

非整数階微分による異常拡散のモデル化について (その 1)

東京大学大学院工学系研究科 島本憲夫(Norio SHIMAMOTO)
Graduate School of Engineering
The University of Tokyo

1. はじめに

生体における細胞近傍での物質の拡散においては, Brown 運動に基づいた通常の拡散現象とは異なる, 異常拡散 (Anomalous diffusion) と呼ばれる現象が観測されている [1,2]. 異常拡散は, ある観測時間の領域で拡散係数が時間変化に対してべき乗的に減少する拡散特性を示す現象であり, 細胞近傍での物質拡散の場合に限った現象ではなく, 高分子溶液のような不均質な媒体中での拡散, 土壌中での汚染物質の拡散においてなど, 様々な物理現象の中で観測されている. このような異常拡散の振る舞いは, 媒体が持つ複雑な構造が拡散する粒子の運動を阻害してもたらす効果だと考えられるが, 本稿では, これを時間フラクタル性を伴った時間発展による現象として捉える. 従来の拡散方程式において, 時間微分に非整数階微分を導入した拡散方程式により異常拡散をモデル化する方法について紹介する.

2. 異常拡散

Brown 運動に基づく通常の拡散において, 粒子が移動していく軌跡の平均二乗変位は時間 t に対して線形に比例して増加する関係にある. このときの傾きが拡散係数 D であり Brown 運動では一定値である.

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt, \quad D = \text{const.} \quad (2.1)$$

これに対して, 平均二乗変位や拡散係数が観測時間に関してべき乗で変化するような拡散特性を異常拡散と呼んでいる.

$$\langle x^2 \rangle \propto t^\alpha, \quad D \propto t^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (2.2)$$

細胞近傍での物質の拡散の場合で考えてみると, 細胞やそのまわりの組織は, 様々な高分子構造を持った物質で構成されており, それらは複雑に絡み合った構造体になっているものと考えら

れる。細胞での伝達物質は、このような複雑な媒体の中を拡散して伝播していくことになるが、組織構造が障壁となって拡散が阻害される。

このことを図 2.1 に示すような、障壁が相関距離 ξ で存在する区画されたような媒体中での粒子の運動で考えてみる。Brown 運動の場合、粒子の運動を観測する時間ステップを Δt_i 、観測時間内に粒子が移動する変位を Δx_i とすると、これらは拡散係数を D としたとき、 $D \sim (\Delta x_i)^2 / \Delta t_i$ の関係にある。観測時間 Δt_i での変位 Δx_i と相関距離 ξ との関係において、次のような 3 つのケースが考えられる [1,9]。

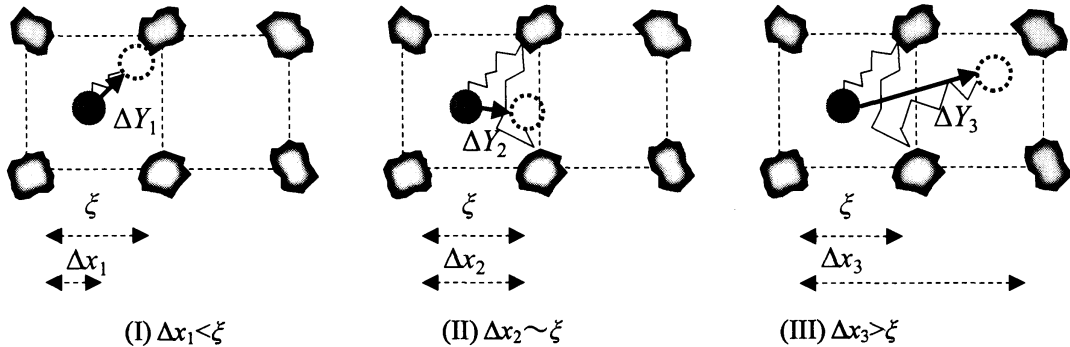


図 2.1. 障壁による拡散の囲い込み効果

(I) $\Delta x_1 < \xi$ となるような Δt_1 で観測

粒子は相関距離 ξ の区画範囲内での運動になり、通常の Brown 運動による拡散となる。

(II) $\Delta x_2 \sim \xi$ となるような Δt_2 で観測

粒子の変位は障壁に衝突し始める領域であり、Brown 運動とは異なった拡散に見える。

(III) $\Delta x_3 > \xi$ となるような Δt_3 で観測

粒子は障壁と衝突しながらも区画間を移動していく。区画間をホップしていくような Brown 運動的な拡散に見える。

観測時間 Δt_i で粗視化して、そのときに観測される粒子の変位の過程について考えてみる。図 2.2 は、各ケースで観測される粒子変位のイメージを示したものである。また図 2.3 には、各ケースで、拡散係数がどのように見えるかについてのイメージを示している。ケース II の場合、粒子が障壁に衝突して運動が阻害されることにより、ある区画内で停留する状態が生じ始める。このとき観測される粒子の変位は間欠的な変化をするように見える [2]。このような場合に、異常拡散の現象が現れるものと考えられる。本稿では、このような過程を時間フラクタル性として捉えることにする。

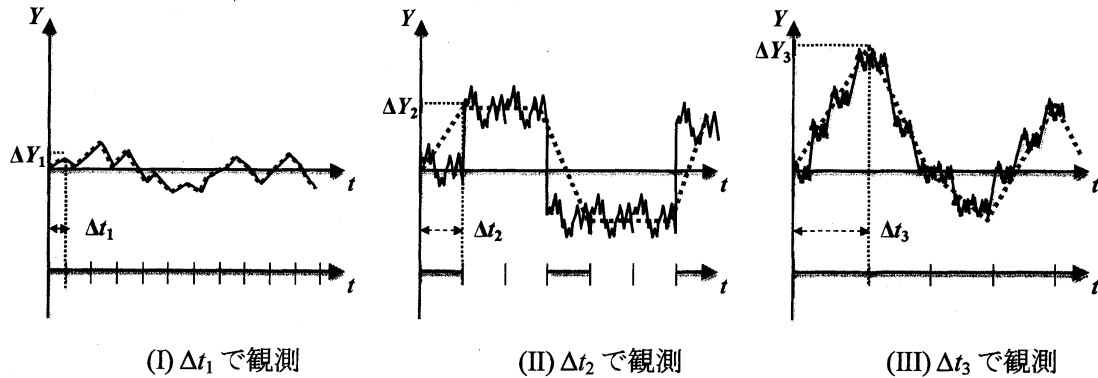


図 2.2. 観測される粒子変位のイメージ

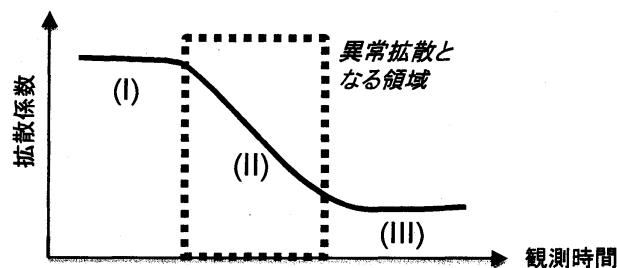


図 2.3. 拡散係数の遷移のイメージ

このようなフラクタル性を伴った時間発展となる現象での時間微分を考える場合、これまでの微分をそのまま用いることはできない。そのため、本稿では、時間微分に関して非整数階微分を導入して、異常拡散の振る舞いをモデル化する方法について考えていく。

3. 非整数階の微分積分

通常、我々が数学や物理で用いる微積分は、整数の次元で実行される演算であるが、非整数階の微積分は、非整数の次元に拡張したものであり、Leibniz の時代から考えられてきた概念(1/2 階微分)である。非整数階微積分 (Fractional Calculus, Fractional Derivatives/Integrals) は、過去からの履歴を積算する演算によって導かれるため、記憶性・履歴性のある現象やフラクタルのようなべき乗特性を示す現象についての物理モデルを記述するのに有効な手法であると考えられる。粘弾性力学や流体力学での 1/2 階微分、経済物理学での非整数 Brown 運動など、多くの分野で応用が試みられている。

3. 1 非整数階微積分の定義

非整数階微分については、いくつかの定義が示されており、理論解析や数値解析などのそれぞれの用途によって使い分けられることがある。以下では、その中の代表的な定義である、

Riemann-Liouville の定義, Caputo の定義, Grünwald-Letnikov の定義について紹介する.

