

Enhanced binding for the semi-relativistic Nelson model

信州大学理学部数理・自然情報科学科* 佐々木 格 (Itaru Sasaki)
Department of Mathematical Sciences, Shinshu University

概要

本原稿は 2011 年 9 月 13 日に京都大学数理解析研究所で行われた筆者の講演の内容をまとめたものである。ここでは多体の準相対論的 Nelson モデルにおける Enhanced binding(束縛強化)の証明を, 第一ステップとなる massive Hamiltonian に対する局在評価 (localization estimate) について主眼を当てて解説する。残りのステップについては手短かに説明する。

1 準相対論的 Nelson モデルと束縛強化

N 個の相対論的粒子が質量 0 のボソンと相互作用する量子系を考える。以後, 粒子といえばこの「相対論的粒子」を意味するものとする。粒子は外部ポテンシャル $V(x)$ と相互作用をする。例えば $V(x)$ は有限領域に固定された核子によるポテンシャルを想定している。 $V(x)$ の典型的な例は湯川型ポテンシャル $-Ce^{-\mu|x|}/|x|$ である。このため V には $V(x) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$) の条件を課す。

粒子間の直接の相互作用ポテンシャルはないものとする。粒子はボース場と相互作用し, ボース場との相互作用を通して 2 次的に粒子間相互作用が発生する。

粒子のハミルトニアンは

$$H_p^V = \sum_{j=1}^N (\Omega_j(p_j) + V(x_j)) \quad (1)$$

で定義される。ここに $\Omega_j(p) = \sqrt{p^2 + m_j^2} - m_j$ は j 番目の粒子の相対論的運動エネルギーを表す。 $p_j = -i\nabla_{x_j}$ は j 番目の粒子の運動量, $m_j \geq 0$ は j 番目の粒子の質量である。ハ

* ファイバーナノテク国際若手研究者育成拠点

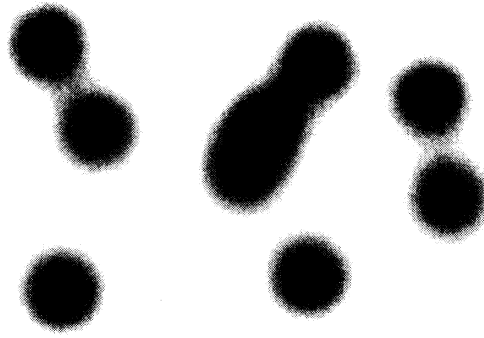


図1 粒子とボソンとの相互作用のイメージ

ミルトニアン (1) はヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ に作用する自己共役作用素である。ここでは N 粒子の間に対称・反対称などの統計は課さないことにする。

ボソンも含めた Nelson モデルのハミルトニアンは

$$H^V(\kappa) := H_p^V \otimes I + \kappa^2 I \otimes H_f + \kappa H_I \quad (2)$$

で与えられるヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{dN}) \otimes \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の作用素である。ここに $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n L^2(\mathbb{R}^d)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のボソンフォック空間である。 $\kappa > 0$ はスケールリング・パラメーターである。ハミルトニアン (2) において H_f は自由なボース場のハミルトニアンであり、 $a^*(k), a(k)$ を用いて $\int_{\mathbb{R}^d} |k| a^*(k) a(k) dk$ と定義される。 H_I は粒子とボース場との相互作用であり

$$H_I = \sum_{j=1}^N \alpha \int_{\mathbb{R}^{dN}}^{\oplus} \phi_j(x_j) dX, \quad (dX = dx_1 \cdots dx_N) \quad (3)$$

$$\phi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^d} (a^*(k) \hat{\lambda}_j(-k) e^{-ikx} + a(k) \hat{\lambda}_j(k) e^{ikx}) dk \quad (4)$$

と定義される。関数 $\hat{\lambda} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ($\hat{\lambda}(k) \geq 0$) は紫外切断であり、この条件により (2) は自己共役作用素となる。ここではさらに条件 $|k|^{-1} \hat{\lambda} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ を課すことによりモデルを赤外正則であるようにしておく。後者の条件が無い限り Nelson モデルにおいては一般的に基底状態が存在しない (cite)。

束縛強化というのは具体的には次の現象を証明することである。まず粒子とボース場との相互作用が無い場合には外部ポテンシャル $V(x)$ が非常に弱いとき——上の例でいえば $C > 0$ が小さいとき——粒子は外部ポテンシャルに束縛されず H_p^V は基底状態を持たない。 V は1粒子を束縛できないほど非常に小さいが $|-i\nabla| + NV(x)$ が基底状態を持ち得る

程度に大きい事を仮定しておく。つぎに粒子がボース場と相互作用するとき、 N 個の粒子の間にはボース場との相互作用を通じて作られた有効ポテンシャルが形成される。この有効ポテンシャルが引力的ならば、 N 個の粒子は互いに引きつけ合い、まるで一つの粒子として振る舞うと予想できる。こうして N 個の粒子は質量 $\sum_j m_j$ を持ち、外部ポテンシャルから $NV(x)$ の力を受ける一つの粒子としてふるまい、外部ポテンシャルにトラップされることになる。すなわち全系の基底状態が存在する。このように、非摂動系に基底状態が無いにもかかわらず、場との相互作用によって系に基底状態が生まれる現象を束縛強化 (enhanced binding) と呼ぶ。

