

一般導分の双対概念について<sup>1</sup>

岡山県立大学・情報工学部 小松 弘明 (Hiroaki Komatsu)  
Faculty of Computer Science and System Engineering  
Okayama Prefectural University

本稿では, Nakajima [7] が与えた余代数  $C$  上の両側余加群から  $C$  への一般余導分の概念を, 代数  $A$  上の余環  $\mathcal{C}$  と代数  $B$  上の余環  $\mathcal{D}$  の上の  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  両側余加群から  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  両側余加群への写像にまで拡張する. 拡張された一般余導分を表現する  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  両側余加群を構成し, それを用いて余分離余環の新たな特徴付けを与える.

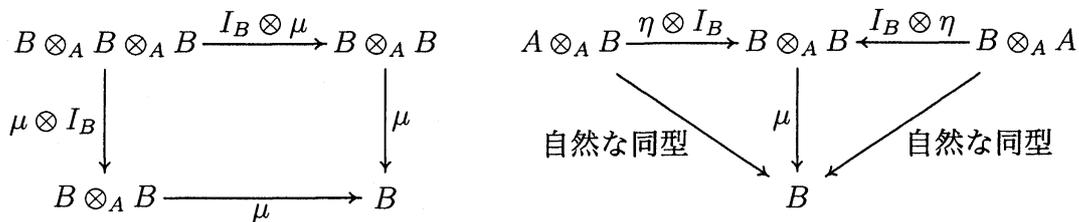
1. 余環とその上の両側余加群

本稿において,  $R$  は単位元を有する可換環を表し, 代数と言えば常に単位元を有する結合的  $R$  代数を意味する. 代数  $A, B$  上の  $(A, B)$  両側加群の圏を  ${}_A\mathbf{M}_B$  で表す.  $M, N \in {}_A\mathbf{M}_B$  に対して,  $M$  から  $N$  への  $(A, B)$  両側加群写像の全体を  ${}_A\text{Hom}_B(M, N)$  で表す.

$A$  を代数とする. 代数  $B$  と代数としての準同型写像  $\eta: A \rightarrow B$  で単位元を単位元へ移すものが与えられたとき,  $B$  を  $A$  環という. 次のように言い替えることができる.

$$B \in {}_A\mathbf{M}_A, \quad \mu \in {}_A\text{Hom}_A(B \otimes_A B, B), \quad \eta \in {}_A\text{Hom}_A(A, B)$$

が与えられて, 図式

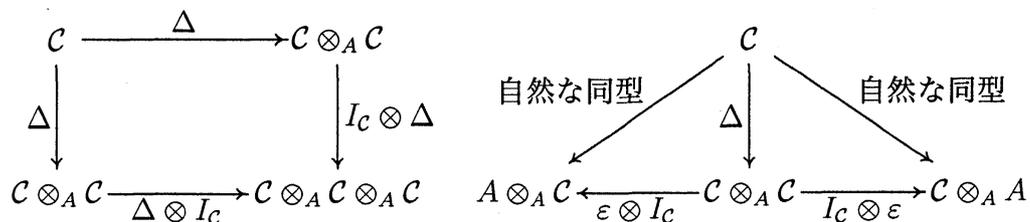


が可換であるとき,  $B$  を  $A$  環という. ここで,  $I_X$  は集合  $X$  の恒等写像を表す.

双対化して,

$$C \in {}_A\mathbf{M}_A, \quad \Delta \in {}_A\text{Hom}_A(C, C \otimes_A C), \quad \varepsilon \in {}_A\text{Hom}_A(C, A)$$

