数理解析研究所講究録
第 1802 巻 2012 年 263-267

条件付き本質的上限と最適停止

広島市立大学大学院情報科学研究科システム工学専攻修士課程 2 年
藤下祐亮 (Yuusuke Fujishita)
広島市立大学大学院情報科学研究科システム工学専攻
田中輝雄 (Teruo Tanaka)
Department of Systems Engineering,
Graduate School of Information Sciences,
HIROSHIMA CITY UNIVERSITY

1 はじめに

本質的上限を評価基準とする離散時間最適停止問題について述べる．条件付き本質的上限は，[2], [4] で研究されており，特に，[2] では本質的上限を評価基準とする離散時間最適停止問題が研究されており，確率過程論でのマルチンゲール，優マルチンゲール，劣マルチンゲールに対応する概念として，maxingale, supermaxingale, submaxingale の概念を導入した．また，ワーストサンプルパスを制御する確率制御問題への応用が述べられており，この問題は，確率的ターゲット問題（例えば，[5], [6]）とも関連がある．期待値を評価基準とする最適停止問題では，極限と積分の順序変更やマルチンゲールの収束定理等の時間に関する極限操作がよく用いられるが，本質的上限の場合は極限操作に関していろいろな難点がある（[2]）．

本論文では，[3] に従い，本質的上限を評価基準とする離散時間最適停止問題に対する単調条件，最適方程式，最適停止規則，ε–最適等について述べる．

2 条件付き本質的上限

$\mathbf{N} \equiv \{0,1,2,\cdots\}$，$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間とする．$\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbf{N}\}$ をフィルトレーションとし，$\mathcal{F}_0$ はすべての P–零集合を含むとし，また，以下で考える $\mathcal{F}$ の部分 σ–加法族はすべての P–零集合を含むとする．

Definition 2.1 ([2, 4]) $S \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ となる非負値確率変数 S，$\mathcal{F}$ の部分 σ–加法族 $\mathcal{G}$ に対して，

$$M(S \mid \mathcal{G}) \equiv \sup_{p \geq 1} E[S^p \mid \mathcal{G}]^{\frac{1}{p}} = \lim_{p \to \infty} E[S^p \mid \mathcal{G}]^{\frac{1}{p}}$$

を $\mathcal{G}$ が与えられたときの S の条件付き本質的上限という．

Proposition 2.1 ([2, 4]) 以下が成立する．

(1) $S \leq M(S \mid \mathcal{G})$.

(2) $E[S \mid \mathcal{G}] \leq M(S \mid \mathcal{G})$.

(3) $M(S \mid \mathcal{G}) = \operatorname{ess\,inf}\{T : T \geq S,\ T : \mathcal{G}\text{–可測}\}$.

(4) $\mathcal{F}$ の部分 σ–加法族 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 (\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2)$ に対して，

$$M(M(S \mid \mathcal{G}_1) \mid \mathcal{G}_2) = M(M(S \mid \mathcal{G}_2) \mid \mathcal{G}_1) = M(S \mid \mathcal{G}_1).$$

(5) 非負値 $S', S'' \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して，

$$M(\max(S', S'') \mid \mathcal{G}) = \max(M(S' \mid \mathcal{G}), M(S'' \mid \mathcal{G})).$$

(6) $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族 $\mathcal{G}, \mathcal{H}(\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H})$ に対して，$M(S \mid \mathcal{H}) \leq M(S \mid \mathcal{G})$.

(7) $\mathcal{G}$-可測非負値 $T \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して，$M(TS \mid \mathcal{G}) = TM(S \mid \mathcal{G})$.

(8) 任意の $G \in \mathcal{G}$ に対して，$M(S \mid \mathcal{G}) = M(1_G S \mid \mathcal{G}) + M(1_{G^c} S \mid \mathcal{G})$.

(9) $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbf{N}\}$ に関する停止規則 τ に対して，

$$M(S1_{\{\tau=n\}} \mid \mathcal{F}_\tau) = 1_{\{\tau=n\}} M(S \mid \mathcal{F}_\tau) = 1_{\{\tau=n\}} M(S \mid \mathcal{F}_n) = M(S1_{\{\tau=n\}} \mid \mathcal{F}_n).$$

(10) 任意の $G \in \mathcal{G}$ に対して，$\operatorname{ess\,sup}_G M(S \mid \mathcal{G}) = \operatorname{ess\,sup}_G S$.

