数理解析研究所講究録
第 1807 巻 2012 年 80-86

Extreme values of infinite compositions of quadratic polynomials

小島 彰太 (Kojima Shota)
立教大学 (Rikkyo University)
E-mail: 09rc001d@rikkyo.ac.jp

Abstract

最初に, 整関数の無限合成が再び整関数になる十分条件について考える. それから具体的に二次多項式の無限合成を考え, その極限関数の極値について調べる.

1 整関数の無限合成の収束

本稿では, 一般的ではないが次の記法を用いる.

$$f(z) \circ g(z) = f(g(z)).$$

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{N} f_n(z) = f_1(z) \circ f_2(z) \circ f_3(z) \circ \cdots \circ f_N(z).$$

初めに, 整関数 $f_n(z)$ の無限合成

$$F(z) := \mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} f_n(z) := \lim_{N\to\infty} \mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{N} f_n(z) = f_1(z) \circ f_2(z) \circ f_3(z) \circ \cdots$$

が（整関数へ）収束する十分条件について考えたい.

1.1 一次多項式の無限合成の収束

最初に一番簡単なケースである $f_n(z)$ が一次多項式の場合について調べる. $\{a_n\}$ を複素数列として,

$$f_n(z) = z + a_n$$

とおき, 無限合成

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

の収束がどうなるか考える. 今の場合は,

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} f_n(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

となるので, 無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束がそのまま無限合成の収束を意味することになる. つまり,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \text{ならば} \quad \mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} (z + a_n) \quad \text{は収束する.}$$

これは感覚的に次のように解釈できる.

$$f_n(z) \to z \quad (\text{ある程度はやく}) \Rightarrow \quad \mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad \text{は収束する.} \tag{1}$$

次に $f_n(z) = a_n z$ の場合を考える. このとき, $f_n(z)$ の無限合成は

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} f_n(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

となることがわかり, この場合は無限合成の収束は $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束に帰着される. そして, $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するということはある程度早く $f_n(z) = a_n z$ が z に収束することを意味する.

これから, (1) の感覚がより一般の場合の無限合成についても成り立っていることを見ていきたい.

1.2 二次多項式の無限合成の収束

一次多項式の合成は, 実質的に通常の和あるいは積であり, 合成によって次数も上がらず, その N 回合成も簡単に計算できた. しかし, 二次多項式の無限合成になると, 合成のたびに次数は上がり, 有限回の合成であってもその具体的形を知るのは難しい. しかし, $f_n(z) = z + c_n z^2$ という形の二次多項式の無限合成に対しては簡単な収束条件がある.

Theorem 1.1 ([5]). 複素数列 $\{c_n\}$ が

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$$

を満たせば,

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} (z + c_n z^2)$$

は収束し, 整関数となる.

Example 1.2. 任意の複素数 z に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(z + \frac{z^2}{2^n} \right) &= \frac{1}{2}(e^{2z} - 1). \\
\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(z + \frac{z^2}{(-2)^n} \right) &= \sin\left(\frac{2z}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2}. \\
\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(z + \frac{z^2}{4^n} \right) \circ (-z^2) &= \frac{1}{2}(\cos 2z - 1).
\end{aligned}$$

Theorem 1.1 によって全ての二次無限合成についての収束が解決できたわけではない. たとえば, Theorem 1.1 では $\sum c_n$ が絶対収束しないケースについて何も言っていないし, そもそも被合成関数が z に行かないにもかかわらず, その無限合成が非定数関数に収束する例を作ることもできる.

1.3 一般的な整関数の無限合成の収束

Theorem 1.1 は特殊な二次無限合成についての結果であるが, これをより一般の整関数に拡張したのが次の結果である.

Theorem 1.3 ([5]). 整関数

$$f_n(z) = a_{n,0} + a_{n,1}z + a_{n,2}z^2 + a_{n,3}z^3 + \cdots \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

に対して,

$$A_n = \sup\{|a_{n,r}|^{1/(r-1)} \mid r = 2, 3, 4, \ldots\}.$$

とおく. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,0}|, \quad and \quad \prod_{n=1}^{\infty} a_{n,1} \tag{2}$$

が収束すれば,

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

は $\mathbb{C}$ 上で広義一様に収束し, 整関数となる.