が与えられて, 図式



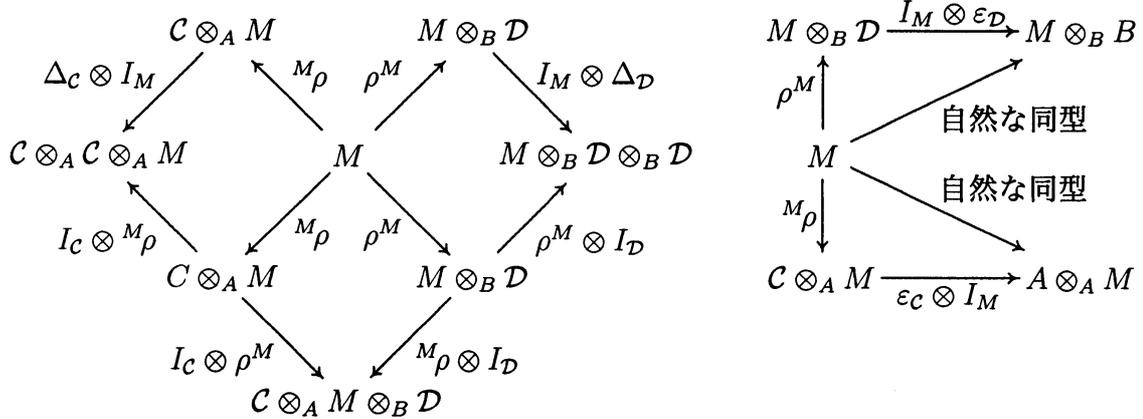
が可換であるとき,  $C$  を  $A$  余環という.  $\Delta$  を  $C$  の余積といい,  $\varepsilon$  を  $C$  の余単位写像という.

<sup>1</sup> 本論文は投稿予定の論文の予報である.

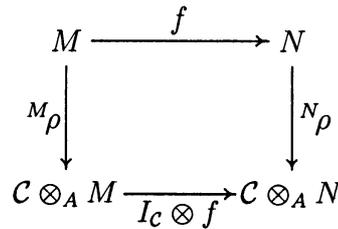
$A, B$  を代数,  $C$  を  $A$  余環,  $D$  を  $B$  余環とする.  $C$  の余積と余単位写像をそれぞれ  $\Delta_C$  と  $\varepsilon_C$  とし,  $D$  の余積と余単位写像をそれぞれ  $\Delta_D$  と  $\varepsilon_D$  とする.

$$M \in {}_A M_B, \quad {}^M \rho \in {}_A \text{Hom}_B(M, C \otimes_A M), \quad \rho^M \in {}_A \text{Hom}_B(M, M \otimes_B D)$$

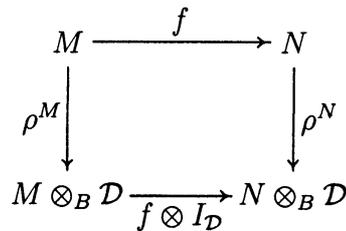
が与えられて, 図式



が可換であるとき,  $M$  を  $(C, D)$  両側余加群という.  ${}^M \rho$  と  $\rho^M$  をそれぞれ  $M$  の左余作用と右余作用という.  $M, N$  を  $(C, D)$  両側余加群とする.  $f \in {}_A \text{Hom}_B(M, N)$  で図式



が可換になるものの全体を  ${}^C \text{Hom}_B(M, N)$  で表す. 同様に,  $f \in {}_A \text{Hom}_B(M, N)$  で図式



が可換になるものの全体を  ${}_A \text{Hom}^D(M, N)$  で表す. そして,

$${}^C \text{Hom}^D(M, N) = {}^C \text{Hom}_B(M, N) \cap {}_A \text{Hom}^D(M, N)$$

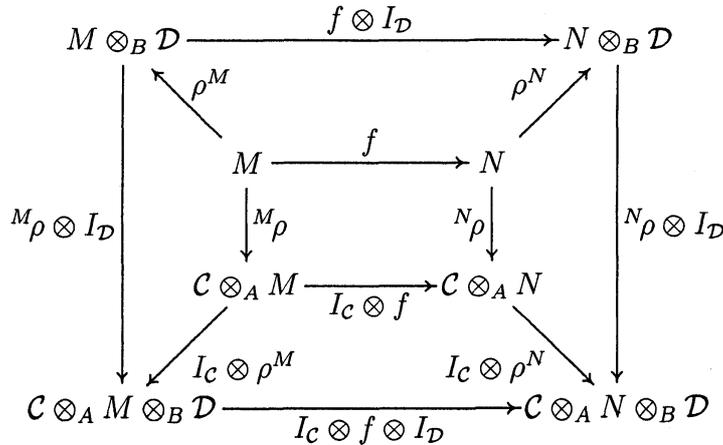
とおく.  ${}^C \text{Hom}^D(M, N)$  を射の集合とする  $(C, D)$  両側余加群の圏を  ${}^C M^D$  で表す.