(11) 非負値確率変数の増大列 $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ が $\lim_{n\to\infty} S_n \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty} M(S_n \mid \mathcal{G}) = M(\lim_{n\to\infty} S_n \mid \mathcal{G}).$$

(12) 任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して，

$$M(a + S \mid \mathcal{G}) = a + M(S \mid \mathcal{G}), \quad M(\min(a, S) \mid \mathcal{G}) = \min(a, M(S \mid \mathcal{G})).$$

(13) $G = \sigma(\{$ すべてのP-零集合 $\})$ のとき，$M(S \mid \mathcal{G}) = ||S||_{L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P)}$.

Remark 2.1 ([2]) 非負値確率変数の減少列 $\{S_n\}_{n=0}^\infty \subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} M(S_n \mid \mathcal{G}) = M(\lim_{n\to\infty} S_n \mid \mathcal{G})$$

は一般には成立しない.

3 maxingale

Definition 3.1 ([2]) $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}(\subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P))$ を非負値，$\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbf{N}\}$-適合確率過程とする.

(1) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$M(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n \quad P$-*a.e.* のとき，$\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ を *submaxingale* という.

(2) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$M(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n \quad P$-*a.e.* のとき，$\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ を *supermaxingale* という.

(3) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$M(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \quad P$-*a.e.* のとき，$\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ を *maxingale* という.

Remark 3.1 ([2]) *(1)* これらの概念は，確率過程論におけるマルチンゲールに対応する概念である．マルチンゲール理論におけるマルチンゲールの収束定理や任意抽出定理等は，*maxingale* の場合は一般には成立しない.

(2) 非負値 $S \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して，$X_n \equiv M(S \mid \mathcal{F}_n)$ とおくと，$\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ は *maxingale* になり，$\lim_{n\to\infty} X_n \quad P$-*a.e.* は存在するが，$\lim_{n\to\infty} X_n = M(S \mid \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n))$ は一般には成立しない.

4 最適停止問題

$\overline{\mathbf{N}} \equiv \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{F}_0 = \sigma(\{$ すべてのP–零集合 $\})$ とし，$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$ とする．$\mathcal{G} = \sigma(\{$ すべてのP–零集合 $\})$ のとき，$M(S) \equiv M(S \mid \mathcal{G})$ とおく．$\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbf{N}\}$ に関する有限停止規則 $\tau : \Omega \to \mathbf{N}$ の全体を C，停止規則 $\tau : \Omega \to \overline{\mathbf{N}}$ の全体を $\overline{C}$ で表す．次の二つの問題を考える．

非負実数値確率過程 $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}(\subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P))$ に対して，

$$(A) \qquad \inf_{\tau \in C} M(X_\tau) = M(X_{\tau^*})$$

となる $\tau^* \in C$ を求める．

非負実数値確率過程 $\{X_n, n \in \overline{\mathbf{N}}\}(\subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P))$ に対して，

$$(B) \qquad \inf_{\tau \in \overline{C}} M(X_\tau) = M(X_{\overline{\tau}^*})$$

となる $\overline{\tau}^* \in \overline{C}$ を求める．但し，$X_\infty \equiv \liminf_{n\to\infty} X_n$.

以下では，確率過程 $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ は非負値で，$\{X_n, n \in \mathbf{N}\} \subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 満たすとする．

5 後ろ向き解法

$N \in \mathbf{N}$ を固定して，$\{X_n, n = 0, 1, \ldots, N\}$ に対して，有限期間に制限した場合の問題 (A) を考える．$\{r_n^N, n = 0, 1, \ldots, N\}$ を以下で定める：

$$\begin{aligned} r_N^N &\equiv X_N, \\ r_n^N &\equiv \min\{X_n, M(r_{n+1}^N \mid \mathcal{F}_n)\},\ n = 0, 1, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

Theorem 5.1 **([2])** 以下が成立する．

(1) $\{r_n^N, n = 0, 1, \ldots, N\}$ は，$Y_n \le X_n$ を満たす *submaxingale* $\{Y_n, n = 0, 1, \ldots, N\}$ のなかで最大なものである．

(2) $\tau^* \equiv \min\{n | X_n = r_n^N\}$ とおくとき，$\{r_{\min(n,\tau^*)}^N, n = 0, 1, \ldots, N\}$ は *maxingale* である．

(3) $r_n^N = \operatorname{ess\,inf}_{\,n \le \tau \le N} M(X_\tau \mid \mathcal{F}_n)$.