この定理の条件 (2) もやはり, $f_n(z)$ がある程度早く z に近づいていくことを要求している. この定理の証明をここで詳しく述べることはしないがポイントだけ述べたい. 定理の証明で一番本質的な部分は

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{N} f_n(z)$$

を上から（うまく）評価することである. 端的に言えば, 定理の証明はこれを上から評価する不等式（下記 Lemma 1.4) を示すことだと言っていい. 今 $f_n(z)$ の z の係数 $a_{n,1}$ を 1 としたものを $h_n(z)$ とする. つまり,

$$h_n(z) = a_{n,0} + z + a_{n,2}z^2 + a_{n,3}z^3 + \cdots .$$

一次の係数は適当な定数倍の変換で調整できるから, $f_n(z)$ を評価するには $h_n(z)$ について評価できれば十分である. この $h_n(z)$ について次が成り立つ.

Lemma 1.4. 自然数 N, M $(N > M)$ をとる. このとき, 不等式

$$|z| < 1/(\sum_{n=M}^{N} A_n) - \sum_{n=M}^{N} |a_{n,0}|,$$

を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\left| \mathop{\mathcal{R}}_{n=M}^{N} h_n(z) \right| \le \frac{|z| + \sum_{n=M}^{N} |a_{n,0}|}{1 - (|z| + \sum_{n=M}^{N} |a_{n,0}|) \sum_{n=M}^{N} A_n}$$

が成立する.

この証明は多少込み入っているが初等的にできる. (cf. [5])

1.4 左に続く無限合成

ここまで無限合成を考えるのに右側に続く無限合成

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

について考えてきたが, 左側に続くもの

$$\mathop{\mathcal{L}}_{n=1}^{\infty} f_n(z) := \cdots \circ f_N(z) \circ \cdots \circ f_2(z) \circ f_1(z)$$

を考えてもいい. (実際 Lemma 1.4 は左に続くものに対しても使える.) 右へ続く合成は, inner composition あるいは forward composition と呼ばれており, また左へ続く合成は, outer composition あるいは backward composition と呼ばれている. Maalouf [6] はある種の outer composition についてその収束を Lemma 1.4 の非常に特殊なケースから, 証明している. そして Gill [3] は Mallouf よりは一般的な形の不等式を用いてより一般の outer composition についての収束定理を得ている.

今 Lemma 1.4 を使って

$$\mathop{\mathcal{L}}_{n=1}^{\infty} \left(z + \frac{z^2}{2^n} \right)$$

が $|z| < 1$ において正則であることを示す. (実際には収束域はもっと広い.) それには,

$$g_n(z) = \mathop{\mathcal{L}}_{r=1}^{n} \left(z + \frac{z^2}{2^r} \right)$$

と置き, この関数が広義一様に収束することを言えばいい.
$|z| \le a(< 1)$ とする.

Lemma 1.4 の不等式の特別な場合 $(a_{n,0} = 0, A_n = 2^{-n})$

$$\mathop{\mathcal{L}}_{r=1}^{n} \left(z + \frac{z^2}{2^r} \right) \le \frac{|z|}{1 - \sum_{r=1}^{n} 2^{-r}|z|} \qquad \left(\sum_{r=1}^{n} 2^{-r}|z| < 1 \right)$$

を用いると,

$$|g_n(z)| \le \frac{|z|}{1 - (1 - 2^{-n})|z|} \le \frac{a}{1 - a}.$$

この不等式を用いると,

$$\begin{aligned} |g_{n+1}(z) - g_n(z)| &= \left| \left(z + \frac{z^2}{2^{n+1}} \right) \circ g_n(z) - g_n(z) \right| \\ &\leq \frac{|g_n(z)^2|}{2^{n+1}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{a}{1-a} \right)^2 \end{aligned}$$

と評価できる. よって $g_n(z)$ が $|z| < 1$ において広義一様に収束することが示される.

右へ続く無限合成

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(z + \frac{z^2}{2^n} \right)$$

の収束は, 上の議論よりもう少し複雑な議論が必要になる. (cf. [5]).

2 二次無限合成関数の極値

Example 1.2 として三角関数の無限合成表示について述べたが, これらの関数をこの表示式から一般化し複素数 $|s| > 1$ に対して,

$$p(z, s) := \mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(z + \frac{z^2}{s^n} \right)$$

を考えるのは自然である. 実際これは, Poincaré 関数と呼ばれるものの一つである. ここで Poincaré 関数とは, 適当な複素数 s と適当な関数 $g(z)$ に対して, s 倍公式

$$P(sz) = g(P(z))$$

を持つものをそう呼ぶことにする.(実際はもう少し狭いクラスについて定義される.)

上記 $p(z, s)$ が Poincaré 関数であることは,

$$p(sz, s) = s(z + z^2) \circ p(z, s)$$

を満たすことを見ればいい. それは

$$\begin{aligned} \frac{z}{s} \circ p(sz, s) &= \frac{z}{s} \circ \left(\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(z + \frac{z^2}{s^n} \right) \right) \circ sz \\ &= \mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{s} \circ \left(z + \frac{z^2}{s^n} \right) \circ sz \right) \\ &= \mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(z + \frac{z^2}{s^{n-1}} \right) \\ &= (z + z^2) \circ p(z, s) \end{aligned}$$

となることからわかる.