余環の理論の詳細については Brzeziński と Wisbauer の著書 [2] で知ることができる.

## 2. 両側余加群の一般余導分

筆者は [4] において代数上の両側加群の一般導分 (generalized derivation) の概念を導入した. それを双対化して, 余代数上の両側余加群の一般余導分 (generalized coderivation) の概念を導入する.

定義 2.1.  $A, B$  を代数,  $C$  を  $A$  余環,  $D$  を  $B$  余環,  $M, N \in {}^C M^D$ ,  $f \in {}_A \text{Hom}_B(M, N)$  とする. 次の図式を考える.



ここで,  ${}^M\rho$  と  $\rho^M$  は  $M$  の左余作用と右余作用を表し,  ${}^N\rho$  と  $\rho^N$  は  $N$  の左余作用と右余作用を表す. この図式に現れる写像を用いて,

$$\begin{aligned}
 Q(f) &= ({}^N\rho \otimes I_D) \circ \rho^N \circ f - ({}^N\rho \otimes I_D) \circ (f \otimes I_D) \circ \rho^M \\
 &\quad - (I_C \otimes \rho^N) \circ (I_C \otimes f) \circ {}^M\rho + (I_C \otimes f \otimes I_D) \circ (I_C \otimes \rho^M) \circ {}^M\rho
 \end{aligned}$$

とおく. つまり, 上の図式から得られる写像  $M \rightarrow C \otimes_A N \otimes_B D$  について,

$$\begin{aligned}
 Q(f) &= (f \text{ を通る写像}) - (f \otimes I_D \text{ を通る写像}) \\
 &\quad - (I_C \otimes f \text{ を通る写像}) + (I_C \otimes f \otimes I_D \text{ を通る写像})
 \end{aligned}$$

とおいたのである.

定義 2.2.  $A, B$  を代数,  $C$  を  $A$  余環,  $D$  を  $B$  余環,  $M, N \in {}^C M^D$ ,  $f \in {}_A \text{Hom}_B(M, N)$  とする.  $Q(f) = 0$  が成り立つとき,  $f$  を  $M$  から  $N$  への一般余導分という.  $M$  から  $N$  への一般余導分の全体が成す集合を  $\text{GCoder}(M, N)$  で表す. これは  ${}_A \text{Hom}_B(M, N)$  の  $R$  部分加群である.

次の補題は容易である.

補題 2.3.  $A, B$  を代数,  $C$  を  $A$  余環,  $D$  を  $B$  余環,  $L, M, N \in {}^C M^D$ ,  $f \in {}_A \text{Hom}_B(M, N)$  とするとき, 次が成り立つ.

- (1) 任意の  $g \in {}^C \text{Hom}^D(L, M)$  に対して,  $Q(f \circ g) = Q(f) \circ g$  が成り立つ.
- (2) 任意の  $h \in {}^C \text{Hom}^D(N, L)$  に対して,  $Q(h \circ f) = (I_C \otimes h \otimes I_D) \circ Q(f)$  が成り立つ.

補題 2.3 により, 関手  ${}_A \text{Hom}_B$  の部分関手

$$\text{GCoder} : ({}^C M^D)^{\text{op}} \times {}^C M^D \rightarrow M_R$$

が得られる. ここに  $M_R$  は  $R$  加群の圏である.

特別な場合として  $C = D$  であるときは, 次の定理 2.4 で示すように,  $(C, C)$  両側余加群  $M$  から  $C$  への一般余導分は余導分 (coderivation) と密接な関係にある.  $f \in {}_A\text{Hom}_A(M, C)$  に対して次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M \otimes_A C & & \\
 & \nearrow \rho^M & & \searrow f \otimes I_C & \\
 M & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes_A C \\
 & \searrow {}^M\rho & & \nearrow I_C \otimes f & \\
 & & C \otimes_A M & & 
 \end{array}$$

ここで,  $\Delta$  は  $C$  の余積であり,  ${}^M\rho$  と  $\rho^M$  はそれぞれ  $M$  の左余作用と右余作用である. 特に

$$\Delta \circ f = (f \otimes I_C) \circ \rho^M + (I_C \otimes f) \circ {}^M\rho$$

が成り立つとき,  $f$  を余導分という.  $M$  から  $C$  への余導分の全体を  $\text{Coder}(M, C)$  で表す.