(1) Riemann-Liouville (R-L) の定義

Riemann-Liouville の定義は, 整数階の Cauchy の積分公式を非整数階の積分に拡張したものであり, 主に理論解析に用いられることが多い.

変数 x をもつ関数 $f(x)$ について, n 階の Cauchy 積分公式は, 次のようにあらわされる.

$$\begin{aligned} I^n f(x) &\equiv \int_0^x du_{n-1} \int_0^{u_{n-1}} du_{n-2} \cdots \int_0^{u_1} f(u_0) du_0 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-u)^{n-1} f(u) du = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-u)^{n-1} f(u) du \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である. この式において整数値 n を実数値 α に置き換えることで, 非整数階の積分を定義する.

$${}_0 I_x^\alpha f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-u)^{\alpha-1} f(u) du, \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+) \quad (3.2)$$

また, 非整数階の微分は, 積分の逆演算として次のようにとる.

$${}_0 D_x^\alpha f(x) \equiv {}_0 I_x^{-\alpha} f(x) \quad (3.3)$$

このように定義された非整数階微分においては, 整数階の微分をとった場合に α が負の整数になることから, ガンマ関数が発散してしまうため整合性が保てない. そのため, Riemann-Liouville 定義の微分では, 整数階の微分との整合性を保つために次のような修正された定義を用いることが一般的である.

$$\begin{aligned} {}_0 D_x^\alpha f(x) &\equiv \frac{d^n}{dx^n} {}_0 D_x^{(\alpha-n)} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} {}_0 I_x^{(n-\alpha)} f(x) \\ &\equiv \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-u)^{n-\alpha-1} f(u) du, \quad (n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}_+) \end{aligned} \quad (3.4)$$

このように定義をとれば, $\alpha=0$ ($n=1$) の場合で見ると,

$${}_0D_x^0 f(x) = \frac{d}{dx} {}_0D_x^{(-1)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{d}{dx} \int_0^x f(u) du = f(x)$$

となり，整数階微分との整合性が保たれることがわかる。

(2) Caputo の定義

Caputo 定義は，R-L 定義において微分の順序を入れ替えた形式の定義であり，この定義は解析的に初期条件を導入しやすいことが知られている。

$$\begin{aligned} {}_0^C D_x^\alpha f(x) &= {}_0D_x^{(\alpha-n)} \frac{d^n}{dx^n} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-u)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{du^n} f(u) du, \quad (n-1 \leq \alpha < n, n \in N_+) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Caputo 定義と R-L 定義との関係について， $0 < \alpha < 1 (n=1)$ の場合で考えてみる。R-L 定義について，部分積分を用いて変形していくと，

$$\begin{aligned} {}_0D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-u)^{-\alpha} f(u) du \\ &= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-u)^{-\alpha} \frac{d}{du} f(u) du \\ &= {}_0D_x^\alpha f(0) + {}_0^C D_x^\alpha f(x) \end{aligned}$$

となるので，Caputo 定義と R-L 定義との関係は次のようにあらわすことができる。

$${}_0^C D_x^\alpha [f(x)] = {}_0D_x^\alpha [f(x) - f(0)] \quad (3.6)$$

Caputo 定義は， $f(0)=0$ の場合には R-L 定義と一致するが，このような定義を考える必要性について簡単な例で見えていくことにする。まず，次のような通常微分による微分方程式についての初期値問題を考える。

$$\frac{d}{dx} y(x) = A, \quad y(0) = y_0, \quad (A, y_0 : \text{Const.})$$

これを積分して，積分定数を C とすると，

$$y(x) = Ax + C$$

$x=0$ で $y(0)=y_0$ から, $C=y_0$ となるので,

$$\therefore y(x) = Ax + y_0$$

これを x について微分すると,

$$\frac{d}{dx}y(x) = A$$

となり元に戻り閉じる. 次に, 非整数階微分の場合について同様のことを考えてみる. R-L 定義による α 階 ($0 < \alpha < 1$) の非整数階微分を用いて微分方程式を記述すると,

$${}_0D_x^\alpha [y(x)] = A, \quad y(0) = y_0, \quad (A, y_0 : \text{Const.}, \quad 0 < \alpha < 1)$$

これを非整数階積分して, 積分定数を C とすると,

$$y(x) = \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)} x^\alpha + C$$

$x=0$ で $y(0)=y_0$ から, $C=y_0$ となるので,

$$\therefore y(x) = \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)} x^\alpha + y_0$$

これを非整数階微分する. R-L 定義の非整数階微分では定数値を微分しても 0 にならないため,

$${}_0D_x^\alpha [y(x)] = A + {}_0D_x^\alpha [y_0] = A + \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} y_0$$

となり, もとの微分方程式に戻らない. そこで, 次のように考えてみることにする.

$${}_0D_x^\alpha [y(x) - y_0] = A$$

これを非整数階積分して, 積分定数を C とすると,

$$y(x) - y_0 = \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)} x^\alpha + C$$

$x=0$ で $y(0)=y_0$ から, $C=0$ となるので,

$$\therefore y(x) - y_0 = \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)} x^\alpha$$

これを非整数階微分すると,

$${}_0D_x^\alpha [y(x) - y_0] = A$$

となり, 元に戻る. いま, 非整数階微分について,

$${}_0D_x^\alpha [y(x) - y_0] = {}_0^C D_x^\alpha [y(x)]$$

のように, Caputo 定義を用いることにして, もとの微分方程式を記述すれば,

$${}_0^C D_x^\alpha [y(x)] = A, \quad y(0) = y_0, \quad (A, y_0 : \text{Const.}, \quad 0 < \alpha < 1)$$

である. このように Caputo 定義で非整数階微分を考えることにすれば, 形式的に通常微分の初期値問題の場合と同様の扱いができることになる.

あわせて, 定数値を非整数階微分する場合の違いについて見ておくことにする. ここでは定数値 A について, 通常の微分と非整数階微分として R-L 定義と Caputo 定義のそれぞれで微分を行う. まず, 通常の整数階の微分では,

$$\frac{d}{dx} A = 0$$

であり, 定数の微分は 0 である. 次に非整数階微分として, R-L 定義を用いると,

$${}_0D_x^\alpha A = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-u)^{-\alpha} A du = \frac{A}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \neq 0$$

となり, 定数値 A の微分は 0 にならない. 一方, Caputo 定義に基づいた非整数階微分では,

$${}_0^C D_x^\alpha A = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-u)^{-\alpha} \frac{d}{dx} A du = 0$$

となる. このように, 定数値 A を非整数階微分する場合, R-L 定義では定数の微分は 0 にならな

いが, Caputo 定義では 0 になり, 定義によって結果が異なる.

