数理解析研究所講究録
第 1809 巻 2012 年 181-187

Are group rings of one-relator groups with torsion primitive?

岡山商科大学・経営学部　西中恒和 (Tsunekazu Nishinaka)*
Department of Budiness Administration
Okayama Shoka University

一般に環 R において、ある既約（右）R-加群の零化イデアルがゼロである時、R は（右）原始環 (a right primitive ring) であると言われ、全ての既約（右）R-加群の零化イデアルの共通部分がゼロであるとき、R は半原始環 (a semiprimitive ring) と言われる。群環の原始性、半原始性問題は無限群の群環における研究の中心課題として位置づけられてきた。群環の半原始性問題は有限群の群環に対する Maschke の定理を無限群に対するものへ拡張しようとするものであるのに対し、群環の原始性は有限群の群環には現れず、無限群の群環特有の問題である。また複素数体上の群環は半原始であることが知られており、標数 0 の体上の群環は半原始であることが予想されている。従って、半原始性は無限群の性質をそれほど反映しないと考えられる。しかし、原始性は群の性質に強く依存し、群環の原始性は無限群の情報を提供し得ると考えられる。一方、原始環は半原始環であり、任意の体に対して半原始とき、その群環は実際は原始であることが予想される。剰余有限性を持つ群、特に任意の素数 p に対して p 剰余有限である群は任意の体に対して半原始となるので、剰余有限性をもつ群の群環の多くは原始であることが予想される。

ここでは、古くから今日までよく研究され、その剰余有限性が予想されている捩れ 1 関係子群を取り上げ、その群環の原始性を考察する。

1　原始環

R を（非可換）環 ($\ni 1$) とする。ある既約右 R 加群の零化イデアルがゼロとなるとき、R は右原始環 (a right primitive ring) であると言う。R が右原始環であることと R に極大右 ideal で、自明でない R の両側 ideal を含まないものが存在するということは同値である。左原始環も同様に定義される。一般に右原始環は必ずしも左原始環ではないが、群環においては右原始環はいつでも左原始環となる。以下では右原始環を単に原始環と呼ぶ。

全ての既約（右）R-加群の零化イデアルの共通部分（これはイデアルとなり、Jacobson 根基として知られている）がゼロであるとき、R は半原始 (semiprimitive) と呼ばれる。原始環は半原始環である。R が自明でない ideal を持たないとき、R は単純 (simple) であると言う。単純環は原始環である。Artin 的な環（例えば、体上有限次元代数）では Wedderburn-Artin の定理から、単純環は斜体上の行列環に同型であり、半原始環はそれら行列環の有限直和に同型である。

可換環においては、単純環も原始環も単に体である。Artin 的環では原始環は単純環に一

* Partially supported by Grants-in-Aid for Sientific Research under grant no. 23540063

致する。従って、環の原始性は非可換で非 Artin 的な環において意味を持つ。そして、このような場合、単純環でない原始環は存在する。典型的な例は体 K 上無限次元ベクトル空間 V の線形写像全体のなす環 $R = End(_K V)$ である。これは原始環であるが単純環ではない。実際、V は 既約 R 加群であり、その零化イデアルはゼロである。しかし、有限個の基底を除いてすべてゼロに写すような線形写像の全体は R のゼロでないイデアルとなり、R は単純環ではない。 また、本稿の主題である群環においては、原始環はいつでも単純環ではない。

2 群環とその原始性

以下において、KG で群 G の体 K 上の群環を表すこととする。環が右イデアルの降鎖条件 (descending chain condition) を満たすとき、また右イデアルの昇鎖条件 (ascending chain condition) を満たすとき、それぞれ、右アルチン的 (right Artinian)、右ネータ的 (right Noetherian) であると言われる。以後単に右アルチン的環、右ネータ的環をそれぞれ、アルチン環、ネーター環という。単位元を持つ環を考える限り、アルチン環はネーター環である。また、有限次元代数である環はアルチン環である。

まず、KG がアルチン環である必要十分条件は G が有限群であることが古くから知られている ([4])。従って、G が有限群であれば、原始環である KG は体となり $G = 1$ を意味する。従って、自明でない有限群 G に対して KG は決して原始環とはなりえない。一方、有限群 G に対する KG の半原始性は Maschke の定理としてよく知られている。

Maschle's Theorem G を位数 n の有限群とし、K を体とする。K の標数を $Ch(K)$ で表す。このとき、KG が半原始であることの必要十分条件は $Ch(K) = 0$ か $Ch(K) = p$ であれば p は n を割らないことである。

