

On the Structure of Rational Surface Automorphism Groups

Takato Uehara (上原 崇人)

Department of Information Engineering, Niigata University

E-mail address: uehara@ie.niigata-u.ac.jp

概要

本原稿では, 尖点反標準曲線をもち非自明な自己同型写像をもつ有理曲面を考察し, 有理曲面上の自己同型群の決定方法について概説する. Coxeter 理論を自己同型写像に応用してルートの推移を調べることで群構造を決定する.

1 導入

本原稿では, ある有理曲面上の自己同型群の決定方法について概説する. ここで対象となる有理曲面は, 尖点反標準曲線をもち非自明な自己同型写像をもつ曲面である (定理 1.1 参照). 本原稿での群構造の決定は, Coxeter 理論を自己同型写像に応用し, ルートの推移を考察することでなされる. 詳細な議論については, 論文 [11] を参照せよ.

以下, 曲面はすべて有理曲面, つまり, 射影平面 \mathbb{P}^2 と双有理同値な曲面とする. また, 曲面上の曲線 Y に対して, Y^* で Y の滑らかな点全体の集合を表す. 有理曲面 X 上の既約曲線 Y が尖点をもつ反標準曲線であるとき, Y を尖点反標準曲線という. このとき, Y^* は複素平面 \mathbb{C} と同型であることが知られている. また, Y を保つ X 上の自己同型写像 $F \in \text{Aut}(X, Y)$ に対して, F の Y^* への制限は, 適当な $\delta(F) \in \mathbb{C}^\times$ と $c(F) \in \mathbb{C}$ を用いて, $F|_{Y^*} : \mathbb{C} \ni t \mapsto \delta(F) \cdot t + c(F) \in \mathbb{C}$ と表される. 値 $\delta(F)$ は同型 $Y^* \cong \mathbb{C}$ の取り方に依らないことに注意する.

以上の設定のもと, 次の定理が成り立つ.

定理 1.1 有理曲面 X は尖点反標準曲線 Y をもつとし, 次を満たす自己同型写像 $F \in \text{Aut}(X, Y)$ が存在すると仮定する: (i) 射影曲面 \mathbb{P}^2 上の線形写像と双有理共役にならない. (ii) $\delta(F)$ が 1 の冪根ではない. このとき, X の自己同型群は無限巡回群と同型である. つまり, 適当な無限位数の自己同型写像 $F_0 \in \text{Aut}(X)$ を用いて,

$$\text{Aut}(X) = \langle F_0 \rangle$$

と表される.

定理における写像 F は正の位相的エントロピーをもつことが知られており, 力学系理論で重要な研究対象となる ([9] 参照). つまり, 力学系的に非自明な自己同型写像 F をもつことが定理の仮定の一つである.

McMullen と Zhang は, 定理の仮定に加えて自己同型写像 F が Coxeter 元を実現する場合に, 自己同型群を部分的に決定している. つまり, X の自己同型群はある有限部分群 $T \triangleleft \text{Aut}(X)$ を用いて

$$\text{Aut}(X) = \langle F \rangle \times T$$

と表されることを彼らは示した ([6, 12] 参照). しかしこの段階では, T がどのような群構造か具体的に決定されていない. それに対して, 定理 1.1 を用いると, T は自明: $T = \{\text{id}_X\}$ になることが結論付けられる (定理 4.4 参照). つまり, 自己同型群が完全に決定されるのである.

2 Coxeter 理論

本節では, Coxeter 理論に関して簡単に復習する. 詳しくは, [1, 3, 4] 等も参照せよ. 集合 S に対して, 群 W を次で定義する:

$$W = \langle s \in S \mid (st)^{m_{st}} = 1 \ (s, t \in S) \rangle.$$

ここで, $m_{st} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ は, $m_{ss} = 1 \ (s \in S)$ と $2 \leq m_{st} = m_{ts} \leq \infty \ (s \neq t \in S)$ を満たすものとする. このとき, (W, S) を Coxeter 系といい, 群 W を Coxeter 群という. 以下, W のランク $\text{rank} W := \#S$ は有限であると仮定する. Coxeter 系 (W, S) は, その Coxeter グラフ Γ が連結であるとき, 既約であるという. ここで, Coxeter グラフ Γ とは, 頂点集合を S とし, $m_{st} \geq 3$ のとき 2 つの頂点 $s \neq t \in S$ を辺で結び, $m_{st} \geq 4$ のとき辺を m_{st} でラベル付けしたグラフである. Coxeter 群の各元 $w \in W$ に対して, $w = s_1 \cdots s_r$, ($s_i \in S$) となる最小の非負整数 $r \geq 0$ を w の (S に関する) 長さといい, $\ell(w) = \ell_S(w)$ と表す. また, $r = \ell(w)$ となる表現 $w = s_1 \cdots s_r$ を w の既約表現という. さらに, 生成元 $S = \{s_1, \dots, s_N\}$ のすべての積 $w_0 = s_1 \cdots s_N$ を Coxeter 元という.