2 Dressing 変換と有効ポテンシャル

オリジナルのハミルトニアンに含まれていない粒子同士の相互作用を、それがあらわにハミルトニアンに表れるようにする変換の (の一つ) が次の Dressing 変換である。 \mathcal{H} 上のユニタリ変換 $T(\kappa)$ を

$$T(\kappa) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{\kappa} \sum_{j=1}^N \pi_j\right) \quad (5)$$

$$\pi_j = \int_{\mathbb{R}^{dN}}^{\oplus} dX \frac{i}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^d} dk (a^*(k)e^{-ikx} \hat{\lambda}_j(-k) - a(k)e^{ikx} \hat{\lambda}_j(k)) |k|^{-1} \quad (6)$$

によって定義する。赤外正則条件 $|k|^{-1} \hat{\lambda} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ により π_j は \mathcal{H} 上の自己共役作用素を定義し、確かに $T(\kappa)$ はユニタリとなる。このユニタリ変換 $T(\kappa)$ は $H^V(\kappa)$ の定義域をそれ自身に移し、ハミルトニアン $H^V(\kappa)$ を次の形をとる作用素に変換する：

$$T(\kappa)H^V T(\kappa)^{-1} = h_{\text{eff}}^V \otimes I + \kappa^2 I \otimes H_f + H_R(\kappa) \quad (7)$$

ここに h_{eff}^V は粒子間相互作用を持つ Schrödinger タイプの作用素で

$$h_{\text{eff}}^V = \sum_{j=1}^N (\Omega_j(p_j) + V(x_j)) + V_{\text{eff}} \quad (8)$$

であり有効二体相互作用

$$V_{\text{eff}} = \alpha^2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} W_{ij}(x_i - x_j), \quad (9)$$

$$W_{ij}(x) = - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{\lambda}_i(-k) \hat{\lambda}_j(k)}{|k|} e^{-ikx} dk \quad (10)$$

を持つ。(7)の最後の項は余剰項であり次式によって定義される：

$$H_R(\kappa) = \sum_{j=1}^N \left(\Delta\Omega_j - \frac{\alpha^2}{2} \| |k|^{-1} \hat{\lambda} \|^2 \right) \quad (11)$$

$$\Delta\Omega_j = \Omega_j(p_j + \frac{\alpha}{\kappa} A_j) - \Omega_j(p_j) \quad (12)$$

$$A_j = A_j(x_j) = \int_{\mathbb{R}^{dN}}^{\oplus} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^d} k (a^*(k) |k|^{-1} \hat{\lambda}_j(-k) e^{-ikx_j} + a(k) |k|^{-1} e^{ikx_j} \hat{\lambda}(k)) dk \right) dX. \quad (13)$$

(11)の和の第2項は定数であり、初項(12)は $\kappa \rightarrow \infty$ で0に強収束するので κ が十分大きいときにはこの作用素は無視できると予想できる。すなわち h_{eff}^V が基底状態を持てば、 κ が十分大きいときには $H^V(\kappa)$ も基底状態を持つことが予想される。しかし $H^V(\kappa)$ の基底エネルギーは連続スペクトルに含まれており通常の摂動論が使えないということと、 κ が大きくなると(7)の第2項が大きくなるということから、基底状態の存在は直ちには証明されない。変換したハミルトニアン(7)は有効ポテンシャルをあらわに含むので基底状態のエネルギーを評価する上では便利だが、平方根の中に非可換な作用素 $p_j, A_j(x)$ が入った複雑な作用素を持つので、後で説明する局在評価には不向きである。

3 主定理と証明のあらすじ

二体ポテンシャル(10)において被積分関数は可積分なので $W_{ij}(x)$ は遠方で減衰する有界関数であることがわかる。 $\hat{\lambda}(k) \geq 0$ と仮定する。すると $W_{ij}(x) > W_{ij}(0)$, ($x \neq 0$)なので有効ポテンシャル V_{eff} は引力的であり、 α が十分大きければ h_{eff}^V は基底状態を持つことが予想される。ここで外力ポテンシャル V , 切断関数 $\hat{\lambda}$ に対する仮定をまとめておく：

仮定 1. (a) $V(x)(-\Delta + 1)^{-1/2}$ コンパクト, $V(x)$ は下に有界かつ $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0$ 。

(b) $\sqrt{-\Delta + m_{\min}^2 + V}$ は基底状態を持たない。 $m_{\min} = \min_j \{m_j\}$ 。

(c) $\sqrt{-\Delta + NV}$ は負エネルギーの基底状態を持つ。

(d) $\hat{\lambda}_j \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ かつ $|k|^{-1} \hat{\lambda}_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, 2, \dots, N$ 。

(e) $\hat{\lambda}(k) \geq 0$ 。

以上の条件の下次の定理が成り立つ

定理 1. h_{eff}^V が離散的な基底状態を持つとする：

$$\inf \sigma(h_{\text{eff}}^V) \in \sigma_{\text{disc}}(h_{\text{eff}}^V). \quad (14)$$

このとき十分大きい $\kappa > 0$ に対して、正定数 $\alpha_c, \alpha_c(\kappa)$ が存在して、 $0 < \alpha_c < |\alpha| < \alpha_c(\kappa)$ なるすべての α に対して $H^V(\kappa)$ は基底状態を持つ。

