数理解析研究所講究録
第 1809 巻 2012 年 155-160

一般導分の双対概念について[1]

岡山県立大学・情報工学部　小松 弘明 (Hiroaki Komatsu)
Faculty of Computer Science and System Engineering
Okayama Prefectural University

本稿では，Nakajima [7] が与えた余代数 C 上の両側余加群から C への一般余導分の概念を，代数 A 上の余環 $\mathcal{C}$ と代数 B 上の余環 $\mathcal{D}$ の上の $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 両側余加群から $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 両側余加群への写像にまで拡張する．拡張された一般余導分を表現する $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 両側余加群を構成し，それを用いて余分離余環の新たな特徴付けを与える．

1. 余環とその上の両側余加群

本稿において，R は単位元を有する可換環を表し，代数と言えば常に単位元を有する結合的 R 代数を意味する．代数 A, B 上の (A,B) 両側加群の圏を ${}_A\mathbf{M}_B$ で表す．$M, N \in {}_A\mathbf{M}_B$ に対して，M から N への (A,B) 両側加群写像の全体を ${}_A\mathrm{Hom}_B(M,N)$ で表す．

A を代数とする．代数 B と代数としての準同型写像 $\eta : A \to B$ で単位元を単位元へ移すものが与えられたとき，B を A 環という．次のように言い替えることができる．

$$B \in {}_A\mathbf{M}_A, \quad \mu \in {}_A\mathrm{Hom}_A(B \otimes_A B,\ B), \quad \eta \in {}_A\mathrm{Hom}_A(A, B)$$

が与えられて，図式

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A B \otimes_A B \arrow[r, "I_B \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes I_B"'] & B \otimes_A B \arrow[d, "\mu"] \\ B \otimes_A B \arrow[r, "\mu"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes_A B \arrow[r, "\eta \otimes I_B"] \arrow[dr, "自然な同型"'] & B \otimes_A B \arrow[d, "\mu"] & B \otimes_A A \arrow[l, "I_B \otimes \eta"'] \arrow[dl, "自然な同型"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

が可換であるとき，B を A 環という．ここで，I_X は集合 X の恒等写像を表す．

双対化して，

$$\mathcal{C} \in {}_A\mathbf{M}_A, \quad \Delta \in {}_A\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C},\ \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}), \quad \varepsilon \in {}_A\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, A)$$

が与えられて，図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \arrow[d, "I_{\mathcal{C}} \otimes \Delta"] \\ \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "\Delta \otimes I_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dl, "自然な同型"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "自然な同型"] & \\ A \otimes_A \mathcal{C} & \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \arrow[l, "\varepsilon \otimes I_{\mathcal{C}}"] \arrow[r, "I_{\mathcal{C}} \otimes \varepsilon"'] & \mathcal{C} \otimes_A A \end{tikzcd}$$

が可換であるとき，$\mathcal{C}$ を A 余環という．Δ を $\mathcal{C}$ の余積といい，ε を $\mathcal{C}$ の余単位写像という．

[1] 本論文は投稿予定の論文の予報である．

A, B を代数, $\mathcal{C}$ を A 余環, $\mathcal{D}$ を B 余環とする. $\mathcal{C}$ の余積と余単位写像をそれぞれ $\Delta_{\mathcal{C}}$ と $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ とし, $\mathcal{D}$ の余積と余単位写像をそれぞれ $\Delta_{\mathcal{D}}$ と $\varepsilon_{\mathcal{D}}$ とする.

$$M \in {}_A\mathbf{M}_B, \quad {}^M\rho \in {}_A\mathrm{Hom}_B(M,\, \mathcal{C} \otimes_A M), \quad \rho^M \in {}_A\mathrm{Hom}_B(M,\, M \otimes_B \mathcal{D})$$