Coxeter 系 (W, S) と S の部分集合 $I \subset S$ に対して, $W_I \subset W$ を I によって生成される部分群とする. 部分群 W_I を W の標準放物型部分群という. このとき, 任意の $w \in W_I$ に対して $\ell_I(w) = \ell_S(w)$ となることが知られている. また, 適当な $I \subset S$ と $w \in W$ を用いて wW_Iw^{-1} の形で表される部分群を W の放物型部分群という. さらに, 部分集合 $Z \subset W$ に対して, Z を含むすべての放物型部分群の共通部分を $\text{Pc}(Z)$ と表し, Z の放物型閉包という. このとき, $\text{Pc}(Z)$ は W の放物型部分群になる. つまり, 適当な $I \subset S$ と $w \in W$ を用いて $\text{Pc}(Z) = wW_Iw^{-1}$ と表される ([4, 8] 参照).

Coxeter 群 W の元 $w \in W$ は, $\text{Pc}(w) = W$ となるとき, 本質的であるという.

命題 2.1 ([7]) 任意の Coxeter 元は本質的である. さらに, 既約な無限 Coxeter 群 W と正の整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $w \in W$ が本質的であるための必要十分条件は, $w^n \in W$ が本質的であることである.

Coxeter 群 W の部分集合 D_I を次で定義する:

$$D_I := \{w \in W \mid \ell(ws) > \ell(w) \ (s \in I)\}.$$

命題 2.2 ([11]) 部分集合 $Z \subset W$ の放物型閉包は, 適当な $I \subset S$ と $w \in D_I$ を用いて, $\text{Pc}(Z) = wW_Iw^{-1}$ と表される.

Coxeter 系 (W, S) に対して, S と一対一対応する基底 $\Pi := \{\alpha_s \mid s \in S\}$ をもつ実ベクトル空間 $V = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{R}\alpha_s$ を考える. 各元 $\alpha_s \in \Pi$ を単純ルートという. また, ベクトル空間 V 上の双線形形式 $(,)$ を

$$(\alpha_s, \alpha_t) = -\cos \frac{\pi}{m_{st}}$$

で定義する. このとき, $s \in S$ に対し $s : V \rightarrow V, x \mapsto x - 2(x, \alpha_s)\alpha_s$ によって定まる表現 $W \rightarrow GL(V)$ は忠実であることが知られている. この忠実表現 $W \rightarrow GL(V)$ を (W, S) の幾何表現という. 幾何表現は双線形形式を不変にする. つまり, 任意の $w \in W$ と $x, y \in V$ に対して, $(w(x), w(y)) = (x, y)$ が成り立つ.

命題 2.3 ([5]) Coxeter 群 W の元 $w \in W$ は本質的で $\lambda(w) > 1$ と仮定する. ここで, $\lambda(w)$ は $w : V \rightarrow V$ のスペクトル半径である. このとき, $\lambda(w) \geq \lambda(w_0) \geq \lambda_{\text{Lehmer}}$ が成り立つ. ただし, w_0 は W の Coxeter 元であり, $\lambda_{\text{Lehmer}} \approx 1.176$ は Lehmer 数, つまり, $t^{10} + t^9 - t^7 - t^6 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1 = 0$ の根である.