**定理 2.4.** 代数  $A$  上の余環  $C$ ,  $M \in {}^C\mathcal{M}^C$ ,  $f \in {}_A\text{Hom}_A(M, C)$  に対して, 次の条件は同値である. ここで,  $\Delta$  は  $C$  の余積,  $\varepsilon$  は  $C$  の余単位写像,  ${}^M\rho$  と  $\rho^M$  は  $M$  の左余作用と右余作用である.

- (1)  $f \in \text{GCoder}(M, C)$
- (2)  $f - (\varepsilon \circ f)_L \in \text{Coder}(M, C)$  である. ここに,  $(\varepsilon \circ f)_L$  は合成写像

$$M \xrightarrow{\rho^M} M \otimes_A C \xrightarrow{(\varepsilon \circ f) \otimes I_C} A \otimes_A C \xrightarrow{\nu} C$$

を表す.  $\nu$  は自然な同型写像である.

- (3)  $\Delta \circ f - (f \otimes I_C) \circ \rho^M - (I_C \otimes f) \circ {}^M\rho \in {}^C\text{Hom}^C(M, C \otimes_A C)$
- (4)  $\Delta \circ f = (f \otimes I_C) \circ \rho^M + (I_C \otimes d) \circ {}^M\rho$  を満たす  $d \in \text{Coder}(M, C)$  が存在する.
- (5)  $\Delta \circ f' = (f \otimes I_C) \circ \rho^M + (I_C \otimes f'') \circ {}^M\rho$  を満たす  $f', f'' \in {}_A\text{Hom}_A(M, C)$  が存在する.

Nakajima [7] は定理 2.4 の条件 (3) を満たす  $f$  を一般余導分と呼んだ. これは Nakajima [6] の一般導分の双対概念である. 一般導分には他の定義が知られている. Brešar [1] が定義した一般導分の双対概念が定理 2.4 の条件 (4) に相当し, Leger-Luks [5] が定義した一般導分の双対概念が定理 2.4 の条件 (5) に相当する.

**系 2.5.** 代数  $A$  上の余環  $C$  と  $M \in {}^C\mathcal{M}^C$  に対して,

$$\text{GCoder}(M, C) = \text{Coder}(M, C) \oplus {}_A\text{Hom}^C(M, C) = \text{Coder}(M, C) \oplus {}^C\text{Hom}_A(M, C)$$

が成り立つ.

## 3. 普遍的な一般余導分

Doi [3] は余代数の普遍的余導分 (universal coderivation) を構成した. 本節では, 余環の普遍的な一般余導分を構成する. ここで言う普遍性は定理 3.3 の意味である.

定義 3.1.  $A, B$  を代数,  $C$  を  $A$  余環,  $D$  を  $B$  余環とする.  $M \in {}^C\mathbf{M}^D$  に対して, 合成写像

$$C \otimes_A M \otimes_B D \xrightarrow{\varepsilon_C \otimes I_M \otimes \varepsilon_D} A \otimes_A M \otimes_B B \xrightarrow{\nu} M$$

を  $M_{\varepsilon^M}$  で表す. ここで,  $\varepsilon_C$  と  $\varepsilon_D$  はそれぞれ  $C$  と  $D$  の余単位写像であり,  $\nu$  は自然な同型写像である. 写像

$$I_{C \otimes_A M \otimes_B D} - Q^{(M_{\varepsilon^M})} : C \otimes_A M \otimes_B D \rightarrow C \otimes_A M \otimes_B D$$

の像を  $\mathcal{U}(M)$  とおき, 写像  $M_{\varepsilon^M}$  を  $\mathcal{U}(M)$  へ制限して得られる写像を

$$u_M : \mathcal{U}(M) \rightarrow M$$

とおく.

補題 3.2.  $A, B$  を代数,  $C$  を  $A$  余環,  $D$  を  $B$  余環,  $M \in {}^C\mathbf{M}^D$  とするとき, 次が成り立つ.

- (1)  $Q^{(M_{\varepsilon^M})}$  は自己準同型環  ${}_A\text{End}_B(C \otimes_A M \otimes_B D)$  のべき等元である.
- (2)  $\mathcal{U}(M)$  は  $C \otimes_A M \otimes_B D$  の部分余加群である.
- (3)  $u_M$  は一般余導分である.