非整数階の微積分を含んだ方程式を解析する際には, Laplace 変換を用いることが有用な場合が多い. まず非整数階積分の Laplace 変換は, R-L 定義において Laplace 変換の合成積の関係を利用して次のように導出することができる.

$$\begin{aligned} L[{}_0I_x^\alpha f(x)] &= L\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-u)^{\alpha-1} f(u) du\right] = L\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] \cdot L[f(x)] \\ &= s^{-\alpha} \hat{f}(s) \end{aligned} \quad (3.7)$$

非整数階微分の Laplace 変換は, R-L 定義と Caputo 定義のそれぞれについて見ていくことにする. 整数階微分の Laplace 変換は次で与えられる.

$$\begin{aligned} L[D^n f(x)] &= s^n \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k f(0) = s^n \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1} f(0), \\ D^n &= \frac{d^n}{dx^n} \quad (n \in N) \end{aligned} \quad (3.8)$$

この関係を用いて, R-L 定義に基づいた微分に関する Laplace 変換は次のように導出できる.

$$\begin{aligned} L[{}_0D_x^\alpha f(x)] &= L\left[\frac{d^n}{dx^n} {}_0I_x^{(n-\alpha)} f(x)\right] \\ &= s^n \cdot L\left[{}_0I_x^{(n-\alpha)} f(x)\right] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1} \left[{}_0I_x^{(n-\alpha)} f(x)\right]_{x=0} \\ &= s^n \cdot s^{-(n-\alpha)} \cdot \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{-k-1} \left[{}_0D_x^\alpha f(x)\right]_{x=0} \\ &= s^\alpha \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-k-1} f(0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

R-L 定義よる微分の Laplace 変換では, 非整数階の初期条件 (物理条件) が必要になることがわかる. 一方, Caputo 定義に基づいた微分の Laplace 変換は, 定義式について Laplace 変換の合成積の関係を用いて, 次のように導出することができる.

$$\begin{aligned}
L\left[{}^C_0D_x^\alpha f(x)\right] &= L\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-u)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{du^n} f(u) du\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}} \cdot L\left[\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right] \\
&= s^{\alpha-n} \left\{ s^n \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k f(0) \right\} \\
&= s^\alpha \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} D^k f(0)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Caputo 定義の場合では、整数階の初期条件になることがわかる。従って、非整数階微分の Laplace 変換について比較すると、R-L 定義は非整数階の初期条件になるが、Caputo 定義は整数階の条件で扱えることになり、このことは、微分方程式を用いて現象のモデル化を考える際に、Caputo 定義の方が物理条件をあてはめやすいことになる。

以上のことから、実際の物理現象の問題を考える場合においては、Caputo 定義で微分方程式を記述する方が、R-L 定義よりも理解性が良いと考えられる。

(3) Grünwald-Letnikov (G-L) の定義

Grünwald-Letnikov の定義は、差分形式の微分・積分表現を非整数値に一般化したもので、主に数値解析に利用されることが多い。微分を差分形式であらわすと、

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left[(\delta x)^{-n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\delta x) \right] \tag{3.11}$$

であり、また積分については Riemann 和を用いて、次のようにあらわされる。

$$\int_0^x dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_1} f(t_0) dt_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[(\Delta x)^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} f(x - j\Delta x) \right] \tag{3.12}$$

ここで、以下の二項係数において、

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)}$$

整数値 n を実数値 α に置き換えて、非整数値 α の微積分として次のよう定義する。

$${}_0d_x^\alpha f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{N}\right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f(x-j \cdot x/N), \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad (3.13)$$

この G-L 定義は、先に示した R-L 定義と等価であることが証明されている[3].

これまでに紹介した非整数階微分の3つの定義について整理すると、次のようになる。

(i) R-L 定義

$${}_0D_x^\alpha f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-u)^{n-\alpha-1} f(u) du, \quad (n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}_+) \quad (3.14)$$

(ii) Caputo 定義

$${}_0^C D_x^\alpha f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-u)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dx^n} f(u) du, \quad (n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}_+) \quad (3.15)$$

(iii) G-L 定義

$${}_0d_x^\alpha f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{N}\right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f(x-j \cdot x/N), \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad (3.16)$$

非整数階微分の表記方法は、ここで示したような表記を用いられることが多いが、本稿では、通常微分との理解性の観点から、次のような便宜的な表記を用いることにする。

$$\begin{aligned} & \bullet \quad {}_0D_x^\alpha f(x), \quad {}_0^C D_x^\alpha f(x), \quad {}_0d_x^\alpha f(x) \Leftrightarrow \frac{d^\alpha}{(dx)^\alpha} f(x) \\ & \bullet \quad {}_0I_x^\alpha f(x) \Leftrightarrow \int_0^x f(x)(dx)^\alpha \end{aligned} \quad (3.17)$$

本稿では、初期条件を導入しやすい Caputo の定義による非整数階微分を用いることにする。

3. 2 非整数階微分の解釈

フラクタル構造におけるスケール関係から、非整数階微分が意味するところの直観的な解釈について見ていくことにする。(文献6と文献9から一部引用)

(1) 測度と次元の関係

ある代表長さ x に対して、線分 L 、面積 A 、体積 V とそれぞれの次元との間のスケール関係は、

$$x \propto L^{1/1} \propto A^{1/2} \propto V^{1/3}$$

である。一般に、代表長さ x に対して、次元を d とする測度 M (線分 L 、面積 A 、体積 V) との間のスケール関係は、

$$M(=L/A/V) \propto x^d$$

であり、このスケール関係はフラクタルの場合についても同様に成り立つ。従って、フラクタル次元 α をもつ線分の実質的な長さ X と代表長さ x との関係は、

$$X \propto x^\alpha$$

である。

(2) フラクタルのスケーリング

フラクタル構造を持つ系においては、ある単位量(単位となる長さ、面積、体積でセグメントとも呼ばれる)で構造の全体を被覆したとき、その個数がフラクタル次元に関してべき乗的に変化することが特徴である。フラクタル曲線の場合で考えてみる。代表長さとしてフラクタル曲線の差し渡し長さ x 、単位長さ ε としたとき、フラクタル曲線の実質的な長さ X は、

$$X = x^\alpha \varepsilon^{1-\alpha} \tag{3.18}$$

という関係をもつ。これを変形すると、

$$X = x^\alpha \varepsilon^{1-\alpha} = \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^\alpha \varepsilon \tag{3.19}$$

とできる。これは、フラクタル曲線の実質的な長さ X は、単位長さ ε の $(x/\varepsilon)^\alpha$ 個分で被覆できることを意味している。このこと確かめるための具体的な例として、代表的なフラクタル曲線である Koch 曲線の場合を考えてみる。

