数理解析研究所講究録
第 1810 巻 2012 年 139-152

非線形拡散, 領域の幾何, および Liouville 型定理

東北大学・大学院情報科学研究科　坂口 茂 (Shigeru Sakaguchi)

Graduate School of Information Sciences,
Tohoku University

この講究録の目的は線形および非線形拡散方程式の初期境界値問題の解の不変な等位面の存在と領域の幾何との関係に関する著者と R. Magnanini 氏 (Firenze 大学) との共同研究および著者の研究の結果やそれに付随する未解決問題を紹介することにある。

1 序

Ω を $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ の有界領域とし, 初期値 $\varphi \in L^2(\Omega)$ $(\varphi \not\equiv 0)$ に対して, $u = u(x,t)$ を次の熱方程式の初期斉次 Dirichlet 問題の一意解とする。

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{1.2}$$

$$u = \varphi \quad \text{on} \quad \Omega \times \{0\}. \tag{1.3}$$

Klamkin の等温面に関する予想 [K] は, 特に $\varphi \equiv 1$ のとき, 解 u について『もし各時刻での等温面たちが, 全体として時刻について不変（もちろん, 各等温面上の温度は時刻に依存するが）ならば Ω は球に限る』というものであり, 逆問題としての観点から Zalcman [Z] によってとりあげられた。この予想は Alessandrini [Al 1, Al 2] によって肯定的に解決された。論文 [Al 2] の定理を引用する。

定理 1.1 ([Al 2, Theorem 1.3]) 境界 $\partial\Omega$ の全ての点が Δ について正則であるとする。もし, ある時刻 $\tau > 0$ が存在して, 任意の $t > \tau$ に対して, Ω において $u(\cdot,t)$ が $u(\cdot,\tau)$ の各等温面上一定ならば, 次のどちらか一方が成り立つ。

(i) φ は固有関数である。つまり, ある定数 $\lambda > 0$ に対して

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi \;\; \textit{in}\ \Omega, \;\; \varphi = 0 \;\; \textit{on}\ \partial\Omega, \;\; \textit{and} \;\; u(x,t) = e^{-\lambda t}\varphi(x) \;\textit{for}\ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty).$$

(ii) Ω は球であって, u は x について Ω の中心に関し回転対称である。

場合 (i) を否定して (ii) を示すのに Alessandrini は Serrin の有名な定理 [Ser, Theorem 2, pp. 311–312] を用いた。初期斉次 Neumann 問題

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, \infty), \tag{1.5}$$

$$u = \varphi \quad \text{on} \quad \Omega \times \{0\} \tag{1.6}$$

の場合, 類似な問題が考えられるが, それは定理 [Sak1, Theorem 1, pp. 220–221] において Serrin の定理の代わりにユークリッド空間における isoparametric hypersurfaces の分類定理 ([LC], [Seg]) を利用することによって解決され, またその証明法により Klamkin の等温面に関する予想の別証明を与えることができる。

そこで, 一つ（または有限個）の等温面の不変性のみを仮定したときに同様な結論が導けるかという問題が生ずる。この問題に対して, $\varphi \equiv 1$ の初期斉次 Dirichlet 問題の場合, [MS1, MS2, MS3] の対応する結果を領域 Ω の滑らかさの仮定について一般化した次の定理が成り立つ。

定理 1.2 ([MS6, Theorem 1.2]) $\varphi \equiv 1$ とする。Ω は有界とは限らないが, その境界 $\partial\Omega$ は有界であるとし, $\partial\Omega = \partial\left(\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}\right)$ とする。D を $\mathbb{R}^m$ の領域で $\overline{D} \subset \Omega$ を満たすものとする。Γ を境界 ∂D の連結成分で $\mathrm{dist}\,(\Gamma, \partial\Omega) = \mathrm{dist}\,(\partial D, \partial\Omega)$ を満たすものとし, D は Γ において内部円錐条件を満たすとする。u を (1.1)-(1.3) の有界な一意解とし, Γ が常に u の等温面であるとする。つまり,

$$u(x,t) = a(t) \quad \textit{for every } (x,t) \in \Gamma \times (0,\infty) \tag{1.7}$$

を満たす関数 $a : (0,\infty) \to (0,\infty)$ が存在すると仮定する。このとき, $\partial\Omega$ は一つの球面か 2 つの同心球面のどちらかに限る。つまり, Ω は球か球の外部領域か円環領域のどれかに限る。

