\ 1, & \mu < x < T_{LC}, \end{cases} \quad (32)$$

$$F_2^*(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y < a, \\ \int_a^y h_2(t)dt + \alpha_2 I(y), & a \leq y \leq \mu, \\ 1, & \mu < y < T_{LC} \end{cases} \quad (33)$$

となる. α_i ($i = 1, 2$) はマスパートであり,

$$\alpha_i = 1 - \int_a^\mu h_i(t)dt \quad (34)$$

によって与えられ, $I(z)$ は定義関数

$$I(z) = \begin{cases} 1, & z = \mu, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (35)$$

である.

定理 2: 期待利得は, $M_i(F_1^*, F_2^*) = g_i(a)$ ($i = 1, 2$) である.

証明: プレイヤー 1 について次の 4 つの場合を考える. (i) $x < a$, (ii) $a \leq x < \mu$, (iii) $x = \mu$, (iv) $\mu < x < T_{LC}$. (i) の場合, 式 (8) と補題 1 から,

$$M_1(x, F_2^*) = g_1(x) < g_1(a) \quad (36)$$

が成り立つ. (ii) の場合, F_2^* が一階の最適性条件を満たしていることから, $a \leq x < \mu$ において $M_1(x, F_2^*)$ は一定であり, 式 (28) に $x = a$ を代入すると,

$$M_1(a, F_2^*) = p_1 A_1(a) - C_1(a) = g_1(a) \quad (37)$$

となる. (iii) の場合, 式 (5) と式 (33) を用いて,

$$\begin{aligned} M_1(x, F_2^*) &= \int_a^\mu \{p_1 \bar{A}_2(y) A_1(x) - C_1(x)\} dF_2^* \\ &= \frac{c_1(\mu) + g_1(a)}{A_1(\mu)} A_1(x) - C_1(x) - p_1 A_1(x) A_2(\mu) \alpha_2 \end{aligned} \quad (38)$$

となるため, これより $x = \mu$ を代入すると,

$$M_1(\mu, F_2^*) = g_1(a) - p_1 A_1(\mu) A_2(\mu) \alpha_2 \leq g_1(a). \quad (39)$$

(iv) の場合, $G_2(x) = \{C_1(x) + g_1(a)\}/A_1(x)$ と定義すると, 式 (38) から,

$$\frac{g_1(a) - M_1(x, F_2^*)}{A_1(x)} = G_2(x) - G_2(\mu) + p_1 A_2(\mu) \alpha_2 \quad (40)$$

となる. ここで, $G_2(x)$ を x について微分すると,

$$G_2'(x) = \frac{C_1'(x) A_1(x) - A_1'(x) \{C_1(x) + g_1(a)\}}{\{A_1(x)\}^2} = -p_1 A_2(x) h_2(x) \quad (41)$$

を得る. 式 (41) の分子を $J_2(x)$ とおけば, $J_2(x)$ を x について微分することで,

$$J_2'(x) = C_1''(x) A_1(x) - A_1''(x) \{C_1(x) + g_1(a)\} \quad (42)$$

を得る。仮定2と $C_i(t), A_i(t)$ の特性から, $J'_2(x)$ は必ず正であるため, $G'_2(x)$ は x についての増加関数である。したがって, 仮定1から

$$G_2(x) - G_2(\mu) + p_1 A_2(\mu) \alpha_2 \geq 0 \quad (43)$$

となる。式(40)と式(43)から, 必ず $M_1(x, F_2^*) \leq g_1(a)$ となる。

以上4つの場合から, 全ての x について,

$$M_1(x, F_2^*) \leq g_1(a) \quad (44)$$

である。式(20)と(21)から必ず $\alpha_1 \alpha_2 = 0$ なので, 期待利得は

$$M_1(F_1^*, F_2^*) = \int_a^\mu M_1(x, F_2^*) dF_1^* = g_1(a) - p_1 A_1(\mu) A_2(\mu) \alpha_1 \alpha_2 = g_1(a) \quad (45)$$