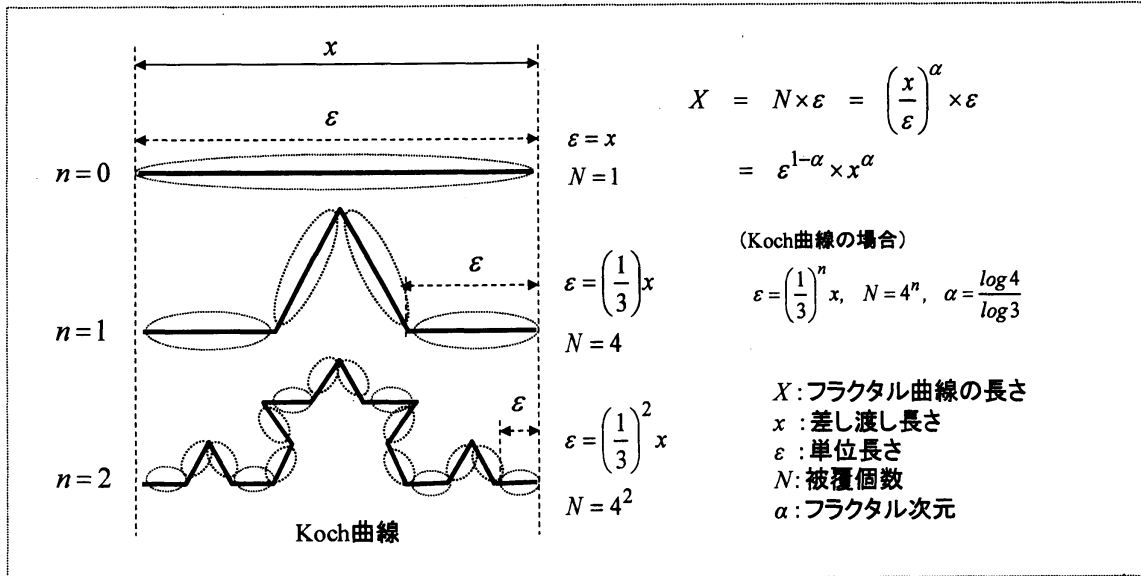


図 3.1. フラクタル曲線とスケール関係 (Koch 曲線の例) [文献 6 から引用]

Koch 曲線の幾何学的な関係から、単位長さ ε と被覆個数 N は、

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^n x, \quad N = 4^n$$

であるので、Koch 曲線の長さ X は、

$$X = N \times \varepsilon = \left(\frac{4}{3}\right)^n x = \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^\alpha \times \varepsilon$$

として計算することができる。このとき、Koch 曲線のフラクタル次元 α は以下である。

$$\alpha = \frac{\log 4}{\log 3}$$

このスケール関係は、Koch 曲線の場合に限らず、フラクタルの場合において一般に成り立つ。フラクタル測度 X 、差し渡し長さ x 、単位長さ ε 、被覆個数 N 、フラクタル次元 α 、ユークリット次元を d としたとき、フラクタル構造でのスケール関係は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} X &= N \times \varepsilon^d = \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^\alpha \times \varepsilon^d \\ &= x^\alpha \times \varepsilon^{d-\alpha} \end{aligned} \tag{3.20}$$

(3) フラクタル構造上での関数の変化率

フラクタル構造を持った系での関数の変化率について考えてみる。 C は変数 x の関数とする。ある局所部分での、変位 Δx に対する関数の変化 ΔC の変化率を考える。連続的な系のもとでは、変化率は $\Delta C/\Delta x$ として見積もることができる。一方、フラクタル構造を持った系においては、見かけの変位 Δx に対して、フラクタル曲線に沿った実質的な変位 ΔX は、前項で示したフラクタルのスケール関係から、 $\Delta X = \varepsilon^{1-\alpha} (\Delta x)^\alpha$ と考えることができる。従って、フラクタル曲線に沿った実質的な関数の変化率は、 ΔC に対する ΔX の比として考えることができるので

$$\frac{\Delta C}{\Delta X} = \frac{\Delta C}{\varepsilon^{1-\alpha} (\Delta x)^\alpha} = \left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} \right)^{1-\alpha} \frac{\Delta C}{\Delta x} \quad (3.21)$$

となり、フラクタル構造上での関数変化率はべき乗の特性を示すものと考えられる。

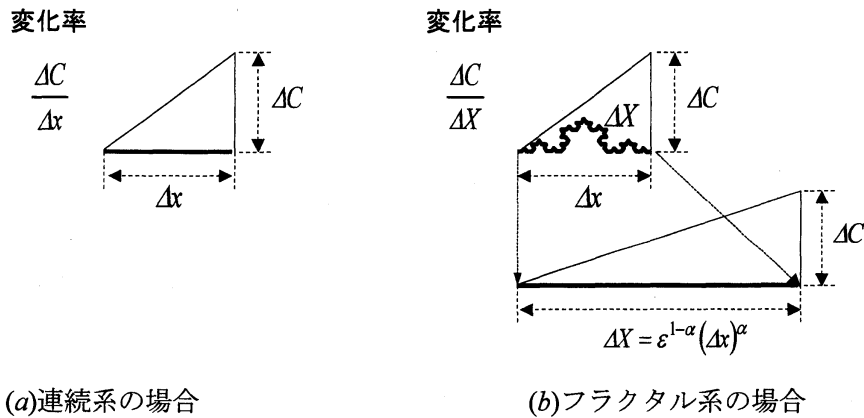


図 3.2. フラクタル系での関数変化率（非整数階微分）のイメージ [文献 6 から引用]

今、関数として $C(x)=Ax$ (A は定数) を考えて、 α 階の非整数階微分を行うと、

$$\frac{d^\alpha}{(dx)^\alpha} C(x) = \frac{A}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha} \approx x^{1-\alpha} \cdot \frac{dC}{dx} \quad \left(\because \frac{dC}{dx} = A \right) \quad (3.22)$$

のようになる。これを、先ほどの変化率と見比べて、

$$\frac{\Delta C}{\Delta X} \approx (\Delta x)^{1-\alpha} \cdot \frac{\Delta C}{\Delta x} \approx x^{1-\alpha} \cdot \frac{dC}{dx} \approx \frac{d^\alpha}{(dx)^\alpha} C(x) \quad (3.23)$$

として、フラクタル構造上での関数 $C(x)$ の変化率を、非整数階微分として扱うことができるのではないかと考えられる。このように、フラクタル構造を伴った系での物理現象の数学的なモデルを考えていく場合、ある物理量の時間や空間における微積分を計算する方法として、非整数階微

積分の演算を用いることが有用であると考えられる。

4. 時間非整数階微分を用いた拡散方程式による異常拡散のモデル

ここでは、時間フラクタル性のある時間発展に非整数階微分を導入した拡散過程のモデルについて考えていく。

一般に Brown 運動に従う粒子の拡散は、時刻 t 、変位 x での濃度分布を $W_1(t,x)$ としたとき、次のような時間について 1 階、空間について 2 階の拡散方程式としてモデル化される。

$$\frac{\partial}{\partial t} W_1(t,x) = D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_1(t,x) \quad (4.1)$$

ここで、 D_1 は拡散係数であり、Brown 運動の場合は一定値である。この拡散方程式について、初期分布 $W_1(0,x) = \delta(x)$ とした場合の基本解は、

$$W_1(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_1 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_1 t}\right) \quad (4.2)$$

である。

以降では、この拡散方程式において、時間微分について非整数階 α の微分を導入した拡散方程式を考え、これが異常拡散の特性を示すことを見ていくことにする。

4. 1 時間非整数階微分の拡散方程式

時間微分に関して非整数階微分を導入することによって生じるスケーリングについて考えておく。一般にフラクタル性が成り立つ領域では、単位長さ ε を使って、次元 α のフラクタル曲線を被覆するとき、見かけの長さ（差し渡しの長さ） x と、フラクタル曲線の実質的な長さ X との間には、 $X = \varepsilon^{1-\alpha} x^\alpha$ の関係が成り立つ。時間に関する非整数階微分は、フラクタル特性によってスケーリングされた時間変化に対する物理量の変化として考えることができる。時間変化に関するスケーリングは、さきほどのスケール関係を、非整数階 α の時間微分とした場合であてはめて考えてみると、べき指数が微分階数 α 、代表長さが dt に相当する。スケーリングパラメタ（時間に関する単位長さ）として、時間フラクタル性が成り立つ（異常拡散が生じている）観測時間 τ とする。これは Brown 運動が成り立つ限界の観測時間と考えても良い。非整数階の時間微分による実質的な時間の変化量を dT とすると、スケーリングの関係から $dT = \tau^{1-\alpha} (dt)^\alpha$ として評価することになる [5,6].