$\varphi \not\equiv 1$ のときはどうであろうか。定理 1.1 の結論ではない次の例がある。$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ とし, $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ を Dirichlet 境界条件下の $-\Delta$ の固有関数列および固有値の非減少列とする。このとき, ある $0 < \rho < 1$ とある $n \geq 2$ がとれて $\Gamma = \partial B_\rho(0) (= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = \rho\})$ とおくと

$$\Gamma \subset \{x \in \Omega : \psi_n(x) = 0\} \ \text{かつ}\ \psi_n \ \text{は回転対称ではない}$$

とできる。このとき, $u = u(x,t)$ を

$$u(x,t) = e^{-\lambda_1 t}\psi_1(x) + e^{-\lambda_n t}\psi_n(x), \ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$$

で定めると, u は場合 (i) でも (ii) でもないが不変な等温面の条件 (1.7) を満たしている。

2 Neumann 問題

Neumann 問題の場合, 一つ（または有限個）の等温面の不変性のみを仮定したときに同様な結論が導けるかという問題について何ができるだろうか。最近得られた一つの定理を紹介しよう。$E \subset \mathbb{R}^{m-1}$ を滑らかな有界領域とし, $L > 0$ について, 柱状領域 $\Omega = E \times (0, L) \subset \mathbb{R}^m$ を考える。連続関数 $f : \overline{E} \to (0, L)$ に対して

$$A = \{(x', x_m) \in \mathbb{R}^m : x' \in E,\ x_m < f(x')\}$$

とおく。初期斉次 Neumann 問題

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, \infty), \tag{2.2}$$

$$u = \chi_A \quad \text{on} \quad \Omega \times \{0\} \tag{2.3}$$

を考えよう。ここで, χ_A は集合 A の特性関数である。最大値の原理により

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} < 0 \ \text{ in } \ (\Omega \cup (\partial E \times (0, L))) \times (0, \infty) \tag{2.4}$$

が成り立つ。次の定理が得られた。

定理 2.1 ([MS7]) u を (2.1)-(2.3) の一意解とする。ある連続関数 $g : \overline{E} \to (0, L)$ が存在して, $\Gamma = \{(x', g(x')) \in \mathbb{R}^m : x' \in E\}$ とおくとき, Γ が常に u の等温面であるとする。つまり, (1.7) を満たす関数 $a : (0, \infty) \to (0, \infty)$ が存在すると仮定する。さらに,

$$\{x \in \Gamma : \text{dist}\ (x, \Omega \cap \partial A) < \text{dist}\ (x, \partial\Omega)\} \neq \emptyset \tag{2.5}$$

を仮定する。このとき, 関数 f, g は共に定数関数である。

証明の概略を述べよう。まず, 陰関数定理および u の x に関する実解析性より, Γ は実解析的であることに気づく。

$$W = \{x \in \Gamma : \ \text{dist}\ (x, \Omega \cap \partial A) < \ \text{dist}\ (x, \partial\Omega)\}$$

とおく。Balance law ([MS1, Theorem 2.1] 参照) より,

$$\int_{B_r(p)} u(x,t)\,dx = \int_{B_r(q)} u(x,t)\,dx \quad \text{if } p,q \in W, r>0, B_r(p) \subset \Omega \text{ and } B_r(q) \subset \Omega.$$

ここで, $B_r(p)$ は点 p を中心とした半径 $r>0$ の球を表す。$t \to 0$ の極限をとると

$$|B_r(p) \cap A| = |B_r(q) \cap A| \quad \text{if } p,q \in W, r>0, B_r(p) \subset \Omega \text{ and } B_r(q) \subset \Omega.$$

ここで, $|B_r(p) \cap A|$ は集合 $B_r(p) \cap A$ の m 次元 Lebesgue 測度を表す。W の定義を考慮して, ある定数 $R \geq 0$ が存在して

$$\text{dist }(x, \Omega \cap \partial A) = R \ \text{ for all } x \in W$$

が成立する。そこで, [MPS] の結果より $r \to R$ の漸近挙動を見ると, $R=0$ のとき, Γ の平均曲率を H_Γ とすると W 上 H_Γ は定数であり, $R>0$ のとき, Γ の主曲率を $\kappa_1, \ldots, \kappa_{m-1}$ とすると W 上 $\prod_{j=1}^{m-1}(1+R\kappa_j)$ は定数かつ $1+R\kappa_j>0$ $(1 \leq j \leq m-1)$ であることがわかる。従って Γ の実解析性から, この事実は Γ 全体上で成立し, (2.4) と Neumann 境界条件と最大値原理を用いれば g は定数関数でなければならないことが導かれる。あと少しの議論で f も定数関数でなければならないことがわかる。