Coxeter 系 (W, S) のルート系 $\Phi := \{w(\alpha_s) \mid w \in W, s \in S\}$ を考える. ルート系 Φ の各元をルートという. このとき, $\alpha = w(\alpha_s) \in \Phi$ に対して, 鏡映変換 $r_\alpha : V \rightarrow V, x \mapsto x - 2(x, \alpha)\alpha$ は $r_\alpha = wsw^{-1}$ を満たす. ルート系の部分集合 $\Phi^+ := \{\alpha = \sum_{s \in S} c_s \alpha_s \mid c_s \geq 0 (s \in S)\}$ の元を正ルートといい, $\Phi^- := \{\alpha = \sum_{s \in S} c_s \alpha_s \mid c_s \leq 0 (s \in S)\}$ の元を負ルートという. このとき, $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$ となることが知られている. 適当な $I \subset S$ を用いて $\Phi_I := \{w(\alpha_s) \mid w \in W_I, s \in I\}$ と表される集合を標準放物型ルート部分系といい, 適当な $I \subset S$ と $w \in W$ を用いて $w\Phi_I$ と表される集合を放物型ルート部分系という. 部分集合 $I \subset S$ に対して $\Phi_I^\pm := \Phi_I \cap \Phi^\pm$ とおき, $w \in W$ に対して $\Phi(w) := \{\alpha \in \Phi^+ \mid w(\alpha) \in \Phi^-\}$ とおく. このとき, $|\Phi(w)| = \ell(w)$ となることが知られている. また $w \in W_I$ のとき, $\Phi(w) \subset \Phi_I^+$ と $w\Phi(w) \subset \Phi_I^-$ が成り立つ. さらに次の命題が成り立つ.

命題 2.4 ([11]) 任意の $z \in D_I$ と $\alpha \in \Phi_I$ に対して, $z(\alpha) \in \Phi^+$ が成り立つための必要十分条件は $\alpha \in \Phi_I^+$ が成り立つことである.

命題 2.5 ([11]) Coxeter 群の元 $g \in W$ は有限位数であると仮定して, 次の直交分解を考える:

$$V = N_g \oplus N_g^c.$$

ここで, N_g は固有値 1 をもつ固有ベクトルで張られる V の部分空間であり, N_g^c は 1 と異なる固有値をもつ固有ベクトルで張られる V の部分空間である. このとき, もし $\text{Pc}(g) = zW_I z^{-1}$ ならば, $z\Phi_I \subset N_g^c$ が成り立つ.

3 有理曲面

本節では定理の証明に必要な有理曲面及びその上の自己同型写像に関する性質について概説する. 以下, X は尖点反標準曲線 Y をもつ有理曲面として, 線形写像と双有理共役とならず $\delta(F)$ が 1 の冪根ではない自己同型写像 $F \in \text{Aut}(X, Y)$ が存在すると仮定する. このとき, [10] における結果により, X は

$$\pi : X = X_N \xrightarrow{\pi_N} X_{N-1} \xrightarrow{\pi_{N-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_1} X_0 = \mathbb{P}^2 \quad (1)$$

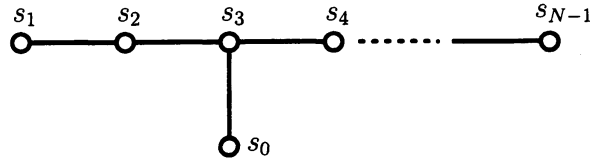


図 1: (W_N, S_N) の Coxeter グラフ Γ_N

と 1 点 $x_i \in X_{i-1}$ でのブローアップ $\pi_i: X_i \rightarrow X_{i-1}$ の合成で表される. また, $N \geq 10$ である. さらに, $C = \pi(Y)$ は尖点をもつ三次曲線であり, π によってブローアップされる点は滑らかな点集合 C^* 上にある. 以下, \mathbb{P}^2 の座標を $C = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 \mid yz^2 = x^3\}$ と尖点 $[0:1:0] \in C$ となるように選んでおく. このとき, $C^* = C \setminus \{[0:1:0]\}$ は

$$p: \mathbb{C} \rightarrow C^*, \quad p(t) = [t:t^3:1]$$

とパラメータ付けられる. 特に, C^* は複素平面 \mathbb{C} と同型である.

合成 (1) を固定すると, コホモロジー群の表現 $H^2(X; \mathbb{Z}) \cong \text{Pic}(X) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[E_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[E_N]$ が得られる. ここで, H は \mathbb{P}^2 内の直線の π による全変換であり, E_i は点 x_i 上の例外因子である. コホモロジー群 $H^2(X; \mathbb{Z})$ 上の交差形式は次で与えられる:

$$\begin{cases} ([H], [H]) = 1 \\ ([E_i], [E_j]) = -\delta_{i,j} \quad (i, j = 1, \dots, N) \\ ([H], [E_i]) = 0 \quad (i = 1, \dots, N), \end{cases}$$