時刻 t 、変位 x での濃度分布 $W_\alpha(t,x)$ に対して、時間の非整数階微分を、フラクタル性をもった時

間変化 dT との比 $dW_\alpha(t,x)/dT$ として考えると、分布に関する時間の非整数階微分は、次のように考えることができる。

$$\frac{\partial}{\partial T} W_\alpha(t,x) = \frac{\partial^\alpha}{\tau^{1-\alpha} (\partial t)^\alpha} W_\alpha(t,x)$$

これを用いて整理すると、以下のような時間についての非整数階微分による拡散方程式が得られる。ここでの非整数階微分は Caputo 定義とする。

$$\frac{\partial^\alpha}{(\partial t)^\alpha} W_\alpha(t,x) = D_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_\alpha(t,x), \quad (D_\alpha \equiv D_1 \tau^{1-\alpha}) \quad (4.3)$$

あるいは、次のような表現形式も多用されている。

$$\frac{\partial}{\partial t} W_\alpha(t,x) = D_\alpha \frac{\partial^{1-\alpha}}{(\partial t)^{1-\alpha}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_\alpha(t,x) \quad (4.4)$$

ここで、 $\alpha=1$ の場合は、通常の拡散 (Brown 運動) となる。

以降では、無限長で初期分布は $W_\alpha(0,x)=\delta(x)$ の場合について考え、時間非整数階微分の拡散方程式が示す分布の基本解と拡散係数について調べていく。

(1) 基本解

時間非整数階微分の拡散方程式(4.3)について、時間に対して Laplace 変換 (演算子 L , 変数 s)、空間に対して Fourier 変換 (演算子 F , 変数 k) を行う。Caputo 定義による非整数 α 階微分した関数 $W_\alpha(t,x)$ の Laplace 変換は、

$$L \left[\frac{d^\alpha}{(dt)^\alpha} W_\alpha(t,x) \right] = s^\alpha W_\alpha(s,x) - s^{\alpha-1} W_\alpha(0,x) \quad (4.5)$$

となることを用いる。Fourier 変換について、初期分布が $W_\alpha(0,x)=\delta(x)$ であることを考慮して整理すると、

$$W_\alpha(s,k) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + D_\alpha k^2} \quad (4.6)$$

が得られる。 $W_\alpha(s,k)$ について逆 Fourier 変換すると、

$$W_\alpha(s, x) = \frac{s^{\alpha-1}}{D_\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{4s^\alpha/D_\alpha}} e^{-\sqrt{s^\alpha/D_\alpha}|x|} = \frac{1}{\sqrt{4D_\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{|x|}{\sqrt{D_\alpha}} \right)^n s^{\alpha(n+1)/2-1} \quad (4.7)$$

さらに逆 Laplace 変換することにより, 基本解 $W_\alpha(t, x)$ として次式が得られる.

$$W_\alpha(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4D_\alpha t^\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1-\alpha(n+1)/2)} \left(\frac{x^2}{D_\alpha t^\alpha} \right)^{n/2} \quad (4.8)$$

(2) 拡散係数

$W_\alpha(s, k)$ について,

$$W_\alpha(s, k) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(s, x) e^{ixk} dx$$

とあらわして, この部分積分を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial k^n} W_\alpha(s, k) &= i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n W_\alpha(s, x) e^{ixk} dx \\ \left. \frac{\partial^n}{\partial k^n} W_\alpha(s, k) \right|_{k=0} &= i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n W_\alpha(s, x) dx \end{aligned}$$

として計算できる. このことを用いると $n=2$ とした場合, 以下の関係が得られる.

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial k^2} W_\alpha(s, k) \right|_{k=0} = i^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_\alpha(s, x) dx \quad (4.9)$$

この逆 Laplace 変換から, 次のように平均二乗変位 $\langle x^2 \rangle$ を求めることができる[7].

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_\alpha(t, x) dx = L^{-1} \left[- \left. \frac{\partial^2}{\partial k^2} W_\alpha(s, k) \right|_{k=0} \right] \\ &= L^{-1} \left[\frac{2D_\alpha}{s^{\alpha+1}} \right] = \frac{2D_\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \end{aligned} \quad (4.10)$$

拡散係数はこの平均二乗変位の時間微分によって求めることができるので, 求める拡散係数 D は

次式で計算することができる。

$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{D_\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} = \frac{D_1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (4.11)$$

ここで得られた拡散係数は、時間 t について指数 $\alpha-1$ のべき乗関数となっており、 $0 < \alpha < 1$ であるから、時間の経過に対して拡散係数は減少することになる。これは時間非整数階微分による拡散方程式(4.3)が異常拡散になることを示している。 $\alpha=1$ の場合、 $D=D_1$ となり Brown 運動になる。

4. 2 分布特性

時間非整数階微分の拡散方程式によるモデルが示す分布特性について、通常の拡散方程式モデルが示す分布との違いから比較してみる。以降では、式(4.1)の通常微分の拡散方程式によるモデルを通常微分モデルと呼び、その分布関数は式(4.2)とし、また式(4.3)の非整数階微分の拡散方程式によるモデルを非整数階微分モデルと呼び、その分布関数は式(4.8)によるものとする。

図 4.1 には、通常微分モデルにおける分布関数についての時間推移 ($t=0.1, 0.5, 1.0$) のプロファイルを示している。通常微分モデルで得られる分布の形状は、良く知られているように Gaussian の分布を示している。

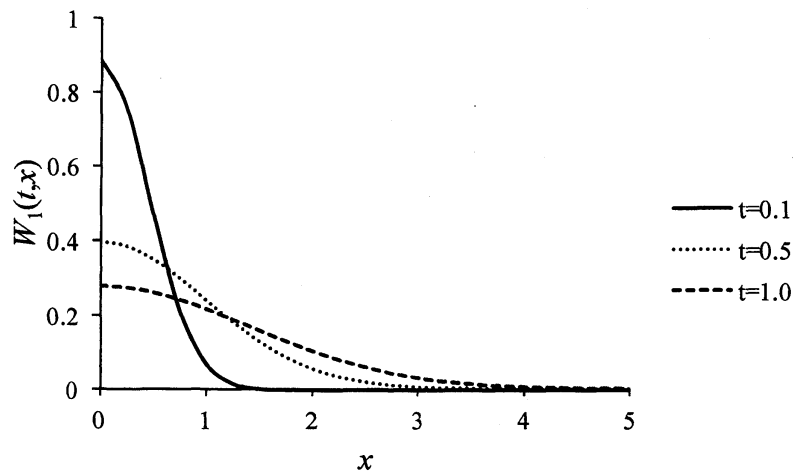


図 4.1. 通常微分モデルの分布関数

図 4.2 は、非整数階微分モデルにおける分布関数の時間推移を示したものである。分布関数の計算条件として $\alpha=0.5$, $D_\alpha=1$ とし、また式(4.8)における級数の総和は 100 項までとした。非整数階微分モデルの分布は、裾野が広がった分布となっており、記憶性のある拡散過程の様相を示していることがわかる。