上の定理の非相対論版、すなわち $\Omega_j = \frac{p_j^2}{2m}$ の場合、上と同様の定理はすでに証明されている ([3])。したがってこのモデルに対する課題は、既存の非相対論の場合の証明を技術的に改良し、相対論的なモデルへ拡張することである。非相対論的モデルに対する束縛強化では上の仮定 1.(c) 代わりに $-\Delta/2mN + NV$ が基底状態を持つことを仮定した。この仮定は、 N 粒子が質量 Nm をもつひとかたまりの粒子として運動するという直感にあっている。一方、仮定 1(c) では作用素が記述する粒子の質量は 0 であることが仮定されている。直感的な描像に従うならば、これは $\sqrt{-\Delta + (\sum_{j=1}^N m_j)^2} - \sum_{j=1}^N m_j + NV(x)$ に置き換わるはずだが、そのようにうまく改良することはできなかった。原因は運動量作用素が平方根の中に入っているため、Jacobi 座標系によって重心運動を作用素の和として分離できないことにある。しかしながら、より精密な解析によりこの部分を改良する余地は残っていると思う。基底状態の存在証明は基本的には [1] および [2] によって始めに Pauli-Fierz 模型に対して開発された方法を用いる。すなわち、まず第一のステップとして赤外領域にあるボソンと粒子との相互作用をカットした正則化ハミルトニアンを考え、それに対して局在評価 (localization estimate) を行うことにより基底状態の存在を証明する。このとき束縛条件 (binding condition) と呼ばれる、クラスターハミルトニアンの基底エネルギーについての不等式の成立を仮定するが、そのために特に必要となるのが仮定 1 の条件 (c),(e) である。第二のステップは赤外切断 (切断パラメーターを σ とする) されたハミルトニアンの基底状態 Φ_σ が切断を除去する極限 $\sigma \rightarrow 0$ であるベクトル Φ に強収束を示すことである。このとき一般的な議論によって Φ が $H^V(\kappa)$ の基底状態であることが示される。この段階で必要となるのが $\Phi_\sigma(X)$ が σ について一様に減衰していることであるが、論文 [2] と同じ方法は相対論的なモデルには適用できないため、汎関数積分を用いた評価を行った。これは一般的に Schrödinger 作用素の固有状態に対して Carmona 評価と呼ばれているものの Nelson 型モデルへの拡張である。

4 正則化ハミルトニアンと局在評価

粒子番号の部分集合 $\beta \subset \{1, 2, \dots, N\}$ に対してクラスターハミルトニアンを

$$H^0(\beta) = \sum_{j \in \beta} (\Omega_j + \alpha \kappa \phi_j(x_j)) + \kappa^2 I \otimes H_f \quad (15)$$

$$H^V(\beta) = H^0(\beta) + \sum_{j \in \beta} V(x_j) \quad (16)$$

$$E^\# = \inf \sigma(H^\#(\beta)), \quad \# = 0, V \quad (17)$$

と定義する。 H^V の基底エネルギーは特に E^V と書く。クラスターハミルトニアンのエネルギーのしきい値 Σ^V は

$$\Sigma^V = \min\{E^V(\beta) + E^0(\beta^c) \mid \beta \subseteq \{1, \dots, N\}\} \quad (18)$$

と定義される。定理 1 は次の命題を経由して行われる：

命題 1 (Nelson version of [2]). 仮定 1 の (a), (d) を仮定する。不等式 $E^V < \Sigma^V$ が成り立つならば H^V は基底状態を持つ。

上の命題の証明の最初のステップがハミルトニアンの正則化と局在評価である。ここでの正則化の方法は [1] に従う。ここで用いる正則化はボソンに質量を持たせる ($|k| \rightarrow \sqrt{k^2 + m^2}$ 代わりに、相互作用 $\hat{\lambda}$ の $|k|$ が小さい部分を切断する方法である。こちらを採用する利点は、切断 σ を除去する瞬間にハミルトニアンの定義域が変わらないことである。ボソンに質量を持たせた場合、 $m > 0$ のハミルトニアンの定義域は個数作用素のそれ含まれるが、 $m = 0$ ではそれが成り立たない。局在評価には κ は重要でないのでこの章では $\kappa = 1$ とする。

$\sigma > 0$ に対してボソンのヒルベルト空間を $L^2(\mathbb{R}^d) \cong \mathcal{K}_{>\sigma} \oplus \mathcal{K}_{\leq\sigma}$ と直和分解する。ここに $\mathcal{K}_{>\sigma} = L^2(\{k \in \mathbb{R}^d \mid |k| > \sigma\})$ である。この分解に対応してボソンフォック空間 $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d))$ は $\mathcal{F}(L^2(\mathcal{K}_{>\sigma})) \otimes \mathcal{F}(L^2(\mathcal{K}_{\leq\sigma}))$ に自然に同一視される。この同一視は $L^2(\mathbb{R}^d) \ni f = (f_1, f_2) \in \mathcal{K}_{>\sigma} \oplus \mathcal{K}_{\leq\sigma}$ となるすべての f に対して

$$a(f) \rightarrow a(f_1) \otimes I + I \otimes a(f_2), \quad \Omega \mapsto \Omega \otimes \Omega \quad (19)$$

を満たすユニタリ変換として実現される。上の同一視に応じて全系のヒルベルト空間は

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_{>\sigma} \otimes \mathcal{F}(\mathcal{K}_{\leq\sigma}), \quad (20)$$

と同一視される。ここに $\mathcal{H}_{>\sigma} = L^2(\mathbb{R}^{dN}) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{K}_{>\sigma})$ である。ハミルトニアン H^V 中の切断関数 $\hat{\lambda}(k)$ を $\hat{\lambda}_\sigma(k) = \hat{\lambda}(k)\mathbf{1}_{|k|>\sigma}$ に置き換えて得られる作用素を H_σ^V とする。 H_σ^V が H^V にノルム・レゾルベント収束することを示すのは容易である。(19) から、ハミルトニアンは次の様に同一視されることがわかる

$$H_\sigma^V \cong H_\sigma^V \upharpoonright_{\mathcal{H}_{>\sigma}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}(\mathcal{K}_{\leq\sigma})} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{>\sigma}} \otimes H_f \upharpoonright_{\mathcal{F}(\mathcal{K}_{\leq\sigma})}. \quad (21)$$