ただし, $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタである. このとき, $[Y] \sim -K_X = 3[H] - \sum_{i=1}^N [E_i]$ が成り立つ. また, 任意の自己同型写像 $F: X \rightarrow X$ はコホモロジー群への作用 $F^*: H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$ を与え, F^* は交差形式を保つ. この作用を抽象化すると, Lorentz 格子への Weyl 群の作用が得られる. Lorentz 格子 $\mathbb{Z}^{1,N}$ とは, 次の Lorentz 内積が与えられた格子である:

$$\mathbb{Z}^{1,N} = \bigoplus_{i=0}^N \mathbb{Z} \cdot e_i, \quad (e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & (i = j = 0) \\ -1 & (i = j = 1, \dots, N) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

自然数 $N \geq 3$ に対して, $S_N := (s_i)_{i=0}^{N-1}$ で生成される群 $W_N \subset O(\mathbb{Z}^{1,N})$ を Weyl 群という. ただし, $s_i: \mathbb{Z}^{1,N} \rightarrow \mathbb{Z}^{1,N}$ は鏡映変換

$$s_i(x) = x + (x, \alpha_i) \cdot \alpha_i, \quad \alpha_i := \begin{cases} e_0 - e_1 - e_2 - e_3 & (i = 0) \\ e_i - e_{i+1} & (i = 1, \dots, N-1) \end{cases}$$

である. このとき, (W_N, S_N) は位数 N の Coxeter 系になり, この Coxeter グラフ Γ_N は図 1 で与えられる. 特に, (W_N, S_N) は既約である. さらに, $N \geq 9$ のとき, W_N は無限群になることが知られている.

自然なマーキング同型

$$\phi = \phi_\pi : \mathbb{Z}^{1,N} \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z}), \quad \phi(e_0) = [H], \quad \phi(e_i) = [E_i] \quad (i = 1, \dots, N)$$

を考える. マーキングを与えると, 次の図式を可換にする元 $w \in W_N$ が唯一存在する:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{1,N} & \xrightarrow{w} & \mathbb{Z}^{1,N} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ H^2(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{F^*} & H^2(X; \mathbb{Z}). \end{array}$$

このとき, w は F によって実現されるという ([6] 参照).

今, 射影平面 \mathbb{P}^2 上の双有理写像 f であって $f(C) := \overline{f(C \setminus I(f))} = C$ と $I(f) \subset C^*$ を満たすもの全体の集合を $\mathcal{B}(C)$ で表し, 二次双有理写像からなる $\mathcal{B}(C)$ の部分集合を $\mathcal{Q}(C)$, 線形写像からなる $\mathcal{B}(C)$ の部分集合を $\mathcal{L}(C)$ で表す. ただし, $I(f)$ は f の不確定点集合である. 任意の $f \in \mathcal{B}(C)$ を $C^* \cong \mathbb{C}$ に制限した写像は自己同型であり, 適当な $\delta(f) \in \mathbb{C}^\times$ と $c(f) \in \mathbb{C}$ を用いて

$$f|_{C^*} : \mathbb{C} \ni t \mapsto \delta(f) \cdot t + c(f) \in \mathbb{C}$$

と表される. ここで, $\delta(f)$ はパラメータ付けの仕方に依らない. また, 次の命題が成り立つ.

命題 3.1 ([9]) 任意の $d \in \mathbb{C}^\times$ に対して, $\delta(f) = d$ となる $f \in \mathcal{L}(C)$ が唯一存在する. 特に, $\delta(f) = 1$ となる $f \in \mathcal{L}(C)$ は恒等写像 $f = \text{id}_{\mathbb{P}^2}$ である.

次に, ルートの表現について考察する. Coxeter 系 (W_N, S_N) に対する正ルート $\alpha \in \Phi^+$ を考える. このとき, α は適当な $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ を用いて $\alpha = m_0 e_0 - \sum_{i=1}^N m_i e_i$ と表される ([2] 参照). 正ルート α の次数を $\deg(\alpha) := m_0$ で定義する. 例えば, $\deg(\alpha) = 0$ のときは適当な $i < j$ を用いて $\alpha = e_i - e_j$ と表され, $\deg(\alpha) = 1$ のときは適当な $i, j, k \in \{1, \dots, N\}$ を用いて $\alpha = e_0 - e_i - e_j - e_k$ と表される.