が与えられて, 図式

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C} \otimes_A M \arrow[dl, "\Delta_{\mathcal{C}} \otimes I_M"'] & & M \otimes_B \mathcal{D} \arrow[dr, "I_M \otimes \Delta_{\mathcal{D}}"] & \\
\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \otimes_A M & & M \arrow[ul, "{}^M\rho"'] \arrow[ur, "\rho^M"] \arrow[dl, "{}^M\rho"] \arrow[dr, "\rho^M"'] & & M \otimes_B \mathcal{D} \otimes_B \mathcal{D} \\
 & \mathcal{C} \otimes_A M \arrow[ul, "I_{\mathcal{C}} \otimes {}^M\rho"] \arrow[dr, "I_{\mathcal{C}} \otimes \rho^M"'] & & M \otimes_B \mathcal{D} \arrow[ur, "\rho^M \otimes I_{\mathcal{D}}"'] \arrow[dl, "{}^M\rho \otimes I_{\mathcal{D}}"] & \\
 & & \mathcal{C} \otimes_A M \otimes_B \mathcal{D} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \otimes_B \mathcal{D} \arrow[r, "I_M \otimes \varepsilon_{\mathcal{D}}"] & M \otimes_B B \\
M \arrow[u, "\rho^M"] \arrow[d, "{}^M\rho"'] \arrow[ur, "\text{自然な同型}"'] \arrow[dr, "\text{自然な同型}"] & \\
\mathcal{C} \otimes_A M \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{C}} \otimes I_M"'] & A \otimes_A M
\end{tikzcd}$$

が可換であるとき, M を $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 両側余加群という. ${}^M\rho$ と ρ^M をそれぞれ M の左余作用と右余作用という. M, N を $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 両側余加群とする. $f \in {}_A\mathrm{Hom}_B(M, N)$ で図式

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{}^M\rho"'] & N \arrow[d, "{}^N\rho"] \\
\mathcal{C} \otimes_A M \arrow[r, "I_{\mathcal{C}} \otimes f"'] & \mathcal{C} \otimes_A N
\end{tikzcd}$$

が可換になるものの全体を ${}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_B(M, N)$ で表す. 同様に, $f \in {}_A\mathrm{Hom}_B(M, N)$ で図式

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho^M"'] & N \arrow[d, "\rho^N"] \\
M \otimes_B \mathcal{D} \arrow[r, "f \otimes I_{\mathcal{D}}"'] & N \otimes_B \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

が可換になるものの全体を ${}_A\mathrm{Hom}^{\mathcal{D}}(M, N)$ で表す. そして,

$${}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}^{\mathcal{D}}(M, N) = {}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_B(M, N) \cap {}_A\mathrm{Hom}^{\mathcal{D}}(M, N)$$

とおく. ${}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}^{\mathcal{D}}(M, N)$ を射の集合とする $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 両側余加群の圏を ${}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}}$ で表す.

余環の理論の詳細については Brzeziński と Wisbauer の著書 [2] で知ることができる.

2. 両側余加群の一般余導分

筆者は [4] において代数上の両側加群の一般導分 (generalized derivation) の概念を導入した. それを双対化して, 余代数上の両側余加群の一般余導分 (generalized coderivation) の概念を導入する.

定義 2.1. A, B を代数，$\mathcal{C}$ を A 余環，$\mathcal{D}$ を B 余環，$M, N \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}}$，$f \in {}_A\mathrm{Hom}_B(M, N)$ とする．次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
M \otimes_B \mathcal{D} \arrow[rrrr, "f \otimes I_{\mathcal{D}}"] \arrow[ddd, "{}^M\rho \otimes I_{\mathcal{D}}"'] & & & & N \otimes_B \mathcal{D} \arrow[ddd, "{}^N\rho \otimes I_{\mathcal{D}}"] \\
& M \arrow[ul, "\rho^M"'] \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "{}^M\rho"] & & N \arrow[ur, "\rho^N"] \arrow[d, "{}^N\rho"'] & \\
& \mathcal{C} \otimes_A M \arrow[rr, "I_{\mathcal{C}} \otimes f"'] \arrow[dl, "I_{\mathcal{C}} \otimes \rho^M"] & & \mathcal{C} \otimes_A N \arrow[dr, "I_{\mathcal{C}} \otimes \rho^N"'] & \\
\mathcal{C} \otimes_A M \otimes_B \mathcal{D} \arrow[rrrr, "I_{\mathcal{C}} \otimes f \otimes I_{\mathcal{D}}"'] & & & & \mathcal{C} \otimes_A N \otimes_B \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