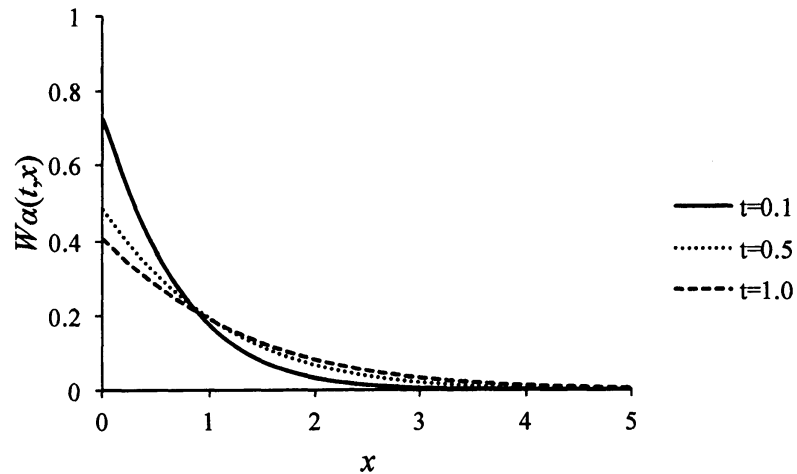


図 4.2. 非整数階微分モデルの分布関数 ($\alpha=0.5$, $D_\alpha=1$)

図 4.3 は、非整数階微分モデルにおいて、微分階数 α による分布特性の違いについて比較したものである。非整数階微分モデルは、 $\alpha=1$ の場合には Gaussian 分布を示しているが、微分階数 α が小さくなるにつれロングテイルとなる分布の特性が顕著になっていくことがわかる。

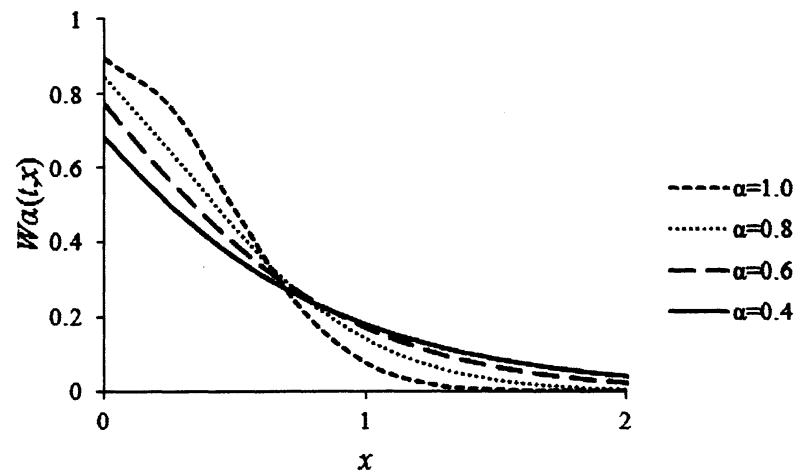


図 4.3. 非整数階微分モデルにおける微分階数 α による分布特性の比較 ($t=0.1$, $D_\alpha=1$)

5. CTRW 法による異常拡散のモデル

異常拡散をモデル化する方法として CTRW (Continuous Time Random Walk) 法がある[7]。CTRW 法は、粒子が移動する確率密度関数を待ち時間の分布と飛躍距離の分布の積の形で考えて、粒子の拡散運動をモデリングする方法である。Brown 運動では、待ち時間は Poisson 分布、飛躍距離は

Gauss 分布である。以下、時刻 t で位置 x に粒子が存在する分布を $W_\nu(t, x)$ として、CTRW 法に基づいた異常拡散モデルについて簡単に紹介していく [7]。

(1) 粒子移動に関する確率密度関数

粒子が移動する確率過程を、待ち時間と飛躍距離の確率分布に分けて考える。粒子がある位置から移動する際の待ち時間の確率密度を $\omega(t)$ 、粒子が移動する飛躍距離の確率密度を $\lambda(x)$ とする。これらは独立であるものとする、粒子が移動する確率密度関数は、両者の積の形で表現される。

$$\psi(t, x) = \omega(t) \cdot \lambda(x) \quad (5.1)$$

CTRW 法では、粒子の待ち時間の確率密度関数について $\omega(t) \sim (t/\tau)^{-(1+\nu)}$ のようなべき乗関数に従うものとして考えるが、ここでは次の関数とする。

$$\omega(t) = \frac{t^{\nu-1}}{\tau^\nu} E_{\nu, \nu} \left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\nu \right], \quad (0 < \nu < 1) \quad (5.2)$$

ここで τ は Brown 運動となる場合の平均待ち時間である。関数 $E[-]$ は 2 パラメタの一般化 Mittag-Leffler 関数であり次のように定義される。

$$E_{\eta, \mu}[t] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\eta n + \mu)}, \quad (\eta > 0, \mu > 0) \quad (5.3)$$

また飛躍距離の確率密度関数 $\lambda(x)$ は分散 σ^2 の Gauss 分布とする。

$$\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \quad (5.4)$$

従って粒子移動の確率密度関数は、式(5.2)と式(5.4)の積で表されることになる。 $\nu=1$ の場合には、 $\omega(t)$ は Poisson 分布になるので、粒子は Brown 運動に従うことになり、その場合の拡散係数は $D_1 = \sigma^2/\tau$ である。

(2) 特性関数

粒子が時刻 t で位置 x に存在する確率を示すマスター方程式は、先に示した確率密度関数を用いて次のように書ける。

$$W_\nu(t, x) = \int_0^t \omega(t-u) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x-\xi) W_\nu(u, \xi) d\xi \right\} du + \delta(x) \left\{ 1 - \int_0^t \omega(u) du \right\} \quad (5.5)$$

このマスター方程式について、時間に対して Laplace 変換 (演算子 L , 変数 s), 空間に対して Fourier 変換 (演算子 F , 変数 k) を行う. 粒子移動の確率密度関数についての Laplace 変換および Fourier 変換は $\Psi(s, k) = \omega(s)\lambda(k)$ であり, また $\omega(s) \sim 1-(\tau s)^\nu$ および $\lambda(k) \sim 1-(\sigma k)^2$ として整理すると, 特性関数は次のようになる.

$$W_\nu(s, k) = \frac{1-\omega(s)}{s} \cdot \frac{1}{1-\omega(s)\cdot\lambda(k)} = \frac{s^{\nu-1}}{s^\nu + D_\nu k^2} \quad (5.6)$$

ここで $D_\nu = \sigma^2/\tau^\nu = D_1\tau^{1-\nu}$ とした.