Coxeter 系 (W_N, S_N) のルート $\alpha \in \Phi$ は, X 上の適当な正因子 D を用いて $\phi(\alpha) = [D] \in H^2(X; \mathbb{Z})$ と表されるとき, (X, ϕ) に対する結節ルートであるという. 複素化された Lorentz 格子 $\mathbb{C}^{1,N} = \mathbb{Z}^{1,N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の元 ξ を固定して, $t_i = (\xi, e_i - e_0/3)$ とおく. また, 合成 (1) で与えられる双有理射 $\pi = \pi_\xi : X = X_\xi \rightarrow \mathbb{P}^2$ を考える. ただし, ブローアップされる点 x_i は, $\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{i-1}(x_i) = p(t_i)$ と $x_i \in (\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{i-1})^{-1}(C)$ から一意に決まる点である. ここで, 曲面間の任意の双有理射 $\nu : X_1 \rightarrow X_2$ と X_2 上の因子 D に対して, $\nu^{-1}(D)$ は D の ν による狭義引戻しを表す. 今, $\phi = \phi_\pi : \mathbb{Z}^{1,N} \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$ を π から決まるマーキングとする. このとき, 正ルート $\alpha = m_0 e_0 - \sum_{i=1}^N m_i e_i \in \Phi^+$ が (X, ϕ) の結節ルートであるための必要十分条件は, $m_0 = \deg(D_0)$ および $m_i = \mu_{x_i}(D_0)$, ($1 \leq i \leq N$) となる \mathbb{P}^2 上の正因子 D_0 が存在することである. ここで, $\deg(D_0)$ は D_0 の次数であり, $\mu_{x_i}(D_0)$ は $(\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{i-1})^{-1}(D_0)$ の点 x_i における重複度である. 実際, 正因子 D_0 と $\phi(\alpha) = [D]$ なる X 上の正因子 D は, $D = \pi^{-1}(D_0)$ を通じて一対一に対応している.

補題 3.2 ([11]) 正ルート $\alpha \in \Phi^+$ は $(\alpha, \xi) = 0$ を満たすと仮定する. このとき, α は (X, ϕ) に対する結節ルートである.

再び, $F \in \text{Aut}(X, Y)$ を, \mathbb{P}^2 上の線形写像と双有理共役とならず, $\delta(F)$ が 1 の冪根とならない自己同型写像とする. また, w を F によって実現される W_N の元とする. このとき, $\delta(F)$ は w の固有値であり, $\pi = \pi_\xi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ となる $\delta(F)$ に対応する固有ベクトル ξ が存在する ([10] 参照). さらに, w の特性多項式は次のように表される:

$$\chi_w(t) := \det(tI - w) = R_w(t)S_w(t).$$

ただし, $R_w(t)$ は円分多項式の積であり, $S_w(t)$ は Salem 多項式である. ここで, 多項式 $S \in \mathbb{Z}[t]$ が Salem 多項式であるとは, 次を満たす既約でモニックな整数係数の多項式である: (1) ある $\delta > 1$ が存在して $S(\delta) = S(\delta^{-1}) = 0$, (2) $\delta^{\pm 1}$ 以外の S の根はすべて絶対値が 1 である. 特に, $\delta(F)$ は $S_w(t) = 0$ の根である. 今, 実ベクトル空間の Lorentz 内積に関する直交分解

$$\mathbb{R}^{1,N} := \mathbb{Z}^{1,N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V_w \oplus V_w^c$$

を, $w|_{V_w}$ と $w|_{V_w^c}$ の特性多項式がそれぞれ $S_w(t)$ と $R_w(t)$ になるよう行う. このとき, V_w と V_w^c の符号数は, 適当な $1 \leq r < N$ を用いて, それぞれ $(1, r)$ と $(0, N - r)$ になる. Salem 多項式 $S_w(t) = 0$ の根 d に対して, $v_d \in \mathbb{C}^{1,N}$ を w の固有値 d に対応する (定数倍を除いて一意に決まる) 固有ベクトルとする. ベクトル v_d は $v_d \in \mathbb{Z}^{1,N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[d]$ となるよう選ぶことができることに注意する.

補題 3.3 Lorentz 格子の元 $z \in \mathbb{Z}^{1,N}$ が $(z, v_d) = 0$ となるための必要十分条件は, $z \in V_w^c \cap \mathbb{Z}^{1,N}$ となることである.