この事実は σ より小さい運動量を持つボソンは他の粒子と相互作用を行わず、自由に動くはずなのでその部分が H_f として第2項に自由なボソンのハミルトニアンとして現れたと解釈される。

これまではボソンを運動量表示で表してきたが、逆フーリエ変換を行い位置表示に変換する。ボソンの空間座標を y と書く。 $L^2(\mathbb{R}^d; dy)$ から $L^2(\mathbb{R}^d; dk)$ へのフーリエ変換を F とする。 $\check{\mathcal{K}}_{>\sigma} = \{F^{-1}f \in L^2(\mathbb{R}^d; dy) | f \in \mathcal{K}_{>\sigma}\}$ とおく。一般にヒルベルト空間 \mathcal{K}_1 から \mathcal{K}_2 への作用素 T に対して $\Gamma(T) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes^n T$ を $\mathcal{F}(\mathcal{K}_1)$ から $\mathcal{F}(\mathcal{K}_2)$ への作用素とする。ただし $\otimes^0 T = \mathbf{1}$ とする。これを用いて位置表示のボソンによるハミルトニアンは

$$\check{H}_\sigma^V = \Gamma(F^{-1})H_\sigma^V\Gamma(F) \quad (22)$$

と定義される。これは $\check{\mathcal{H}}_{>\sigma} = L^2(\mathbb{R}^{dN}) \otimes \mathcal{F}(\check{\mathcal{K}}_{>\sigma})$ 上の作用素である。

$\chi, \bar{\chi} \in C^\infty(\mathbb{R}^{dN}; \mathbb{R})$ を次の条件を満たす作用素とする

$$\chi(X)^2 + \bar{\chi}(X)^2 = 1 \quad (23)$$

$$\chi(X) = 1 \text{ for } |X| \leq 1, \quad \chi(X) = 0 \text{ for } |X| > 2 \quad (24)$$

$\chi_R(X) := \chi(X/R)$, $\bar{\chi}_R(X) := \bar{\chi}(X/R)$ と定義する。 χ_R の台は N 個すべての粒子が原点付近の R 近傍にいることを表し、 $\bar{\chi}_R$ の台は少なくとも一つ以上の粒子が原点より R 以上離れていることを意味する。

次の補題が粒子に関する局在評価である：

補題 1. 作用素の関係式

$$\check{H}_\sigma^V = \chi_R \check{H}_\sigma^V \chi_R + \bar{\chi}_R \check{H}_\sigma^V \bar{\chi}_R + \hat{O}(R^{-1}),$$

が成り立つ。ここに $\hat{O}(R^{-1})$ は $\|\hat{O}(R^{-1})\| \leq C/R$ (C は R によらない定数) を満たす作用素である。

補題を示すには次の様にする。まず作用素の等式

$$\check{H}_\sigma^V = \chi_R \check{H}_\sigma^V \chi_R + \bar{\chi}_R \check{H}_\sigma^V \bar{\chi}_R + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\chi_R, [\chi_R, \check{H}_\sigma^V]] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\bar{\chi}_R, [\bar{\chi}_R, \check{H}_\sigma^V]]. \quad (25)$$

が成り立つ。 \check{H}_σ^V の中で X と可換でないのは $\Omega_j(p_j)$ だけなので

$$= \chi_R \check{H}_\sigma^V \chi_R + \bar{\chi}_R \check{H}_\sigma^V \bar{\chi}_R + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\chi_R, [\chi_R, \Omega_j(p_j)]] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\bar{\chi}_R, [\bar{\chi}_R, \Omega_j(p_j)]]. \quad (26)$$

となる。交換子を評価したい。 χ_R の dN 次元フーリエ変換による表示を用いると

$$[\chi_R, \Omega_j(p_j)] = (2\pi)^{-dN/2} \int_{\mathbb{R}^{dN}} \hat{\chi}(K) e^{iK \cdot X/R} (\Omega_j(p_j) - \Omega_j(p_j - k_j/R)) dK, \quad (27)$$

となる ($K = (k_1, \dots, k_N)$)。 $|\Omega_j(p_j) - \Omega_j(p_j - k_j/R)| \leq |k_j|/R$ より (27) のノルムは $\int |\hat{\chi}(K)| \cdot |k_j| dK/R$ によって押さえられる。 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{dN})$ よりこの積分は有限である。同様に $\bar{\chi}_R$ の交換子も評価することができるが、このときは $[\bar{\chi}_R, \Omega_j(p_j)] = [1 - \bar{\chi}_R, \Omega_j(p_j)]$ であり、 $1 - \bar{\chi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{dN})$ であることに注意すればよい。

次にボソンの局在評価について説明する。 $j, \bar{j} \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ を滑らかな関数であり、 $j(y)^2 + \bar{j}(y)^2 = 1$ かつ

$$j(y) = 1 \text{ for } |y| \leq 1, \quad j(y) = 0 \text{ for } |y| \geq 2 \quad (28)$$

を満たすものとする。定数 $P > 0$ に対して $j_P(y) = j(y/P)$, $\bar{j}_P(y) = \bar{j}(y/P)$ と置く。写像 $u_P : \check{\mathcal{K}}_{>\sigma} \ni f \mapsto (j_P f, \bar{j}_P f) \in L^2(\mathbb{R}^d; dy) \oplus L^2(\mathbb{R}^d; dy)$ は等長写像である。 $U_P := \Gamma(u_P)$ と定義するとこれは $\check{\mathcal{H}}_{>\sigma}$ から $\check{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d; dy))$ への等長写像である。 $\omega_\sigma(k) = |k| \mathbf{1}_{|k|>\sigma}$ と置く。次の補題がボソンの局在評価である