3　非線形拡散

Ω を $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ の領域とする。関数 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が正定数 δ_1, δ_2 について

$$\phi \in C^2(\mathbb{R}), \quad \phi(0)=0, \quad \text{and} \quad 0<\delta_1 \leq \phi'(s) \leq \delta_2 \ \text{ for } s \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

を満たすとする。 次の初期境界値問題を考える。

$$\partial_t u = \Delta\phi(u) \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \tag{3.2}$$

$$u = 1 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{3.3}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Omega \times \{0\}. \tag{3.4}$$

さらに,

$$\Phi(s) = \int_1^s \frac{\phi'(\xi)}{\xi} d\xi \ \text{ for } s>0$$

とおく。$\phi(s) \equiv s$ のとき, $\Phi(s) = \log s$ である。距離関数 $d = d(x)$ を

$$d(x) = \text{ dist } (x, \partial\Omega) \text{ for } x \in \Omega$$

で定める。このとき, Varadhan [Va] が線形の方程式について示したのと同様な次の定理が得られている。

定理 3.1 ([MS3, MS5]) u を (3.2)-(3.4) の有界な一意解とする。Ω は $\partial\Omega = \partial\left(\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}\right)$ を満たすとする。このとき,

$$-4t\Phi(u(x,t)) \to d(x)^2 \quad \textit{as } t \to 0 \quad \textit{uniformly on every compact set in } \Omega.$$

この定理を利用すると次の定理が得られる。

定理 3.2 ([MS6]) u を (3.2)-(3.4) の有界な一意解とする。$\partial\Omega$ は有界で, Ω は $\partial\Omega = \partial\left(\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}\right)$ を満たすとする。D を $\mathbb{R}^m$ の C^1 級領域で ∂D が有界かつ $\overline{D} \subset \Omega$ を満たすものとする。∂D が常に u の等位面であるとする。つまり,

$$u(x,t) = a(t) \quad \textit{for every } (x,t) \in \partial D \times (0,\infty) \tag{3.5}$$

を満たす関数 $a : (0,\infty) \to (0,\infty)$ が存在すると仮定する。このとき, $\partial\Omega$ は一つの球面に限る。

この定理の証明の概略を述べよう。まず, 定理 3.1 と仮定 (3.5) を合わせて次の補題を得る。

補題 3.3 ([MS6, Lemma 2.1]) ある定数 $R > 0$ が存在して,

$$d(x) = R \quad \textit{for all } x \in \partial D \quad \textit{and} \quad \Omega = D \cup \bigcup_{x \in \partial D} B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : \text{dist } (y, \overline{D}) < R\}.$$

さらに, この補題の助けを借りて, 次の補題が成り立つ。

補題 3.4 ([MS6, Lemma 2.2]) $\ell \in \mathbb{R}^N$ を単位ベクトル, $\lambda \in \mathbb{R}$, そして π_λ を超平面: $x \cdot \ell = \lambda$ とする。$D_\lambda = \{x \in D : x \cdot \ell > \lambda\}$ および $\Omega_\lambda = \{x \in \Omega : x \cdot \ell > \lambda\}$ に対して, その π_λ についての折り返しをそれぞれ D'_λ, Ω'_λ とする。このとき, もし $D'_\lambda \subset D$ ならば $\Omega'_\lambda \subset \Omega$ が成り立つ。

この補題のおかげで, [MS3, Theorem 1.2] の証明において the method of moving planes を Ω または $\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$ に適用する代わりに, ここでは直接 C^1 級領域 D または $\mathbb{R}^m \setminus \overline{D}$ に適用することができる。[Fr, Section 5.2] により, the method of moving planes は C^1 級領域に適用できることに注意する。

次の問題が生ずる。Neumann 境界条件のときに非線形拡散方程式 $\partial_t u = \Delta\phi(u)$ に関して何が示せるか。

4 Liouville 型定理

$m = N+1$ とおく。$f \in C(\mathbb{R}^N)$ に対して, 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ を次で定める。

$$\Omega = \{X = (x, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1} \ : \ x_{N+1} > f(x)\}. \tag{4.1}$$

この節では $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して, $X = (x, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ と書く。$\partial\Omega = \partial\left(\mathbb{R}^{N+1} \setminus \overline{\Omega}\right)$ に気づく。第 3 節の関数 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について, 初期境界値問題 (3.2)-(3.4) の有界な一意解 $u = u(X,t)$ を考える。ただし, $\Delta = \displaystyle\sum_{j=1}^{N+1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ である。最大値の原理より

$$\frac{\partial u}{\partial x_{N+1}} < 0 \ \text{ in } \Omega \times (0, \infty). \tag{4.2}$$