証明. もし $(z, v_d) = 0$ ならば, $(z, v_d) \in \mathbb{Z}[d]$ より, $S_w(t) = 0$ の任意の根 x に対して $(z, v_x) = 0$ となる. したがって, $z \in V_w^c$ となる. 逆は明らかである. \square

命題 3.4 ルート α を $\Phi \cap V_w^c$ の元とする. このとき, α が結節ルートであるための必要十分条件は, $\alpha \in \Phi^+$ であることである.

証明. もし $\alpha \in \Phi^+ \cap V_w^c$ ならば, 補題 3.3 と $\Phi^+ \subset \mathbb{Z}^{1,N}$ から $(\alpha, v_d) = 0$ が成り立つ. 合成 (1) は, 適当な $c \in \mathbb{C}^\times$ を用いて $\pi = \pi_{c \cdot v_d} : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ と表されることに注意する. このとき $(\alpha, c \cdot v_d) = 0$ だから, 補題 3.2 より α は (X, ϕ) に対する結節ルートになる. 逆にもし $\alpha \in \Phi^-$ ならば, α は結節ルートにならないことは明らかである. \square

4 定理の証明

本節では, 定理 1.1 を証明する. 以下, X は尖点反標準曲線 Y をもつ有理曲面として, 線形写像と双有理共役とならず $\delta(F)$ が 1 の冪根ではない自己同型写像 $F \in \text{Aut}(X, Y)$ が存在すると仮定する. このとき, $d := \delta(F)$ は $S_w(t) = 0$ の根である. ただし, $w \in W_N$ は F によって実現される元である. まず, 次の補題を示す.

補題 4.1 $\text{Aut}(X) = \text{Aut}(X, Y)$ が成り立つ.

証明. 上記の仮定のもと, π によってブローアップされる点の数 N は 10 以上である. さらに, Y が既約であることと $Y^2 = 9 - N < 0$ であることから, 任意の反標準曲線は Y と一致する. 任意の自己同型写像 $F \in \text{Aut}(X)$ に対して, $F(Y)$ も反標準曲線だから, $F(Y) = Y$, つまり $F \in \text{Aut}(X, Y)$ が成り立つ. \square

命題 4.2 ([10]) 固有値 d に対応する w の固有ベクトルを $v_d \in \mathbb{Z}^{1,N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[d]$ とする. このとき, 任意の自己同型写像 $G \in \text{Aut}(X, Y)$ に対して $g(v_d) = \delta(G)v_d$ が成り立つ. ここで, $g \in W_N$ は G によって実現される元である. さらに, $\delta(G) \in \mathbb{Z}[d]$ が成り立つ.

有理曲面 X 上の自己同型写像 $G \in \text{Aut}(X) = \text{Aut}(X, Y)$ に対して, $g \in W_N$ を G によって実現される元とする. 命題 4.2 から $g(v_d) = \delta(G)v_d$ が成り立つため, 適当な $\eta(g) \in \mathbb{C}$ を用いて $g(v_\lambda) = \eta(g)v_\lambda$ が成り立つ. ただし, $\lambda = \lambda(w) > 1$ は $w: \mathbb{Z}^{1,N} \rightarrow \mathbb{Z}^{1,N}$ のスペクトル半径である. ここで, $v_\lambda \in \mathbb{Z}^{1,N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\lambda] \subset \mathbb{R}^{1,N}$ は $v_\lambda^2 = 0$ を満たし, g は $\{z \in \mathbb{R}^{1,N} \mid z^2 > 0\}$ の連結成分を保つため, $\eta(g) > 0$ が成り立つ. これより, 準同型写像 $\eta: \text{Aut}(X) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $\eta(G) := \eta(g)$ が得られる. また, $\eta(F) = \lambda(w) > 1$ であること, そして, もし $\eta(G) > 1$ ならば $\eta(G) = \lambda(w) > 1$ であることを注意しておく.

補題 4.3 ([11, 12]) 適当な $F_0 \in \text{Aut}(X)$ を用いて $\text{Im}(\eta) = \{\eta(F_0)^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ が成り立つ.