補題 2. 任意の $\sigma > 0$ に対して

$$\chi_R \check{H}_\sigma^V \chi_R = \chi_R U_P^* \{ \check{H}_\sigma \otimes I + I \otimes \check{H}_{f,\sigma} \} U_P \chi_R \quad (29)$$

が $\check{\mathcal{H}}_{>\sigma}$ 上の作用素の式として成立する。ここに $\check{H}_{f,\sigma} = U_{F^{-1}} d\Gamma(\omega_\sigma) U_F$, $d\Gamma(\omega_\sigma) = \int \omega_\sigma(k) a^*(k) a(k) dk$ であり $\delta(1)$ は有界作用素で

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \|\delta(1)(\check{H}_\sigma^V + C)^{-1}\| = 0 \quad (30)$$

を満たすものである。

補題の証明に入る前に次の事実に注意する。まず U_P の定義より

$$U_P a^*(f) U_P^* = a^*(j_P f) \otimes I + I \otimes a^*(\bar{j}_P f), \quad (31)$$

が成り立つ。この事から逆に

$$U_P^*(a^*(f) \otimes I) U_P = a^*(j_P f), \quad U_P^*(I \otimes a^*(f)) U_P = a^*(\bar{j}_P f) \quad (32)$$

が成り立つことがわかる。従って形式的に

$$U_P^* \check{H}_{f,\sigma} \otimes IU_P = \int_{\mathbb{R}^d} dy j_P(y) a^*(y) \cdot \check{\omega}_\sigma(j_P a)(y) = d\Gamma(j_P \check{\omega}_\sigma j_P) \quad (33)$$

$$U_P^* I \otimes \check{H}_{f,\sigma} U_P = d\Gamma(\bar{j}_P \check{\omega}_\sigma \bar{j}_P) \quad (34)$$

ここでは $\check{\omega}_\sigma$ は微分作用素であり $j_P a, \bar{j}_P a$ に作用していると考えた。さて補題 2 の証明の概略を述べる。まず関係式 (33), (34) より

$$\begin{aligned} U_P^* (\check{H}_{f,\sigma} \otimes I + I \otimes \check{H}_{f,\sigma}) U_P &= d\Gamma(j_P \check{\omega}_\sigma j_P + \bar{j}_P \check{\omega}_\sigma \bar{j}_P) \\ &= \check{H}_{f,\sigma} + d\Gamma(j_P [j_P, \check{\omega}_\sigma] + \bar{j}_P [\bar{j}_P, \check{\omega}_\sigma]) \end{aligned} \quad (35)$$

である。従って、すべての $\Psi \in D(\check{H}_\sigma^V)$ に対して

$$\|(\check{H}_{f,\sigma} - U_P^* (\check{H}_{f,\sigma} \otimes I + I \otimes \check{H}_{f,\sigma}) U_P) \Psi\| \leq (\| [j_P, \omega_\sigma] \| + \| [\bar{j}_P, \omega_\sigma] \|) \|N\Psi\|, \quad (36)$$

が成り立つ。ここに $N = d\Gamma(I)$ はボソンの個数作用素である。補題 1 の証明とほぼ同様の手順で

$$\|[\check{\omega}_\sigma, j_P]\| = \frac{1}{P} (2\pi)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{j}(k)| \cdot |k| dk \quad (37)$$

となることがわかる。また $\sigma > 0$ より $\|N\Psi\| \leq \|\check{H}_{f,\sigma} \Psi\|/\sigma$ なので結局 (36) は $\delta(1)$ となること示された。補題を示すためには相互作用項

$$\chi_R \phi_j(x_j) \chi_R = \chi_R U_P^* (\phi_j(x_j) \otimes I) U_P \chi_R + \delta(1). \quad (38)$$

を示す必要があるが、こちらは (32) から直接示すことができる。

次の補題は、少なくとも 1 個の粒子が遠方にいるときのエネルギーが Σ^V より小さいことを意味する

補題 3. 作用素の関係式

$$\bar{\chi}_R \check{H}_\sigma^V \bar{\chi} \geq \Sigma_\sigma^V + o(R^0) \quad (39)$$

が成り立つ。ただし Σ_σ^V はその定義の中で $\hat{\lambda}$ を $\hat{\lambda}_\sigma$ で置き換えて定義されるものである。

この補題の証明の記述的な部分は補題 2 と同じなので省略する。

正則化されたハミルトニアンに対する命題 1 の証明を行う。

H_σ^V に対する命題 1 の証明. 補題 1,2,3 より

$$\check{H}_\sigma^V = \chi_R \check{H}_\sigma^V \chi_R + \bar{\chi}_R \check{H}_\sigma^V \bar{\chi}_R + o(1) \quad (40)$$

$$= \chi_R U_P^* \{ \check{H}_\sigma^V \otimes I + I \otimes \check{H}_{f,\sigma} \} U_P \chi_R + \bar{\chi}_R \check{H}_\sigma^V \bar{\chi}_R + \hat{o}(1) \quad (41)$$

$$\geq \chi_R U_P^* \{ E_\sigma^V \otimes I + I \otimes \check{H}_{f,\sigma} \} U_P \chi_R + \Sigma_\sigma^V \bar{\chi}_R^2 + \hat{o}(1) \quad (42)$$

である。 $H_{f,\sigma}$ は下から $\sigma \times$ ボソンの個数と押さえられるので、 $H_{f,\sigma} \geq \sigma(1 - P_\Omega)$ である。ここに P_Ω は真空 Ω への直交射影を表す。したがって

$$\check{H}_\sigma^V \geq \phi_R^2 (E_\sigma^V + \sigma) \Sigma_\sigma^V + K + \hat{o}(1) \quad (43)$$