ここで，${}^M\rho$ と ρ^M は M の左余作用と右余作用を表し，${}^N\rho$ と ρ^N は N の左余作用と右余作用を表す．この図式に現れる写像を用いて，

$$
\begin{aligned}
Q(f) = {} & ({}^N\rho \otimes I_{\mathcal{D}}) \circ \rho^N \circ f - ({}^N\rho \otimes I_{\mathcal{D}}) \circ (f \otimes I_{\mathcal{D}}) \circ \rho^M \\
& - (I_{\mathcal{C}} \otimes \rho^N) \circ (I_{\mathcal{C}} \otimes f) \circ {}^M\rho + (I_{\mathcal{C}} \otimes f \otimes I_{\mathcal{D}}) \circ (I_{\mathcal{C}} \otimes \rho^M) \circ {}^M\rho
\end{aligned}
$$

とおく．つまり，上の図式から得られる写像 $M \to \mathcal{C} \otimes_A N \otimes_B \mathcal{D}$ について，

$$
\begin{aligned}
Q(f) = {} & (f \text{ を通る写像}) - (f \otimes I_{\mathcal{D}} \text{ を通る写像}) \\
& - (I_{\mathcal{C}} \otimes f \text{ を通る写像}) + (I_{\mathcal{C}} \otimes f \otimes I_{\mathcal{D}} \text{ を通る写像})
\end{aligned}
$$

とおいたのである．

定義 2.2. A, B を代数，$\mathcal{C}$ を A 余環，$\mathcal{D}$ を B 余環，$M, N \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}}$，$f \in {}_A\mathrm{Hom}_B(M, N)$ とする．$Q(f) = 0$ が成り立つとき，f を M から N への一般余導分という．M から N への一般余導分の全体が成す集合を $\mathrm{GCoder}(M, N)$ で表す．これは ${}_A\mathrm{Hom}_B(M, N)$ の R 部分加群である．

次の補題は容易である．

補題 2.3. A, B を代数，$\mathcal{C}$ を A 余環，$\mathcal{D}$ を B 余環，$L, M, N \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}}$，$f \in {}_A\mathrm{Hom}_B(M, N)$ とするとき，次が成り立つ．

(1) 任意の $g \in {}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}^{\mathcal{D}}(L, M)$ に対して，$Q(f \circ g) = Q(f) \circ g$ が成り立つ．

(2) 任意の $h \in {}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}^{\mathcal{D}}(N, L)$ に対して，$Q(h \circ f) = (I_{\mathcal{C}} \otimes h \otimes I_{\mathcal{D}}) \circ Q(f)$ が成り立つ．

補題 2.3 により，関手 ${}_A\mathrm{Hom}_B$ の部分関手

$$
\mathrm{GCoder} : ({}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}} \times {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}} \to \mathbf{M}_R
$$

が得られる．ここに $\mathbf{M}_R$ は R 加群の圏である．

特別な場合として $\mathcal{C}=\mathcal{D}$ であるときは，次の定理2.4で示すように，$(\mathcal{C},\mathcal{C})$ 両側余加群 M から $\mathcal{C}$ への一般余導分は余導分 (coderivation) と密接な関係にある．$f\in {}_A\mathrm{Hom}_A(M,\mathcal{C})$ に対して次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & M\otimes_A\mathcal{C} \arrow[dr, "f\otimes I_{\mathcal{C}}"] & \\
M \arrow[ur, "\rho^M"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "{}^M\rho"'] & \mathcal{C} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{C}\otimes_A\mathcal{C} \\
 & \mathcal{C}\otimes_A M \arrow[ur, "I_{\mathcal{C}}\otimes f"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで，Δ は $\mathcal{C}$ の余積であり，${}^M\rho$ と ρ^M はそれぞれ M の左余作用と右余作用である．特に

$$\Delta\circ f=(f\otimes I_{\mathcal{C}})\circ\rho^M+(I_{\mathcal{C}}\otimes f)\circ{}^M\rho$$

が成り立つとき，f を余導分という．M から $\mathcal{C}$ への余導分の全体を $\mathrm{Coder}(M,\mathcal{C})$ で表す．

定理 2.4. 代数 A 上の余環 $\mathcal{C}$，$M\in{}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$，$f\in{}_A\mathrm{Hom}_A(M,\mathcal{C})$ に対して，次の条件は同値である．ここで，Δ は $\mathcal{C}$ の余積，ε は $\mathcal{C}$ の余単位写像，${}^M\rho$ と ρ^M は M の左余作用と右余作用である．