(3) 拡散方程式

特性関数について, 初期条件を付加して, 時間についての逆 Laplace 変換, 空間についての逆 Fourier 変換を行うことで拡散方程式が得られる. CTRW 法で得られた特性関数の式(5.6)は, 先に示した式(4.6)と同じであることがわかる. このことは, CTRW 法によってモデル化される拡散は, 時間に関して非整数階指微分を用いた拡散方程式(4.3)に帰着することを示している.

$$\frac{\partial^\nu}{(\partial t)^\nu} W_\nu(t, x) = D_\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_\nu(t, x), \quad (D_\nu \equiv D_1\tau^{1-\nu}) \quad (5.7)$$

初期分布を $W_\nu(0, x) = \delta(x)$ とした基本解は, 時間非整数階微分の拡散方程式のところで示した方法と同様に計算することができる.

$$W_\nu(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4D_\nu t^\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1-\nu(n+1)/2)} \left(\frac{x^2}{D_\nu t^\nu} \right)^{n/2} \quad (5.8)$$

(4) 拡散係数

拡散係数についても同様であり, CTRW 法に基づく拡散モデルの拡散係数は次である.

$$D = \frac{D_\nu}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} = \frac{D_1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\nu-1}, \quad (0 < \nu < 1) \quad (5.9)$$

以上のことから, CTRW 法に基づいた拡散モデルにおいて, 粒子移動の待ち時間分布が時間に

ついて指数 $-(1+\nu)$ のべき乗分布になるような拡散過程は、時間非整数階数微分による拡散方程式として記述することができ、これは異常拡散の振る舞いを示すことになる。表 5.1 に CTRW 法による異常拡散モデルについて、通常拡散との比較とあわせてまとめておく。

表 5.1. CTRW 法での通常拡散と異常拡散

		通常拡散 (Brown 運動)	異常拡散
確率密度関数	待ち時間	Poisson 分布 $\omega(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (T = \tau)$ $\omega(s) \approx 1 - s\tau$	べき乗分布 $\omega(t) = \frac{t^{\nu-1}}{\tau^\nu} E_{\nu, \nu} \left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\nu \right]$ $0 < \nu < 1 \quad (T \rightarrow \infty)$ $\omega(s) \approx 1 - (s\tau)^\nu$
	飛躍距離	Gaussian 分布 $\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \quad (\Sigma^2 = 2\sigma^2)$	$\lambda(k) \approx 1 - k^2\sigma^2$
特性関数		$W_1(s, k) = \frac{1}{s + D_1 k^2} \quad \left(D_1 \equiv \frac{\sigma^2}{\tau} \right)$	$W_\nu(s, k) = \frac{s^{\nu-1}}{s^\nu + D_\nu k^2} \quad \left(D_\nu \equiv \frac{\sigma^2}{\tau^\nu} \right)$
拡散方程式		$\frac{\partial}{\partial t} W_1(t, x) = D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_1(t, x)$	$\frac{\partial^\nu}{(\partial t)^\nu} W_\nu(t, x) = D_\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_\nu(t, x)$
基本解		$W_1(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_1 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_1 t}\right)$	$W_\nu(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4D_\nu t^\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ $\times \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{\nu(n+1)}{2}\right)} \left(\frac{x^2}{D_\nu t^\nu}\right)^{n/2}$
拡散係数		$D = D_1 = \text{const.}$	$D = \frac{D_1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu-1}$

CTRW 法において、粒子が移動する際の待ち時間を、粒子が拡散する媒体の表面に吸着する時間分布のように置き換えて考えれば、吸着・離脱を伴うような粒子拡散のモデルとしても応用することが可能になる。

6. 時間関数の拡散係数を用いた異常拡散のモデル

異常拡散においては、拡散係数が時間に対してべき乗に変化する。そこで、拡散係数を次のような時間のべき乗関数として考えて、

$$D = \alpha D_\alpha t^{\alpha-1}, \quad (D_\alpha \equiv D_1 t^{1-\alpha}) \quad (6.1)$$

異常拡散のモデルとして、このような時間関数で拡散係数が与えられている拡散方程式を考えることもできる。

$$\frac{\partial}{\partial t} W_t(t, x) = \alpha D_\alpha t^{\alpha-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_t(t, x) \quad (6.2)$$

この場合の基本解は、

$$W_t(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_\alpha t^\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_\alpha t^\alpha}\right) \quad (6.3)$$

となる[8].

この時間関数の拡散係数を持つ拡散方程式によるモデルがどのような分布特性を示すかについて、非整数階微分によるモデルと比較して見ていくことにする。以降では、式(4.3)の非整数階微分の拡散方程式によるモデルを非整数階微分モデルと呼び、その分布関数は式(4.8)とし、また式(6.2)の時間関数の拡散係数を持つ拡散方程式によるモデルを時間関数の拡散係数モデルと呼び、その分布関数は式(6.3)によるものとする。

図 6.1 には非整数階微分モデルの分布について、図 6.2 には時間関数の拡散係数モデルの分布について、時間推移 ($t=0.1, 0.5, 1.0$) のプロファイルを示している。両モデルにおいて、 $\alpha=0.5$, $D_\alpha=1$ とした。非整数階微分モデルの分布は、先に述べたように裾野が広がったロングテイルの分布特性を示しているのに対して、時間関数の拡散係数モデルの分布は、指数 α でスケールされているが、得られる分布の形状は Gaussian である。この2つのモデルは、双方ともに拡散係数が時間について指数 $1-\alpha$ のべき乗関数になっているが、拡散分布の特性としては本質的に異なるものとなっていることがわかる。

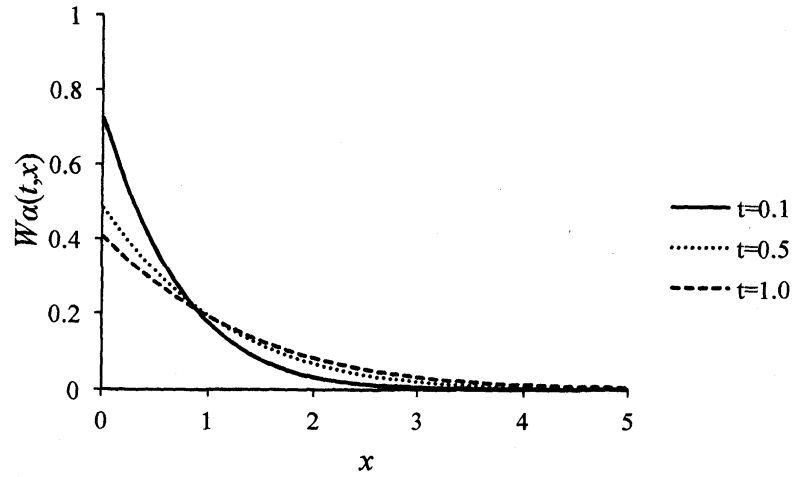


図 6.1. 非整数階微分モデルの分布関数 ($\alpha=0.5$, $D_\alpha=1$)

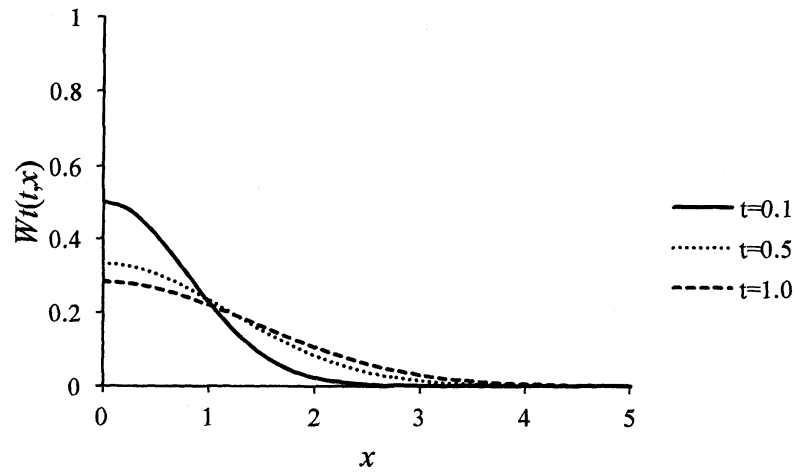


図 6.2. 時間関数の拡散係数モデルの分布関数 ($\alpha=0.5$, $D_\alpha=1$)