Maschke の定理を一般の群（無限群）に対するものへ拡張しようとする試みは半原始性問題と呼ばれ、無限群の群環における中心課題としてよく研究されてきている。

$J(KG)$ を KG の Jacbson 根基とする。M .Wood [15] は $KG/J(KG)$ がアルチン環であれば、G が periodic であることを示している。一方、 periodic な群はその指数 n が一定でも n が大きければ、有限群でないことが知られている（Burnside 問題の否定的解決）。$B(n,m)$ を m 元生成の指数 n の自由 Burnside 群とすると、有限群でない $B(n,m)$ は剰余有限でないことも知られている（制限された Burnside 問題の解決 [16], [17]）。また、その場合、$KB(n,m)$ の原始性が予想されるが、半原始性と共にまだ分かっていない。

一方、KG がネーター環であるための必要条件はまだ知られていない。G が polycyclic by finite である時、KG がネーター環になることはよく知られており、この場合、KG の原始性に関して完全な解答が得られている。ここで、群 G は G の正規列 $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n = 1$ で、G_i/G_{i+1} が巡回群になっているものが存在するとき、polycyclic 群と呼ばれる。

定理１ (Domanov[5], Farkas-Passman [7] and Roseblade [12]) G を polycyclic by finite 群（指数有限の正規 polycyclic 部分群が存在する）とする。以下の (i), (ii) を満たすことが、KG が原始であるための必要十分条件である。

(i) K は有限体の代数拡大ではない。

(ii) $\Delta(G) = 1$ である。

ここに、$\Delta(G) = \{g \in G \mid g$ に共役な G の元は有限個 $\}$.

（非可換）自由群の群環がいつでも原始であることが Formanek ('73,[8]) により示された。Formanek は実際には自由群より一般に群の自由積に対し、以下を示している。

定理２ (Formanek [8]) G は共に自明でない群の自由積とする。G が２つの位数２の巡回群の自由積でないなら、任意の体 K に対して KG は原始である。特に、G が非可換自由群であれば KG は原始である。

この結果およびそこで展開された方法から無限群に近い群の群環はたいてい原始環になっているだろうことが予想されてきた。1989 年には Balogun [1] が融合積 (amalgamated free product) の群環の原始性を示し、1997 年、Chaudhry, Crabb and McGregor [3] は半群の自由積に対する半群環の原始性を示した。更に、2007 年に可算濃度の自由群の昇鎖 HNN 拡大に対し、その群環の原始性が得られ、2011 年それは一般濃度の結果へ拡張された。

定理３ (Nishinaka [10][11]) F を非可換自由群とし、$G = F_\phi$ を F の ϕ による昇鎖ＨＮＮ拡大とする。このとき、KG が原始であることの必要十分条件は $|K| \leq |F|$ または $\Delta(G) = 1$.

また、[11] において、局所自由群の群環の原始性を示すことができた。

定理４ (Nishinaka [11]) $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n \subseteq \cdots$ を非可換自由群たちの昇鎖とし、$G = \cup_{i=1}^{\infty} F_i$ とする。このとき、任意の体 K に対して、KG は原始である。特に、可算無限局所自由群の群環は原始である。

この中で、Formanek の方法をグラフ理論を用いて拡張し、証明のために利用している。そこでの方法を整備し一般化することにより、捩れ 1 関係子群の群環の原始性が示せそうである。

3 1関係子群の群環の原始性

$\langle X\rangle$ で基底集合 X の自由群を表す。$W\in\langle X\rangle$ を巡回的既約語（cyclically reduced word）として、$G=\langle X\mid W=1\rangle$ で表現される群 G を 1 関係子群（one-relator group）という。以下簡単に $G=\langle X\mid W\rangle$ で表す。

$[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab$ とする。閉曲面の基本群が 1 関係子群として表現されることが知られている。例えば、$\langle a,b\mid [a,b]\rangle$ はトーラスの基本群、$\langle a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n\mid [a_1,b_1]\cdots[a_n,b_n]\rangle$ は示性数 n の可符号閉曲面の基本群である。

$\langle a_1,\cdots,a_m\mid W^n\rangle$ で表現される群は $n>1$ のとき、ねじれを持つ 1 関係子群 (one-relator group with torsion) と呼ばれる。ここに、W は巡回的既約語（cyclically reduced word）である。ねじれを持つ 1 関係子群 $\langle a_1,\cdots,a_m\mid W^n\rangle$ はそれが巡回群である場合を除き、非可換で自由な部分群をもつことが知られている。また、捩れ 1 関係子群の剰余有限性が、1967 年、Baumslag により予想されている。この問題は現在まで未解決であるが、よく研究されており、多くの部分的解答が知られている（例えば、[6], [13], [14], [2]）。