このとき, 次の Liouville 型定理が成り立つ。

定理 4.1 ([Sak3, Theorem 1.1]) u を (3.2)-(3.4) の有界な一意解とする。$\mathbb{R}^N$ の基底 $\{y^1, y^2, \ldots, y^N\}$ が存在して, 任意の $j = 1, \ldots, N$ に対して, x の関数 $f(x + y^j) - f(x)$ が $\mathbb{R}^N$ 上最大値または最小値をもつと仮定する。Ω に含まれる超曲面 Γ が存在して, Γ が常に u の等位面であるとする。このとき, f は x の 1 次関数であって $\partial\Omega$ は超平面に限る。

注意 4.2 定理 4.1 の証明には, Berestycki, Caffarelli, and Nirenberg [BCN] の the sliding method を繰り返し用いる。詳しくは論文 [Sak3] を参照せよ。[MS5, Theorem 2.3 and Remark 2.4, p. 240] において, f に強い仮定「任意の $y \in \mathbb{R}^N$ に対して, ある $h(y) \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\lim_{|x| \to \infty} [f(x+y) - f(x)] = h(y) \tag{4.3}$$

を満たす」が課されていた。この条件 (4.3) は条件 [BCN, (7.2), p. 1108] ($h(y) \equiv 0$) の変形版である。$N = 1$ のとき, $f(x) = ax + b + \sin x$ $(a, b \in \mathbb{R})$ は定理 4.1 の仮定を満た

すが, $\frac{y}{2\pi}$ が整数でないとき (4.3) を満たさない。$f(x) = ax+b+\sin x \tan^{-1} x$ $(a, b \in \mathbb{R})$ は定理 4.1 の仮定を満たさないが, $\mathbb{R}$ 上 Lipschitz 連続である。

次に $\phi(s) \equiv s$ のとき, つまり熱方程式に対して, 初期境界値問題

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \tag{4.4}$$

$$u = 1 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \tag{4.5}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Omega \times \{0\} \tag{4.6}$$

を考える。次の Liouville 型定理が成り立つ。

定理 4.3 ([Sak3, Theorem 1.3]) u を (4.4)-(4.6) の有界な一意解とする。Ω に含まれる超曲面 Γ が存在して, Γ が常に u の等温面であるとする。このとき, もし $N \leq 2$ または $\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq 1\}$ が有界ならば, f は x の 1 次関数であって $\partial\Omega$ は超平面に限る。

注意 4.4 f が $\mathbb{R}^N$ 上 Lipschitz 連続で Ω が一様外部球面条件を満たすときは, この定理は既に [MS4, Theorem 1.1 (ii), p. 1113] で証明されている。[MS6, Lemma 3.1] と [Sak2, Theorem 1.1, p. 887] を合わせると, 一様外部球面条件の仮定は不要であることがわかる。また f の Lipschitz 連続性は f の一様連続性で置き換えられることが, 石井仁司先生の示唆でわかっている。つまり, [Sak2] の証明の対応する部分を修正できる。**定理 4.3 の有利な点は f の一様連続性を仮定しないことである。**

最後に定理 4.3 の証明の概略を述べよう。Ω の一様外部球面条件の仮定を不要にしたことの主要因の一つは次の補題である。距離関数 $d = d(X)$ を

$$d(X) = \text{dist}\ (X, \partial\Omega) \quad \text{for } X \in \Omega$$

で定める。

補題 4.5 ([MS6, Lemma 3.1]) 次が成り立つ。:

(1) ある定数 $R > 0$ が存在して, 任意の $X \in \Gamma$ に対して $d(X) = R$ が成り立つ。

(2) Γ は実解析的な超曲面である。

(3) $\partial\Omega$ も実解析的な超曲面であって, 写像: $\partial\Omega \ni (x, f(x)) \mapsto Y(x, f(x)) \equiv (x, f(x)) + R\nu(x) \in \Gamma$ は微分同型である。ここで, $\nu(x)$ は $\partial\Omega$ の点 $(x, f(x)) \in \partial\Omega$ における上向き単位法線ベクトルである。特に, $\partial\Omega$ と Γ は距離 R 離れた互いに平行な超曲面である。

(4) $\kappa_1(x), \dots, \kappa_N(x)$ を $\partial\Omega$ の点 $(x, f(x)) \in \partial\Omega$ における上向き単位法線ベクトルに関する主曲率とするとき, 次が成り立つ。

$$\max_{1\le j\le N} \kappa_j(x) < \frac{1}{R} \quad \textit{for every } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.7}$$

(5) ある定数 $c > 0$ が存在して, 次が成り立つ。

$$\prod_{j=1}^{N} (1 - R\kappa_j(x)) = c \quad \textit{for every } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.8}$$