2つのモデルの指数 α の違いによる分布特性についても比較しておく。図 6.3 は非整数階微分モデルについて、図 6.4 は時間関数の拡散係数モデルについて、 $t=0.1$, $D_\alpha=1$ の条件で計算したものである。非整数階微分モデルは、 $\alpha=1$ の場合には Gaussian 分布を示しているが、指数 α が小さくなるにつれロングテイルとなる分布の特性が顕著になっている。一方、時間関数の拡散係数モデルは、指数 α が違うことにより分布の形状はスケーリングされるが、いずれの場合にも Gaussian 分布となっている。

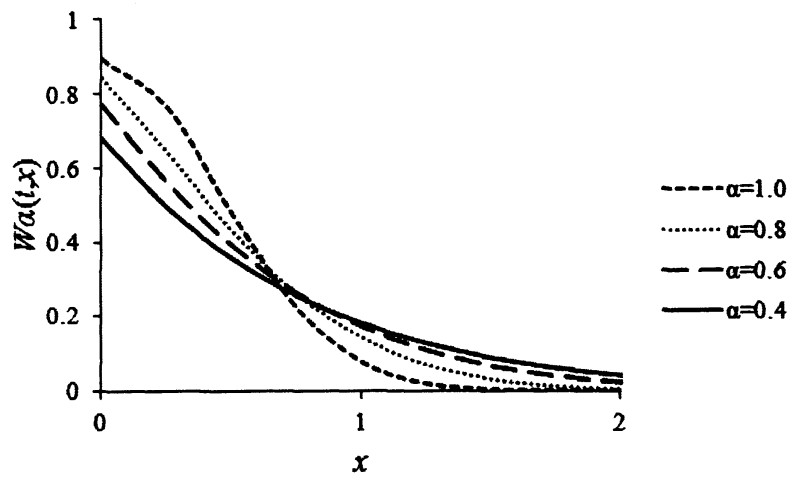


図 6.3. 非整数階微分モデルでの指数による比較 ($t=0.1, D_\alpha=1$)

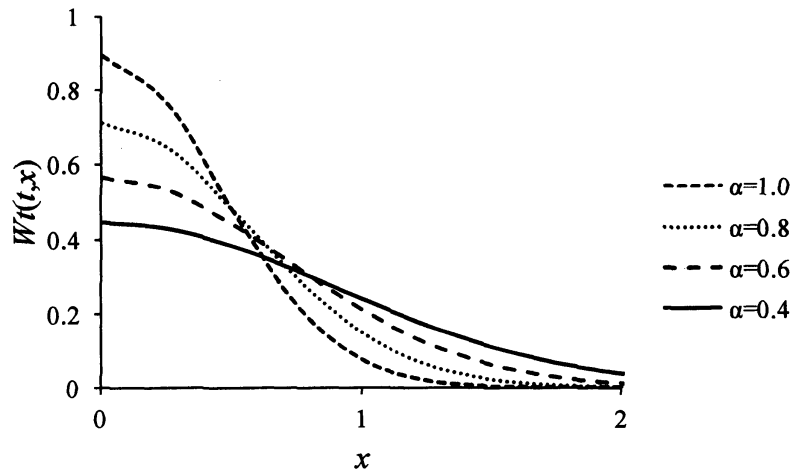


図 6.4. 時間関数の拡散係数モデルでの指数による比較 ($t=0.1, D_\alpha=1$)

表 6.1 に、非整数階微分モデルと時間関数の拡散係数モデルについての比較をまとめておく。

表 6.1. 異常拡散の2つのモデルの比較

	非整数階微分モデル	時間関数の拡散係数モデル
拡散係数	時間のべき乗 $D(t) = \frac{D_\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, \quad (D_\alpha = D_1 t^{1-\alpha})$	時間のべき乗 $D(t) = \alpha D_\alpha t^{\alpha-1}, \quad (D_\alpha = D_1 t^{1-\alpha})$
拡散方程式	時間非整数階微分 $\frac{\partial^\alpha}{(\partial t)^\alpha} W_\alpha(t, x) = D_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_\alpha(t, x)$	通常微分 $\frac{\partial}{\partial t} W_t(t, x) = \alpha D_\alpha t^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial x^2} W_t(t, x)$
拡散分布	Non-Gaussian 分布 $W_\alpha(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4D_\alpha t^\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha(n+1)}{2}\right)} \left(\frac{x^2}{D_\alpha t^\alpha}\right)^{n/2}$	Gaussian 分布 $W_t(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_\alpha t^\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_\alpha t^\alpha}\right)$

7. おわりに

異常拡散の振る舞いは、媒体が持つ複雑な構造が拡散する粒子の運動を阻害してもたらず効果だと考えられ、そのときの粒子は間欠的な運動を示す。このような粒子の運動を時間フラクタル性としてとらえ、時間に関する微分に非整数階微分を導入した拡散方程式により異常拡散をモデル化する方法について紹介した。また異常拡散をモデル化する手法の一つである CTRW 法について紹介し、粒子の移動が時間のべき乗関数となるような待ち時間の確率分布を持つ場合には、時間非整数階微分の拡散方程式に帰着することなどについて見てきた。非整数階微分は、過去の経過が現時点での振舞いに影響を与えるような、記憶性・履歴性のある物理現象を記述するのに有効な手法であると考えられる。そのため、これまで用いられてきた物理現象の方程式において、通常の微積分を非整数階の演算に置き換えることでフラクタル特性を示す物理モデルに拡張することが期待される。

本稿では、時間発展におけるフラクタル性についてのみ議論したが、拡散する媒体が幾何学的なフラクタル構造を持つような場合には、空間的な非整数階微分を導入することも考える必要がでてくる。これについては、「非整数階微分による異常拡散のモデル化 (その2)」の方で紹介す

ることにしたい。

参考文献

- [1] Akiko Masuda et al. , “Direct observation of spatiotemporal dependence of anomalous diffusion in inhomogeneous fluid by sampling-volume-controlled fluorescence correlation spectroscopy,” *Physical Review E*, vol.72, pp.060101-1-4, 2005.
- [2] I.Y.Wong et al. , “Anomalous Diffusion Probes Microstructure Dynamics of Entangled F-Actin Networks,” *PHYSICAL REVIEW LETTERS VOLUME 92, NUMBER 17*, pp.178101-1-4, 2004.
- [3] Igor Podlubny, *Fractional differential equations*, Academic Press, 1999.
- [4] 杉本信正, “非整数階微分・積分とその応用,” *ながれ* 4, pp.110-120, 1985.
- [5] 島本憲夫, “非整数階微分ランジュバン方程式における拡散特性の解析,” *信学論 Vol.94-A*, No.12, pp.932-940, 2011.
- [6] 島本憲夫, “不均質媒質における拡散現象の非整数階微分方程式によるモデル化, シミュレーション,” *数学セミナー*, vol.12, pp.60-64, 2011.
- [7] Ralf METZLER, Joseph KLAFTER, “THE RANDOM WALKS GUIDE TO ANOMALOUS DIFFUSION: A FRACTIONAL DYNAMICS APPROACH,” *Physics Reports* 339, pp.1-77, 2000.
- [8] Eric Lutz, “Fractional Langevin equation,” *Physical Review E*, Vol.64, pp.051106-1-4, 2001.
- [9] 島本憲夫, 非整数階微分によるフラクタル構造体の輸送特性のモデリング, 博士論文(東京大学), 2011.