(1) $f\in\mathrm{GCoder}(M,\mathcal{C})$

(2) $f-(\varepsilon\circ f)_{\mathrm{L}}\in\mathrm{Coder}(M,\mathcal{C})$ である．ここに，$(\varepsilon\circ f)_{\mathrm{L}}$ は合成写像

$$M\xrightarrow{\rho^M}M\otimes_A\mathcal{C}\xrightarrow{(\varepsilon\circ f)\otimes I_{\mathcal{C}}}A\otimes_A\mathcal{C}\xrightarrow{\nu}\mathcal{C}$$

を表す．ν は自然な同型写像である．

(3) $\Delta\circ f-(f\otimes I_{\mathcal{C}})\circ\rho^M-(I_{\mathcal{C}}\otimes f)\circ{}^M\rho\in{}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M,\ \mathcal{C}\otimes_A\mathcal{C})$

(4) $\Delta\circ f=(f\otimes I_{\mathcal{C}})\circ\rho^M+(I_{\mathcal{C}}\otimes d)\circ{}^M\rho$ を満たす $d\in\mathrm{Coder}(M,\mathcal{C})$ が存在する．

(5) $\Delta\circ f'=(f\otimes I_{\mathcal{C}})\circ\rho^M+(I_{\mathcal{C}}\otimes f'')\circ{}^M\rho$ を満たす f'，$f''\in{}_A\mathrm{Hom}_A(M,\mathcal{C})$ が存在する．

Nakajima [7] は定理2.4の条件 (3) を満たす f を一般余導分と呼んだ．これは Nakajima [6] の一般導分の双対概念である．一般導分には他の定義が知られている．Brešar [1] が定義した一般導分の双対概念が定理2.4の条件 (4) に相当し，Leger-Luks [5] が定義した一般導分の双対概念が定理2.4の条件 (5) に相当する．

系 2.5. 代数 A 上の余環 $\mathcal{C}$ と $M\in{}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ に対して，

$$\mathrm{GCoder}(M,\mathcal{C})=\mathrm{Coder}(M,\mathcal{C})\oplus{}_A\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M,\mathcal{C})=\mathrm{Coder}(M,\mathcal{C})\oplus{}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_A(M,\mathcal{C})$$

が成り立つ．

3. 普遍的一般余導分

Doi [3] は余代数の普遍的余導分 (universal coderivation) を構成した．本節では，余環の普遍的一般余導分を構成する．ここで言う普遍性は定理3.3の意味である．

定義 3.1. A, B を代数，$\mathcal{C}$ を A 余環，$\mathcal{D}$ を B 余環とする．$M \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}}$ に対して，合成写像

$$\mathcal{C} \otimes_A M \otimes_B \mathcal{D} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{C}} \otimes I_M \otimes \varepsilon_{\mathcal{D}}} A \otimes_A M \otimes_B B \xrightarrow{\nu} M$$

を ${}^{M}\varepsilon^{M}$ で表す．ここで，$\varepsilon_{\mathcal{C}}$ と $\varepsilon_{\mathcal{D}}$ はそれぞれ$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の余単位写像であり，ν は自然な同型写像である．写像

$$I_{\mathcal{C} \otimes_A M \otimes_B \mathcal{D}} - Q({}^{M}\varepsilon^{M}) : \mathcal{C} \otimes_A M \otimes_B \mathcal{D} \to \mathcal{C} \otimes_A M \otimes_B \mathcal{D}$$

の像を $\mathcal{U}(M)$ とおき，写像 ${}^{M}\varepsilon^{M}$ を $\mathcal{U}(M)$ へ制限して得られる写像を

$$u_M : \mathcal{U}(M) \to M$$

とおく．

補題 3.2. A, B を代数，$\mathcal{C}$ を A 余環，$\mathcal{D}$ を B 余環，$M \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}}$ とするとき，次が成り立つ．

(1) $Q({}^{M}\varepsilon^{M})$ は自己準同型環 ${}_A\mathrm{End}_B(\mathcal{C} \otimes_A M \otimes_B \mathcal{D})$ のべき等元である．
(2) $\mathcal{U}(M)$ は $\mathcal{C} \otimes_A M \otimes_B \mathcal{D}$ の部分余加群である．
(3) u_M は一般余導分である．