ここに $K = \sigma \chi_R U_P^* (I \otimes P_\Omega) U_P \chi_R = \chi_R^2 \otimes \Gamma(j_P)$ である。 χ_R も j_P も有界な台を持つので K は $\sum_{j_1}^N \Omega_j + \check{H}_{f,\sigma}$ に対して相対コンパクトである。故に K は \check{H}_σ^V に対しても相対コンパクトとなる。 $\hat{o}(1)$ の定義より P, R に無関係な定数 C があって $\hat{o}(1) \geq -o(1)(\check{H}_\sigma^V + C)$ が成り立つ。こうして作用素の不等式

$$(1 + o(1)) \check{H}_\sigma^V - E_\sigma^V + o(1) - K \geq \sigma \chi_R^2 + (\Sigma_\sigma^V - E_\sigma^V) \bar{\chi}_R^2 \geq \min\{\sigma, \Sigma_\sigma^V - E_\sigma^V\} \quad (44)$$

が成り立つ。 K は \check{H}_σ^V の真性スペクトルを変えないことに注意すると、すべての P, R に対して

$$(1 + o(1)) \inf(\sigma_{\text{ess}}(H_\sigma^V)) - E_\sigma^V \geq \min\{\sigma, \Sigma_\sigma^V - E_\sigma^V\} \quad (45)$$

となる。こうして $R \rightarrow \infty, P \rightarrow \infty$ の極限をとることにより

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(H_\sigma^V) - E_\sigma^V \geq \min\{\sigma, \Sigma_\sigma^V - E_\sigma^V\} > 0 \quad (46)$$

が示された。これは H_σ^V は基底エネルギー E_σ^V の近傍には真性スペクトルを持たないことを意味する。したがって H_σ^V は基底状態を持つ。□

5 $\sigma \rightarrow 0$ の極限

H^V の基底状態の存在は H_σ^V の基底状態 Φ_σ の $\sigma \rightarrow 0$ 強極限として構成される。 Φ_σ の強極限の存在証明は論文 [1, 2] の両方のやりかた混ぜた手法を用いる。このステップでも作用素の平方根特有の解析の複雑さがあるが、詳細は省略する。

6 E^V, Σ^V の評価

これまで Nelson モデルの基底状態の存在は $E^V < \Sigma^V$ の不等式に帰着されることを見た。この章では、これらのエネルギーの評価を有効ポテンシャルを持つ多体相対論的シュレーディンガー作用素のエネルギーに帰着することをみる。 h_{eff}^V に対するクラスターハミルトニアンを次の様に定義する。 $\beta \subset \{1, \dots, N\}$ に対して

$$h_{\text{eff}}^0 = \sum_{j \in \beta} \Omega_j(p_j) + V_{\text{eff}}(\beta) \quad (47)$$

$$h_{\text{eff}}^V = h_{\text{eff}}^0 + \sum_{j \in \beta} V(x_j) \quad (48)$$

と定義する。ここに

$$V_{\text{eff}}(\beta) = -\frac{\alpha^2}{2} \sum_{i, j \in \beta (i \neq j)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{\lambda}(-k) \hat{\lambda}(k)}{|k|} e^{-ik(x_i - x_j)} dk \quad (49)$$

である。これらのハミルトニアンの基底状態エネルギーとしきい値を

$$\mathcal{E}^0(\beta) = \inf \sigma(h_{\text{eff}}^0(\beta)), \quad \mathcal{E}^V(\beta) = \inf \sigma(h_{\text{eff}}^V(\beta)) \quad (50)$$

$$\mathcal{E}^V = \mathcal{E}^V(\{1, \dots, N\}), \quad \Xi^V = \min\{\mathcal{E}^V(\beta) + \mathcal{E}^0(\beta^c) \mid \beta \subsetneq \{1, \dots, N\}\} \quad (51)$$

で定義する。ドレス変換 (5) によってハミルトニアンは次の形に変換されることを思い出す。

$$\tilde{H}^V = T(\kappa) H^V T(\kappa)^{-1} = \sum_{j=1}^N \left\{ \Omega_j(p_j - \frac{\alpha}{\kappa} A_j) + V(x_j) - e_{\text{ren},j} \right\} + \kappa^2 H_f + V_{\text{eff}} \quad (52)$$

ここに

$$e_{\text{ren},j} = \frac{\alpha^2}{2} \|\kappa^{-1/2} \hat{\lambda}\|^2 \quad (53)$$

である。 E^0, E^V は $\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^V$ によって下からおさえられる

補題 4. すべての $\beta \subset \{1, 2, \dots, N\}$ に対して

$$\mathcal{E}^0(\beta) \leq E^0(\beta) + \sum_{j \in \beta} e_{\text{ren},j}, \quad \mathcal{E}^V(\beta) \leq E^V(\beta) + \sum_{j \in \beta} e_{\text{ren},j}, \quad (54)$$

この補題の汎関数積分を用いて証明される。詳しくは [4] を参照。一方、エネルギーの上界は次の補題で与えられる：

補題 5. すべての $\kappa > 0$ に対して

$$E^V \leq \mathcal{E}^V + \mathcal{G}(\alpha/\kappa) - \sum_{j=1}^N e_{\text{ren},j} \quad (55)$$

ここに

$$\mathcal{G}(t) = \sum_{j=1}^N t \|k\|^{-1} \hat{\lambda} \| \{ (\sqrt{2}m_j + t \|\lambda_j\|) + \sqrt{2}(c^V |\mathcal{E}^V| + d^V) \} \quad (56)$$

であり定数 c^V, d^V は $\| \sum_{j=1}^N \Omega_j \Psi \| \leq c^V \| h_{\text{eff}}^V \Psi \| + d^V \| \Psi \|$ を満たす定数である。