となる。プレイヤー2についても同様である。□

5 数値例

本節では, 実際に最適混合戦略と期待利得を数値的に導出する。表1ではパラメータを $N_1(t) = 34(1 - e^{-0.06t})$, $N_2(t) = 50(1 - e^{-0.06t})$, $A_i(t) = 0.055t^{0.4}(1 - 0.0005t)$, $c_{1i} = 1, c_{2i} = 5, c_{3i} = 30$ ($i = 1, 2$), $T_{LC} = 2000$ と設定し, $p_1 = p_2$ の値を変化させた場合の各戦略のサポート a, μ と期待利得を示している。また, 導出した $f_i^*(t)$ に基づいて計算された出荷時刻の期待値 $E[T_i]$, 及び各プレイヤーが相手の存在を考慮に入らずに利得を最大化しようとする場合の最適出荷時刻 τ_i を示した。表1では, プレイヤー1の初期残存フォールト数を少なく設定したことにより, プレイヤー1の期待利得の方が大きくなっていることを確認できる。加えて, 競争相手を考慮して混合戦略を選んだ場合は, 単純に利得を最大にする場合よりも早く行動を起こす必要があり, τ_i が各プレイヤーの混合戦略の台に含まれていないことが見て取れる。表2では, パラメータを $p_1 = p_2 = 10000$, $N_2(t) = 34(1 - e^{-0.06t})$ に変更し, 各プレイヤーが等しいパラメータを持つとした上で, c_{22} 及び c_{32} を変化させた際の感度分析を行った。ここでは, 各パラメータが等しい場合の期待利得を100%として, その変化割合を表示している。これより, c_{22} を変化させた場合のプレイヤー2の期待利得の減少は c_{32} を変化させた場合よりも顕著であり, c_{2i} が期待利得に与える影響の方が大きいことが見て取れる。

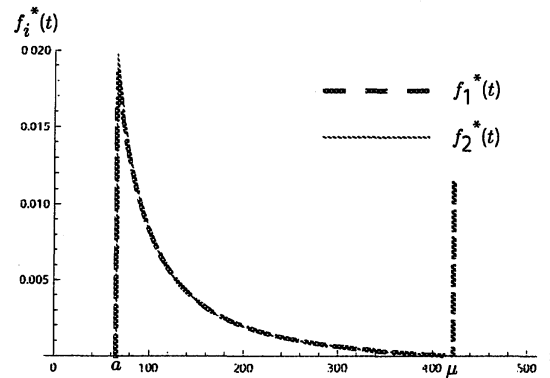
更に, 表2と同様の設定の下で $c_{22}/c_{21} = 5$ としたときの最適混合戦略の確率密度関数の形状を図1に示す。いずれの確率密度関数 $f_i^*(t)$ も a から μ の範囲でのみ正の値を持つことが確認でき, プレイヤー1のみマスパートを持っていることも確認できる。

表1: ソフトウェアリリースゲームにおける期待利得

$p_1 = p_2$	$a_1 [a]$	a_2	$\bar{\mu}_1 [\mu]$	$\bar{\mu}_2$	$g_1(a)$	$g_2(a)$	$E[T_1](\tau_1)$	$E[T_2](\tau_2)$
10000	65.691	65.250	421.452	421.754	2584.81	2497.04	130.50(467.57)	132.69(467.57)
12000	67.826	67.491	441.908	442.106	3192.08	3105.25	136.31(483.16)	137.97(483.16)
14000	69.496	69.230	457.468	457.606	3801.65	3715.47	140.77(494.69)	142.09(494.69)
16000	70.834	70.616	469.697	469.799	4412.76	4327.06	144.30(503.56)	145.39(503.56)
18000	71.928	71.744	479.560	479.638	5024.95	4939.61	147.17(510.60)	148.08(510.60)

表 2: c_{22} 及び c_{32} を変化させた場合の期待利得の変化

c_{22}/c_{21}	$g_1(a)$	$g_2(a)$	c_{32}/c_{31}	$g_1(a)$	$g_2(a)$
1	2577.82 (100.0 %)	2577.82 (100.0 %)	1	2577.82 (100.0 %)	2577.82 (100.0 %)
2	2577.82 (100.0 %)	2411.21 (93.5 %)	3	2610.04 (101.2 %)	2574.08 (99.9 %)
3	2577.82 (100.0 %)	2244.60 (87.1 %)	5	2635.8 (102.2 %)	2570.83 (99.7 %)
4	2577.82 (100.0 %)	2077.99 (80.6 %)	7	2657.31 (103.1 %)	2567.93 (99.6 %)
5	2577.82 (100.0 %)	1911.38 (74.1 %)	9	2675.80 (103.8 %)	2565.32 (99.5 %)

図 1: 最適混合戦略の確率密度関数の形状 ($c_{22}/c_{21} = 5$)

6 まとめと今後の展望

本稿では、参考文献 [1] と [2] で考えられた Silent タイプのソフトウェアリリースゲームについて厳密な最適混合戦略と期待利得を構築した。今後の課題としては、互いに相手の出荷を認知することが出来るという条件を持つ noisy ゲームにおいても、本稿と同様の観点の下で最適混合戦略ならびに期待利得を導出する。

参考文献

- [1] Zeephongsekul, P., and Ciera, C., Optimal Software Release Policy Based on a Two-Person Game of Timing, *Journal of Applied Probability*, Vol. 32, pp470-481, 1995.
- [2] T, Dohi., Y, Teraoka., and S, Osaki., Software Release Games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 105, No. 2, pp325-346, 2000.