定理 3.3. A, B を代数，$\mathcal{C}$ を A 余環，$\mathcal{D}$ を B 余環，$M, N \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}}$ とするとき，

$${}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}^{\mathcal{D}}(M, \mathcal{U}(N)) \ni f \mapsto u_N \circ f \in \mathrm{GCoder}(M, N)$$

は R 同型写像である．

余環 $\mathcal{D}$ の逆余環 (opposite coring) $\mathcal{D}^{\mathrm{cop}}$ を考える．これは B の逆代数 (opposite algebra) B^{op} の上の余環であるから，$A \otimes_R B^{\mathrm{op}}$ 余環 $\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{D}^{\mathrm{cop}}$ が得られる．このとき，$\mathcal{U}(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{D})$ は $(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{D}^{\mathrm{cop}}, \mathcal{C} \otimes_R \mathcal{D}^{\mathrm{cop}})$ 両側余加群と見ることができ，任意の $M \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}}$ は $\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{D}^{\mathrm{cop}}$ 左余加群と見ることができる．そして次が成り立つ．

定理 3.4. A, B を代数，$\mathcal{C}$ を A 余環，$\mathcal{D}$ を B 余環，$M \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}}$ とするとき，$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 両側余加群として $\mathcal{U}(M) \simeq \mathcal{U}(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{D}) \,\square_{\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{D}^{\mathrm{cop}}} M$ が成り立つ．

4. 余分離余環

A, B を代数，$\mathcal{C}$ を A 余環，$\mathcal{D}$ を B 余環とするとき，任意の $M, N \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}}$ に対して，

$$\mathrm{GCoder}(M, N) \supseteq {}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_B(M, N) + {}_A\mathrm{Hom}^{\mathcal{D}}(M, N)$$

が成り立つ．本節では，すべての $M, N \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}}$ に対して

$$\mathrm{GCoder}(M, N) = {}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_B(M, N) + {}_A\mathrm{Hom}^{\mathcal{D}}(M, N)$$

が成り立つことは, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ の余分離性と関係があることを示す.

[2] に従って, $\mathcal{C}$ の余積 $\mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}$ が $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ 両側余加群写像として分裂するとき, $\mathcal{C}$ は余分離 A 余環であるという. これは代数の分離拡大の双対概念である.

定理 4.1. A, B を代数, $\mathcal{C}$ を余分離 A 余環, $\mathcal{D}$ を余分離 B 余環とするとき, 任意の M, $N \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{D}}$ に対して,

$$\mathrm{GCoder}(M, N) = {}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_B(M, N) + {}_A\mathrm{Hom}^{\mathcal{D}}(M, N)$$

が成り立つ.

定理 4.2. 代数 A 上の余環 $\mathcal{C}$ に対して, 次の条件は同値である.

(1) $\mathcal{C}$ は余分離 A 余環である.

(2) 任意の $M \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ に対して,

$$\mathrm{GCoder}(M, \mathcal{C}) = {}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{C}) + {}_A\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, \mathcal{C})$$

が成り立つ.

(3) 任意の M, $N \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ に対して,

$$\mathrm{GCoder}(M, N) = {}^{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_A(M, N) + {}_A\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, N)$$

が成り立つ.

References

[1] M. Brešar, On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations, *Glasgow Math. J.*, **33** (1991), 89–93.

[2] T. Brzeziński and R. Wisbauer, Corings and Comodules, Cambridge University Press, Cambridge, 2003

[3] Y. Doi, Homological coalgebra, *J. Math. Soc. Japan*, **33** (1981), 31–50.

[4] H. Komatsu, Generalized derivations of bimodules, *to appear in Internat. J. Pure Appl. Math.*

[5] G. F. Leger and E. M. Luks, Generalized derivations of Lie algebras, *J. Algebra*, **228** (2000), 165–203.

[6] A. Nakajima, On categorical properties of generalized derivations, *Scientiae Math.*, **2** (1999), 345–352.

[7] A. Nakajima, On generalized coderivations, *to appear in Internat. Electric J. Algebra.*