さて、[11] で用いた方法を一般化することにより、以下の結果が得られる。

定理 5 G を無限群、KG を体 K 上の群環とする。G が以下の (1), (2) を満たせば、KG は原始環である。

(1) G の部分群 H で $|H|=|G|$ を満たす自由群 H が存在する。

(2) G の任意の有限個の元 $f_1,\cdots,f_m$, $g_1,\cdots,g_n$, $f_i\neq f_j$, $g_i\neq g_j$ $(i\neq j)$ に対して、G の元 x_1,x_2,x_3 で以下の (i), (ii) (iii) を満たすものが存在する。

(i) $\langle x_i,g_j\rangle$ は階数 2 の自由群である,

(ii) $f_ix_jg_kx_j=f_lx_sg_tx_s\iff(i,j,k)=(l,s,t)$,

(iii) $\prod_{t=1}^{s}(x_{l_t}g_{i_t}x_{l_t})^{-1}(x_{n_t}g_{j_t}x_{n_t})=1\Longrightarrow\exists t,\ n_t=l_{t+1}$ or $(l_t,i_t)=(n_t,j_t)$.

$G=\langle a,b,\cdots,d\mid W^n\rangle$, $n>1$, $|\{a,b,\cdots,d\}|=m>1$ とし、G に定理 5 を適用することを考える。まず、W の指数和 (the exponent sum of W) が 0 とそうでない場合、そのそれぞれ場合において、Reidemeister-Schreier process を使うことにより、G が以下の群 G^*

の巡回拡大になっていることが示される。

$$G^* = \langle b_i, \cdots, d_i \mid R_i \ (i \in \mathbb{Z})\rangle$$

ここで、

$$R_0 = V_0^n, \quad V_0 = V_0(b_{\mu_b}, \cdots, b_{M_b}, \cdots, d_{\mu_d}, \cdots, d_{M_d})$$

で、μ_b, M_b はそれぞれ R_0 に現れる b_i たちの添字 i の最小値、最大値を意味し、μ_d、M_d も d_i に対して同様の意味である。また、V_0 は $W = W(a, b, \cdots, d)$ から自然に構成される語である。そして、

$$R_i = V_i^n, \quad V_i = V_i(b_{\mu_b+i}, \cdots, b_{M_b+i}, \cdots, d_{\mu_d+i}, \cdots, d_{M_d+i}), \quad (i \in \mathbb{Z})$$

である。この時、KG^* が原始であれば、KG が原始となる。従って G^* が定理５の（１）、（２）を満たすことを示せばよい。

ここで、

$$\begin{aligned} P_i &= \langle b_{\mu_b+i}, b_{\mu_b+i+1}, \cdots, b_{M_b+i}, \cdots, d_{\mu_d+i}, d_{\mu_d+i+1}, \cdots, d_{M_d+i} \mid R_i\rangle \\ H_i &= \langle b_{\mu_b+i}, b_{\mu_b+i+1}, \cdots, b_{M_b+i-1}, \cdots, d_{\mu_d+i}, d_{\mu_d+i+1}, \cdots, d_{M_d+i-1}\rangle \end{aligned}$$

とおいて、G^* は更に以下のように構成される群 $Q = \bigcup_{i\geq 0} Q_i$ に同型であることが分かる。

$$\begin{array}{lll} Q_0 &= P_0 &= \langle b_{\mu_b}, b_{\mu_b+1}, \cdots, b_{M_b}, \cdots, d_{\mu_d}, d_{\mu_d+1}, \cdots, d_{M_d} \mid R_0\rangle \\ Q_1 &= Q_0 *_{H_1} P_1 &= \langle b_{\mu_b}, b_{\mu_b+1}, \cdots, b_{M_b+1}, \cdots, d_{\mu_d}, d_{\mu_d+1}, \cdots, d_{M_d+1} \mid R_0, R_1\rangle \\ Q_2 &= P_{-1} *_{H_0} Q_1 &= \langle b_{\mu_b-1}, b_{\mu_b}, \cdots, b_{M_b+1}, \cdots, d_{\mu_d-1}, d_{\mu_d}, \cdots, d_{M_d+1} \mid R_{-1}, R_0, R_1\rangle \\ Q_3 &= Q_2 *_{H_2} P_2 &= \langle b_{\mu_b-1}, b_{\mu_b}, \cdots, b_{M_b+2}, \cdots, d_{\mu_d-1}, d_{\mu_d}, \cdots, d_{M_d+2} \mid R_{-1}, R_0, R_1, R_2\rangle \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \end{array}$$