ここで s を固定して z の関数として $p(z,s)$ の極値を調べたい. Example 1.2 にあるように $p(z,4)$ はほぼ三角関数であり, その極値というのは完全に決定でき二種類の極値しか持たないことがわかる. この「整関数であり（ほぼ）非正の整数点で極値をとりさらに極値が二つだけである」という極めて特殊な現象は $s=1+\sqrt{5}$ の場合でも起こる. それが次の定理である. (ただしこの定理に関して煩雑な証明しか持っていないためここでは結果だけ述べる.)

Theorem 2.1. 負の実数 ξ を

$$\frac{1}{\xi}=-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+\sqrt{1}}}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}{1+\sqrt{5}}\right)\cdots$$

によって定義し,

$$\tau(z)=\left(\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty}\left(z+\frac{z^2}{(1+\sqrt{5})^n}\right)\right)\circ\left(\frac{\xi}{(1+\sqrt{5})^z}\right)$$

と置く. この時, 各自然数 n にたいして $\tau(z)$ の極大値は

$$\tau\left(1-2n\right)=-\frac{1}{2}$$

となり極小値は

$$\tau\left(2-2n\right)=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

となる.

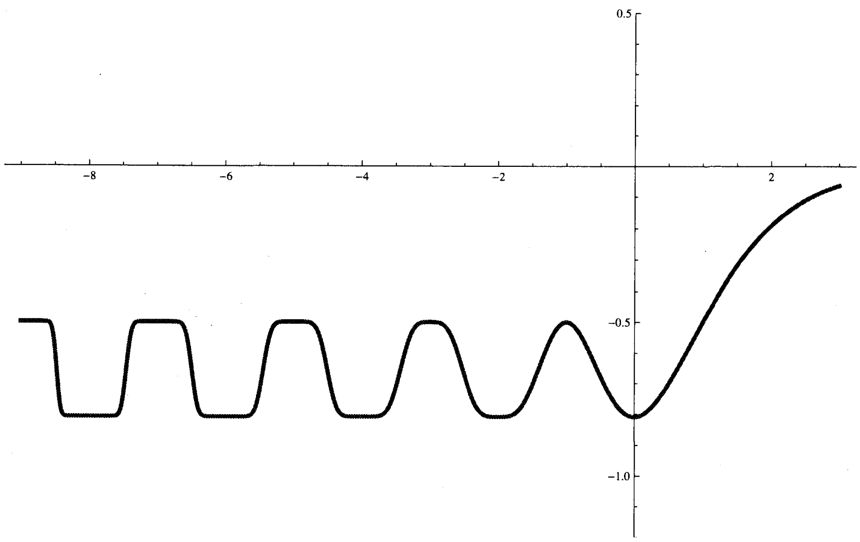

Figure 1: The graph of $\tau(x)$

3 研究課題

最後に研究課題を二つあげたい.

1. 関数 $\tau(z)$ は非正整数点でのみ, そして二つだけの極値を持つという, 三角関数のような, 非常に特殊な性質を持っている. そして, グラフを書いてみるとどうやら, 実軸左側に行くほど四角波に近づいていくことが見て取れた. (証明はできていない.) これが何を意味するのかよくわからないが, 面白い現象であると思う.

2. 本稿では, 主に右側に続く一変数の整関数の無限合成の収束について述べたがこれはより一般の関数の収束定理に拡張されるべきである. 特に整関数であることを仮定するのはあまりに強い仮定である.

References

[1] N. Aoki and S. Kojima, Infinite compositions of quadratic polynomials, Comment. Math. Univ. St. Pauli, **59-2** (2010), 119-143.

[2] J. D. Depree and W.J. Thron, On Sequences of Mobius Transformations, Math. Zeitschr. **80**(1963), 184-194

[3] J. Gill, Convergence of infinite compositions of contractive analytic functions, www.johngill.net(2011).

[4] S. Kojima, Almost periodic functions and infinite compositions of quadratic polynomials, to appear in Comment. Math. Univ. St. Pauli, **60** (2011).

[5] S. Kojima, On the convergence of infinite compositions of entire functions, to appear in Arch. Math. (Basel).

[6] R. N. Maalouf, Julia sets and non-constant limits in the composition of entire functions, Complex Var. Theory Appl. **30** (1996), no. 2, 97-112.

[7] J. Milnor. *Dynamics in one complex variables* (3rd Edition), Princeton University Press (2006).