定理 3.3.  $A, B$  を代数,  $C$  を  $A$  余環,  $D$  を  $B$  余環,  $M, N \in {}^C\mathbf{M}^D$  とするとき,

$${}^C\text{Hom}^D(M, \mathcal{U}(N)) \ni f \mapsto u_N \circ f \in \text{GCoder}(M, N)$$

は  $R$  同型写像である.

余環  $D$  の逆余環 (opposite coring)  $D^{\text{cop}}$  を考える. これは  $B$  の逆代数 (opposite algebra)  $B^{\text{op}}$  の上の余環であるから,  $A \otimes_R B^{\text{op}}$  余環  $C \otimes_R D^{\text{cop}}$  が得られる. このとき,  $\mathcal{U}(C \otimes_R D)$  は  $(C \otimes_R D^{\text{cop}}, C \otimes_R D^{\text{cop}})$  両側余加群と見ることができ, 任意の  $M \in {}^C\mathbf{M}^D$  は  $C \otimes_R D^{\text{cop}}$  左余加群と見ることができる. そして次が成り立つ.

定理 3.4.  $A, B$  を代数,  $C$  を  $A$  余環,  $D$  を  $B$  余環,  $M \in {}^C\mathbf{M}^D$  とするとき,  $(C, D)$  両側余加群として  $\mathcal{U}(M) \simeq \mathcal{U}(C \otimes_R D) \square_{C \otimes_R D^{\text{cop}}} M$  が成り立つ.

## 4. 余分離余環

$A, B$  を代数,  $C$  を  $A$  余環,  $D$  を  $B$  余環とするとき, 任意の  $M, N \in {}^C\mathbf{M}^D$  に対して,

$$\text{GCoder}(M, N) \supseteq {}^C\text{Hom}_B(M, N) + {}_A\text{Hom}^D(M, N)$$

が成り立つ. 本節では, すべての  $M, N \in {}^C\mathbf{M}^D$  に対して

$$\text{GCoder}(M, N) = {}^C\text{Hom}_B(M, N) + {}_A\text{Hom}^D(M, N)$$

が成り立つことは,  $C, D$  の余分離性と関係があることを示す.

[2] に従って,  $C$  の余積  $C \rightarrow C \otimes_A C$  が  $(C, C)$  両側余加群写像として分裂するとき,  $C$  は余分離  $A$  余環であるという. これは代数の分離拡大の双対概念である.

定理 4.1.  $A, B$  を代数,  $C$  を余分離  $A$  余環,  $D$  を余分離  $B$  余環とすると, 任意の  $M, N \in {}^C M^D$  に対して,

$$\text{GCoder}(M, N) = {}^C \text{Hom}_B(M, N) + {}_A \text{Hom}^D(M, N)$$

が成り立つ.

定理 4.2. 代数  $A$  上の余環  $C$  に対して, 次の条件は同値である.

- (1)  $C$  は余分離  $A$  余環である.
- (2) 任意の  $M \in {}^C M^C$  に対して,

$$\text{GCoder}(M, C) = {}^C \text{Hom}_A(M, C) + {}_A \text{Hom}^C(M, C)$$

が成り立つ.

- (3) 任意の  $M, N \in {}^C M^C$  に対して,

$$\text{GCoder}(M, N) = {}^C \text{Hom}_A(M, N) + {}_A \text{Hom}^C(M, N)$$

が成り立つ.

#### REFERENCES

- [1] M. Brešar, On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations, *Glasgow Math. J.*, **33** (1991), 89–93.
- [2] T. Brzeziński and R. Wisbauer, *Corings and Comodules*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [3] Y. Doi, Homological coalgebra, *J. Math. Soc. Japan*, **33** (1981), 31–50.
- [4] H. Komatsu, Generalized derivations of bimodules, *to appear in Internat. J. Pure Appl. Math.*
- [5] G. F. Leger and E. M. Luks, Generalized derivations of Lie algebras, *J. Algebra*, **228** (2000), 165–203.
- [6] A. Nakajima, On categorical properties of generalized derivations, *Scientiae Math.*, **2** (1999), 345–352.
- [7] A. Nakajima, On generalized coderivations, *to appear in Internat. Electric J. Algebra.*