(4) *(2)* の τ は最適停止規則である．

6 単調条件

Definition 6.1 **([3])** $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ が，

$$\begin{aligned} &A_n \equiv \{M(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \ge X_n\}, n \in \mathbf{N}, \\ &A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots, \\ &\cup_{n=0}^\infty A_n = \Omega \end{aligned}$$

を満たすとき，単調条件を満たすという．

Theorem 6.1 $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ が単調条件を満たすとし，$s \equiv \inf\{n \in \mathbf{N} | M(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \ge X_n\}$ とおく．このとき，任意の $n \in \mathbf{N}$, $A \in \mathcal{F}_n$ に対して，

$$\limsup_{m\to\infty} M(1_{A \cap \{\tau \ge m+1\}} X_m) \le M(1_{A \cap \{\tau \ge n\}} X_\tau)$$

を満たす任意の $\tau \in C$ に対して，

$$M(X_s) \le M(X_\tau)$$

が成立する．

7 Snell包

$\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ に対して，$\{r_n, n \in \mathbf{N}\}$ を以下で定める：

$$r_n \equiv \operatorname*{ess\,inf}_{\tau \geq n, \tau \in C} M(X_\tau \mid \mathcal{F}_n).$$

Theorem 7.1 (最適方程式, [2])

$$r_n = \min\{X_n, M(r_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\}.$$

Definition 7.1 (admissibleな停止規則, [3]) $\tau \in C$ が，$n \in \mathbf{N}$ に対して，

$$\tau > n \text{ ならば } M(X_\tau \mid \mathcal{F}_n) < X_n$$

を満たすとき，τ は *admissible* という．

Theorem 7.2 $\tau^* \equiv \inf\{n \in \mathbf{N} | X_n = r_n\}$, $\inf \emptyset = \infty$ とおく．このとき，τ^* が *admissible* であり，C に属するならば τ^* は問題 *(A)* の最適停止規則である．

Definition 7.2 (C–regular submaxingale, [3]) $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbf{N}\}$-適合, 非負値確率過程 $\{y_n\}(\subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P))$ が，任意の $\tau \in C$ に対して，

$$M(y_\tau \mid \mathcal{F}_n) \geq y_n \text{ on } \{\tau \geq n\}, \ {}^\forall n$$

を満たすとき，$\{y_n\}$ を *C–regular submaxingale* という．

Theorem 7.3 $\{r_n\}$ は *C–regular submaxingale* である．

確率過程 $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ に対して，$X_\infty \equiv \liminf_{n\to\infty} X_n$ と定め，$\{X_n, n \in \overline{\mathbf{N}}\}$ を考える．$\{\overline{r}_n, n \in \mathbf{N}\}$ を以下で定める：

$$\overline{r}_n \equiv \operatorname*{ess\,inf}_{\tau \geq n, \tau \in \overline{C}} M(X_\tau \mid \mathcal{F}_n).$$

Theorem 7.4 (最適方程式)

$$\overline{r}_n = \min\{X_n,\ M(\overline{r}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\}.$$

Theorem 7.5 *(1)* $\overline{\tau}^* \equiv \inf\{n \in \mathbf{N} | X_n = \overline{r}_n\}$ とおくと，$\overline{\tau}^*$ は問題 *(B)* の最適停止規則である．

(2) $\inf_{\tau \in C} M(X_\tau) < \infty$, $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ ならば，$P(\overline{\tau}^* < \infty) = 1$ である．

8 ε–最適

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$M(X_{\tau(\varepsilon)}) \leq \inf_{\tau \in C} M(X_\tau) + \varepsilon$$

を満たす $\tau(\varepsilon) \in C$ を ε–最適停止規則という．

Theorem 8.1 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\tau(\varepsilon) \equiv \inf\{n \in \mathbf{N} | X_n \leq r_n + \varepsilon\}$$

とおくと，$\tau(\varepsilon)$ は ε–最適停止規則である．

References

[1] 穴太克則 : タイミングの数理. 朝倉書店 (2000)

[2] Barron, E.N., Cardaliaguet, P. and Jensen, R. : Conditional essential suprema with applications. Appl. Math. Optim. 48, 229–253 (2003)

[3] Chow, Y.S., Robbins, H. and Siegmund, D. : Great Expectations : The Theory of Optimal Stopping. Houghton–Mifflin, Boston (1971)

[4] Evans, S.N. and Lidman, T. : Expectation, conditional expectation and martingales in local fields. Electronic Journal of Probability 12, 498–515 (2007)

[5] Soner, H.M. and Touzi, N. : Stochastic target problems, dynamic programming, and viscosity solutions. SIAM J. Control Optim. 41, 404–424 (2002)

[6] Soner, H.M. and Touzi, N. : Dynamic programming for stochastic target problems and geometric flows. J. Eur. Math. Soc. 4, 201–236 (2002)