Proof. v を $\| (h_{\text{eff}}^V - \mathcal{E}^V) v \| \leq \epsilon$ を満たすベクトルとし, $\Psi = v \otimes \Omega$ とする。このとき

$$E^V \leq \langle \Psi, \bar{H}^V \Psi \rangle \leq \mathcal{E}^V + \epsilon + \left\langle \Psi, \sum_{j=1}^N (\Delta \Omega_j - e_{\text{ren},j}) \Psi \right\rangle \quad (57)$$

である。 $\Delta \Omega_j = T(\kappa) \Omega_j T(\kappa)^*$ なので

$$\begin{aligned} |\langle \Psi, \Delta \Omega_j \Psi \rangle| &\leq \left| \langle (T(\kappa) - 1) \Psi, \Omega_j T(\kappa) \Psi \rangle + \langle \Psi, \Omega_j (T(\kappa) - 1) \Psi \rangle \right| \\ &\leq \frac{\kappa}{\alpha} \|\pi_j \Psi\| \cdot \|\Omega_j T(\kappa) \Psi\| + \frac{\kappa}{\alpha} \|\pi_j \Psi\| \cdot \|\Omega_j \Psi\| \\ &\leq \frac{\alpha}{\sqrt{2}\kappa} \|k\|^{-1} \hat{\lambda} \left(\langle \Psi, (p_j + \alpha A_j / \kappa)^2 \Psi \rangle^{1/2} + \langle \Psi, p_j^2 \Psi \rangle^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

となる。場の演算子の真空期待値を計算し, c^V, d^V の定義を使えば (55) が得られる。 \square

補題 4,5 より次の命題が得られる

命題 2. $\Xi^V - \mathcal{E}^V > 0$ であると仮定する。 $\Sigma^V - \mathcal{E}^V > \mathcal{G}(\alpha/\kappa)$ となる α, κ に対して $\Sigma^V - \mathcal{E}^V > 0$ が成立する。

この命題は, κ が十分大きければ $\mathcal{G}(\alpha/\kappa)$ は小さくなり h_{eff}^V の離散的な基底状態の存在から全系の基底状態の存在が導かれることを意味している。

7 h_{eff}^V の基底状態の存在

h_{eff}^V は相対論的シュレーディンガー作用素なので h_{eff}^V に離散的な基底状態が存在することと $\mathcal{E}^V < \Xi^V$ であることは同値である。この節で示すのは次の命題である。

命題 3. 十分大きいすべての α に対して $\mathcal{E}^V < \mathcal{E}^V$ が成り立つ。すなわち h_{eff}^V は離散的な基底状態を持つ。

これを証明するにはいくつかの準備が必要である。まず次の補題が成り立つ。

補題 6. $\beta \subseteq \{1, \dots, N\}$ かつ $\beta \neq \emptyset$ とする。このとき定数 $\alpha_1 > 0$ が存在して、すべての $|\alpha| > \alpha_1$ となる α について

$$\mathcal{E}^0 < \mathcal{E}^V(\beta) + \mathcal{E}^0(\beta^c) \quad (59)$$

が成り立つ。

Proof. まず

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^0 &= \alpha^2 \sum_{i < j} W_{ij}(0) + o(\alpha^2), & \mathcal{E}^V(\beta) &= \alpha^2 \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in \beta}} W_{ij}(0) + o(\alpha^2), \\ \mathcal{E}^0(\beta^c) &= \alpha^2 \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in \beta^c}} W_{ij}(0) + o(\alpha^2). \end{aligned}$$

に注意する。これと $\sum_{\substack{i < j \\ i \in \beta, j \in \beta^c}} W_{ij}(0) + \sum_{\substack{i < j \\ i \in \beta^c, j \in \beta}} W_{ij}(0) < 0$ から補題が出る。 \square

次に h_{eff}^0 を全運動量 $P_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^N p_j$ で分解する。 $\mathcal{U} = e^{ix_j \cdot \sum_{j=1}^N p_j}$ を定義すると $\mathcal{U} P_{\text{tot}} \mathcal{U}^{-1} = p_1$ なので、 \mathcal{U} は全運動量を対角化する。故に

$$\mathcal{U} h_{\text{eff}}^0 \mathcal{U}^{-1} = \Omega_1(p_1 - \sum_{j=2}^N p_j) + \sum_{j=2}^N \Omega_j(p_j) + \sum_{j \geq 2} \alpha^2 W_{1j}(x_j) + \sum_{2 \leq i < j \leq N} \alpha^2 W_{ij}(x_i - x_j), \quad (60)$$

$$\mathcal{U} h_{\text{eff}}^V \mathcal{U}^{-1} = h_{\text{eff}}^0 + V(x_1) + \sum_{j=2}^N V(x_1 + x_j). \quad (61)$$

従って

$$\mathcal{U} h_{\text{eff}}^0 \mathcal{U}^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} k(P) dP, \quad (62)$$

$$k(P) = \Omega_1(P - \sum_{j=2}^N p_j) + \sum_{j=2}^N \Omega_j(p_j) + \sum_{j \geq 2} \alpha^2 W_{1j}(x_j) + \sum_{2 \leq i < j \leq N} \alpha^2 W_{ij}(x_i - x_j). \quad (63)$$

となる。 $\inf \sigma(k(P^*)) = \mathcal{E}^0$ となる $P^* \in \mathbb{R}^d$ が存在する。実際には汎関数積分表示から $P^* = 0$ が導かれるが $P^* \neq 0$ でも以下の証明に問題は無い。