定理 1.1 の証明. 準同型写像 η の核から $G \in \text{Ker}(\eta) \subset \text{Aut}(X)$ を選び, $g \in W_N$ を G によって実現される元とする. 写像 G は $\eta(G) = \eta(g) = 1$, つまり, $g(v_\lambda) = v_\lambda$ を満たすから, $S_w(t) = 0$ の任意の根 x に対して $g(v_x) = v_x$ が成り立つ. したがって, $g|_{V_w} = \text{id}_{V_w}$, つまり, $V_w \subset N_g$ が成り立つ. ここで, N_g は命題 2.5 で与えられた部分空間である. さらに, V_w^c は負定値だから, g は有限位数である. そこで, 適当な $I \subset S$ と $z \in D_I$ を用いて $\text{Pc}(g) = zW_I z^{-1}$ とおき, 適当な有限位数の元 $g_0 \in W_I$ を用いて g を $g = z g_0 z^{-1}$ と表す (命題 2.2 参照). 今, $g_0 \neq 1$, つまり, $|\Phi(g_0)| = \ell(g_0) \geq 1$ を仮定して, ルート $\alpha \in \Phi(g_0) \subset \Phi_I^+$ を固定する. このとき, 命題 2.4 から, $z(\alpha) \in \Phi^+$ そして $g(z(\alpha)) \in \Phi^-$ が成り立つ. また, 命題 2.5 から, $z(\alpha) \in N_g^c$ そして $g(z(\alpha)) \in N_g^c$ が成り立つ. ここで, N_g^c は V_w^c に含まれることに注意する. 命題 3.4 から, $z(\alpha)$ は結節ルートであり, $g(z(\alpha))$ は結節ルートではない. しかし, $\phi(z(\alpha))$ は正因子だから, $G^* \phi(z(\alpha)) = \phi(g(z(\alpha)))$ も正因子である. これは, $g(z(\alpha))$ が結節ルートでないことに矛盾する. それゆえ, $g_0 = 1$ そして $g = 1$ となる. このとき, G は \mathbb{P}^2 上の線形写像 $\bar{g} := \pi \circ G \circ \pi^{-1}$ を誘導する. 写像 \bar{g} は C を保つため, $\bar{g} \in \mathcal{L}(C)$ となる. 元 g は $g(v_d) = v_d$ を満たすから, $\delta(G) = \delta(\bar{g}) = 1$ となる. それゆえ, 命題 3.1 から, $\bar{g} = \text{id}_{\mathbb{P}^2}$ が成り立つ. よって, $G = \text{id}_X$, つまり, $\text{Aut}(X) = \langle F_0 \rangle \cong \mathbb{Z}$ となる. 定理 1.1 が証明された. \square

定理 4.4 定理 1.1 の仮定に加えて, F は Coxeter 元を実現すると仮定する. このとき, X の自己同型群は, $\text{Aut}(X) = \langle F \rangle$ と表される.

証明. 以下, w は Coxeter 元であると仮定する. このとき, 適当な $n \in \mathbb{Z}$ を用いて, $F = F_0^n$, $w = w_0^n$ そして $\lambda(w) = \lambda(w_0)^{|n|}$ が成り立つ. ここで, w_0 は F_0 によって実現される元である. 命題 2.1 から, w そして w_0 は本質的であり, 命題 2.3 から, $\lambda(w_0) \geq \lambda(w) > 1$ だから, $|n| = 1$ が成り立つ. それゆえ, $\text{Aut}(X) = \langle F \rangle$ となる. よって, 定理 4.4 が証明された. \square

参考文献

- [1] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras, Chapters 4–6*, Springer, New York, 2002.
- [2] I. Dolgachev and D. Ortland, *Point sets in projective spaces and theta functions*, *Astérisque* No. 165 (1988).
- [3] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.
- [4] D. Krammer, *The conjugacy problem for Coxeter groups*, *Groups Geom. Dyn.* **3** (2009), no. 1, 71–171.
- [5] C. McMullen, *Coxeter groups, Salem numbers and the Hilbert metric*, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **95** (2002), 151–183.
- [6] C. McMullen, *Dynamics on blowups of the projective plane*, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **105** (2007), 49–89.
- [7] L. Paris, *Irreducible Coxeter groups*, *Internat. J. Algebra Comput.* **17** (2007), no. 3, 427–447.
- [8] D. Qi, *A note on parabolic subgroups of a Coxeter group*, *Expo. Math.* **25** (2007), no. 1, 77–81.
- [9] T. Uehara, *Rational surface automorphisms with positive entropy*, Preprint.
- [10] T. Uehara, *Rational surface automorphisms preserving cuspidal anticanonical curves*, Preprint.
- [11] T. Uehara, *Automorphism Groups of Rational Surfaces*, Preprint.
- [12] D.-Q. Zhang, *Automorphism groups and anti-pluricanonical curves*, *Math. Res. Lett.* **15** (2008), no. 1, 163–183.