一般に

$$\begin{array}{lll} Q_{2i} &= P_{-i} *_{H_{-i+1}} Q_{2i-1} &= \langle b_{\mu_b-i}, \cdots, b_{M_b+i}, \cdots, d_{\mu_d-i}, \cdots, d_{M_d+i} \mid R_{-i}, \cdots, R_i\rangle \\ Q_{2i+1} &= Q_{2i} *_{H_{i+1}} P_{i+1} &= \langle b_{\mu_b-i}, \cdots, b_{M_b+i+1}, \cdots, d_{\mu_d-i}, \cdots, d_{M_d+i+1} \mid R_{-i}, \cdots, R_{i+1}\rangle \end{array}$$

である。

さて、この時、G^* が（１）を満たすことは容易に分かる。問題は（２）を満たす x_1, x_2, x_3 を任意に与えられた $f_1, \cdots, f_m, g_1, \cdots, g_n \in G^*$ に対してどのように選ぶことができるかである。

任意に与えられた $f_1, \cdots, f_m, g_1, \cdots, g_n \in G^*$ は、ある $q \geq 0$ が存在して Q_q に含まれる。この時、q に対して $q + 1 + 2(M_b - \mu_b) < 2p_1$ を満たす p_1、$p_1 + M_b - \mu_b < p_2$、

$p_2 + M_b - \mu_b < p_3$ を満たす p_2, p_3 をとり、$x_i \in P_{p_i} \setminus H_{p_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ なる x_1, x_2, x_3 をとれば、これらが（2）を満たしそうである。これを知るために、捩れ1関係子群の Word Problem を解く際に B. B. Newman が用いた Spelling Theorem と呼ばれている以下の結果が使われる。

定理6 (Newman [9]) $G = \langle a_1, \cdots, a_m \mid W^n \rangle$, $m > 1$, $n > 1$ とする。ここに、W は巡回的既約語（cyclically reduced word）である。$F = \langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ を自由群として、$\varphi : F \longrightarrow G$ を自然な全射準同型写像とする。このとき、

F の元 U が $\varphi(U) = 1$ を満たすならば、U には以下の (i), (ii) を満たす部分語 (subword) V が含まれている。

(i) V は $W^{\pm n}$ の巡回語 (the cyclic word of $W^{\pm n}$) の部分語である.

(ii) $|V| > \dfrac{1}{2}|W^{n-1}|$.

参考文献

[1] B. O. Balogun, *On the primitivity of group rings of amalgamated free products*, Proc. Amer. Math. Soc., 106(1)(1989), 43-47

[2] G. Baumslag C. F. Miller and D. Troeger, *Reflections on the residual finiteness of one-relator groups*, Groups. Geom. Dyn., **1**(2007), 209-219

[3] M. A. Chaudhry, M. J. Crabb and M. McGregor, *The primitivity of semigroup algebras of free products* Semigroup Forum, **54**(2)(1997), 221-229

[4] G. Connel, *On the group ring* Canad. J. Math., **15**(1963), 650-685

[5] O. I. Domanov, *Primitive group algebras of polycyclic groups*, Sibirsk. Mat. Ž., **19(1)**(1978), 37-43

[6] V. Egorov, *The residual finiteness of certain one-relator groups*, In Algebraic systems, Ivanov. Gos. Univ., Ivanovo, (1981), 100-121

[7] D. R. Farkas and D. S. Passman, *Primitive Noetherian group rings*, Comm. Algebra, **6(3)**(1978), 301-315.

[8] E. Formanek, *Group rings of free products are primitive*, J. Algebra, **26**(1973), 508-511

[9] B. B. Newman, *Some results on one-relator groups* Bull. Amer. Math. Soc., **74**(1968), 568-571

[10] T. Nishinaka, *Group rings of proper ascending HNN extensions of countably inifinte free groups are primitive*, J. Algebra, **317**(2007), 581-592

[11] T. Nishinaka, *Group rings of countable non-abelian locally free groups are primitive*, to appear in Int. J. algebra and computation (2011),

[12] J. E. Roseblade, *Prime ideals in group rings of polycyclic groups*, Proc. London Math. Soc., **36(3)**(1978), 385-447. Corrigenda "Prime ideals in group rings of polycyclic groups" Proc. London Math. Soc., **36(3)**(1979), 216-218.

[13] Daniel T. Wise, *The residual finiteness of positive one-relator groups*, Comment. Math. Helv., **76(2)**(2001), 314-338

[14] Daniel T. Wise, *Residual finiteness of quasi-positive one-relator groups*, J. London Math. Soc., **66**(2002), 334-350

[15] M. Wood, *Some results on semi-perfect group rings* Canad. J. Math., **26**(1974), 121-129

[16] E. I. Zelmanov, Solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent, *Math. USSR Izv.*, **36**(1991), 41-60.

[17] E. I. Zelmanov, Solution of the restricted Burnside problem for 2-groups, *Mat. Sb.*, **182**(1991), 586-592.