補題 7. すべての $P \in \mathbb{R}^3$ に対して, ある定数 $\alpha_2(P) > 0$ が存在して $\inf \sigma(k(P)) \in \sigma_{\text{disc}}(k(P))$ がすべての $|\alpha| > \alpha_2(P)$ に対して成り立つ。

証明は補題 6 の証明とほぼ同様なので省略する。

補題 8. $|\alpha| > \alpha_2(P^*)$ とし u_α を $k(P^*)$ の規格化された基底状態とする。このとき超関数の意味で $\alpha \rightarrow \infty$ の極限で $|u_\alpha(x_2, \dots, x_N)|^2 \rightarrow \delta(x_2) \cdots \delta(x_N)$ となる。

Proof. 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{X}| > \epsilon} |u_\alpha(\mathbf{X})|^2 d\mathbf{X} = 0 \quad (64)$$

を示せばよい。ここに $\mathbf{X} = (x_2, \dots, x_N)$ 。なぜならば (64) が成り立てばすべての $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d(N-1)})$ に対して

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{d(N-1)}} f(\mathbf{X}) |u_\alpha(\mathbf{X})|^2 d\mathbf{X} = f(0) \quad (65)$$

となるからである。 $k(0)$ の α 依存性を強調するために $k_\alpha(0)$ と書く。 $k_\alpha(0)/\alpha^2 \geq \sum_{i < j} W_{ij}(0)$ および $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \inf \sigma(k_\alpha(0))/\alpha^2 = \sum_{i < j} W_{ij}(0)$ から

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} W_{ij}(0) &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{-2} (u_\alpha, k_\alpha(0) u_\alpha) \\ &\geq \liminf_{\alpha \rightarrow \infty} (u_\alpha, \left(\sum_{j \geq 2} W_{1j}(x_j) + \sum_{2 \leq i < j \leq N} W_{ij}(x_i - x_j) \right) u_\alpha) \geq \sum_{i < j} W_{ij}(0). \end{aligned} \quad (66)$$

が導かれる。したがって

$$\sum_{i < j} W_{ij}(0) = \liminf_{\alpha \rightarrow \infty} (u_\alpha, \left(\sum_{j \geq 2} W_{1j}(x_j) + \sum_{2 \leq i < j \leq N} W_{ij}(x_i - x_j) \right) u_\alpha) \quad (67)$$

が従う。もし $c_\epsilon = \liminf_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{X}| > \epsilon} |u_\alpha(\mathbf{X})|^2 d\mathbf{X} > 0$ と仮定すると, このとき

$$\liminf_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{d(N-1)}} \sum_{j \geq 2} (W_{1j}(x_j) - W_{1j}(0)) |u_\alpha(\mathbf{X})|^2 d\mathbf{X} > c_\epsilon \sum_{j \geq 2} \sup_{|\mathbf{X}| > \epsilon} (W_{1j}(x_j) - W_{1j}(0)) > 0 \quad (68)$$

となり (67) に矛盾する。よって $c_\epsilon = 0$ でなければならない。□

命題 4. 十分大きいすべての α に対して $\mathcal{E}^0 < \mathcal{E}^\nu$ が成り立つ。

Proof. 補題 6 より, 十分大きいすべての α に対して $\mathcal{E}^\nu > \mathcal{E}^0$ を示せばよい。

まず $V \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ であると仮定する。 $|\alpha| > \max\{\alpha_1, \alpha_2(P^*)\} > 0$ とする。 u_α を $k(P^*)$ の基底状態とする。不等式 $\Omega_1(a+b) \leq |a| + \Omega_1(b)$ が $a, b \in \mathbb{R}^d$ に対してなりたつので

$$\mathcal{U}h_{\text{eff}}^0\mathcal{U}^{-1} \leq \sqrt{-\Delta_1} + k(0). \quad (69)$$

である。仮定 1 の (c) より、規格化されたベクトル $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ で

$$(v, (\sqrt{-\Delta} + NV)v) < 0. \quad (70)$$

を満たすものが存在する。テスト関数 Ψ を $\Psi(x_1, \dots, x_N) = v(x_1)u_\alpha(x_2, \dots, x_N)$ によって定義する。このとき, (69) より

$$\mathcal{E}^V \leq (\Psi, \mathcal{U}h_{\text{eff}}^V\mathcal{U}^{-1}\Psi) \leq (v, (\sqrt{-\Delta} + V)v) + \mathcal{E}^0 + (\Psi, \sum_{j=2}^N V(x_1 + x_j)\Psi). \quad (71)$$

となる。 u_α でならしたポテンシャルを $V_{j,\text{smearred}}^\alpha(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{d(N-1)}} V(x_j + x_1)|u_\alpha(\mathbf{X})|^2 d\mathbf{X}$ と定義する。このとき補題 8 によって

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\Psi, V(x_j + x_1)\Psi) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (v, V_{j,\text{smearred}}^\alpha v) = (v, Vv) \quad (72)$$

である。(70), (71) によって

$$\mathcal{E}^V \leq (v, (\sqrt{-\Delta} + NV)v) + \mathcal{E}^0 < \mathcal{E}^0 \quad (73)$$

が導かれる。 □

参考文献

- [1] C. Gérard. On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz hamiltonians. *Ann. Henri Poincaré*, Vol. 1, No. 3, pp. 443–459, 2000.
- [2] M. Griesemer, E. Lieb, and M. Loss. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. *Invent. Math.*, Vol. 145, No. 3, pp. 557–595, 2001.
- [3] F. Hiroshima and I. Sasaki. Enhanced binding of an n -particle system interacting with a scalar field i. *Math. Z.*, Vol. 259, No. 3, pp. 657–680, 2008.
- [4] J. Lőrinczi, F. Hiroshima, and V. Betz. *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space*. Walter De Gruyter.