(1) は Varadhan[Va] の定理：

$$-4t \log u(X, t) \to d(X)^2 \ \text{ as } t \to 0 \ \text{ uniformly on compact sets in } \Omega$$

から従う。(2) は単に陰関数定理から従う。$N = 1$ のとき, (5) は定理 4.3 の結論を導く。

以下 $N \ge 2$ のときを考えよう。補題 4.5 の下に [Sak2, Lemmas 4.2 and 4.3, p. 891 and p. 892] を $F(s) = \left(\prod_{j=1}^N s_j\right)^{1/N}$ に適用して次の補題を得る。

補題 4.6 ([MS6, Lemma 3.2]) $H_{\partial\Omega}$ と H_Γ をそれぞれ $\partial\Omega$ と Γ の上向き法線ベクトルに関する平均曲率とするとき, 次が成り立つ。

$$c = 1 \ \textit{ and } \ H_{\partial\Omega} \le 0 \le H_\Gamma \ \textit{ on } \mathbb{R}^N.$$

$N = 2$ のとき,

$$\Gamma^* = \left\{ X \in \Omega : d(X) = \frac{R}{2} \right\} \tag{4.9}$$

とおくと, $c = 1$ より Γ^* は $\mathbb{R}^2$ 全体上の極小グラフになる。故に, 極小曲面の方程式の全域解に対する有名な Bernstein の定理により, Γ^* は [MS4] でも見たように超平面でなければならない。

従って $N \ge 3$ で $\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \le 1\}$ が有界な場合が残された。さて, 補題 4.5 の (3) から次の幾何学的特性が導かれることに注目しよう。

補題 4.7 ([Sak3, Lemma 3.3]) 次の2つのことが成り立つ。

(i) 任意の $Y \in \Gamma$ に対して, $X \in \partial\Omega$ が存在して, $Y \in \partial B_R(X)$ かつ $B_R(X) \subset \mathbb{R}^{N+1} \setminus \overline{D}$;

(ii) 任意の $X \in \partial\Omega$ に対して, $Y \in \Gamma$ が存在して, $X \in \partial B_R(Y)$ かつ $B_R(Y) \subset \Omega$.

さらに f と g は次の関係を満たしている。

$$g(x) = \sup_{|x-y| \le R} \left\{ f(y) + \sqrt{R^2 - |x-y|^2} \right\} \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.10}$$

$$f(x) = \inf_{|x-y| \le R} \left\{ g(y) - \sqrt{R^2 - |x-y|^2} \right\} \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.11}$$

実際, (4.10) は補題 4.5 の (1) から従い, (4.11) は補題 4.5 の (1) と補題 4.7 の (ii) から従う。これより, $\{|f(x) - f(y)| : |x-y| \le 1\}$ の有界性は $\{|g(x) - g(y)| : |x-y| \le 1\}$ の有界性を導く。補題 4.6 より

$$\mathcal{M}(f) \le 0 \le \mathcal{M}(g) \equiv \operatorname{div}\left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} \right) \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \tag{4.12}$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $B_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < n\}$ とおく。[GT, Theorem 16.9, pp. 407–408] より, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 2つの関数 $f_n, g_n \in C^2(B_n) \cap C(\overline{B_n})$ が存在して,

$$\mathcal{M}(f_n) = \mathcal{M}(g_n) = 0 \quad \text{in } B_n,$$
$$f_n = f \quad \text{and } g_n = g \quad \text{on } \partial B_n.$$

従って, 比較定理より, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, ある $z_n \in \partial B_n$ が存在して,

$$f_{n+1} \le f_n \le f < g \le g_n \le g_{n+1} \quad \text{and } g_n - f_n \le g(z_n) - f(z_n) \quad \text{in } B_n. \tag{4.13}$$

$\{|f(x) - f(y)| : |x-y| \le 1\}$ の有界性より, (4.10) から $g - f$ は $\mathbb{R}^N$ 上有界であって, (4.13) より, ある定数 $C_* > 0$ が存在して,

$$g - C_* \le f_n \le f \quad \text{and} \quad g \le g_n \le f + C_* \quad \text{in } B_n \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}. \tag{4.14}$$

$\{|f(x) - f(y)| : |x-y| \le 1\}$ と $\{|g(x) - g(y)| : |x-y| \le 1\}$ の有界性を考慮して, 極小曲面の方程式に対する内部評価 ([GT, Corollary 16.7, p. 407]), (4.14), および

(4.13) の n に関する単調性より, [Sak2, pp. 893–894] と同様の議論から, 2つの関数 $f_\infty, g_\infty \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ が存在して,

$$\mathcal{M}(f_\infty) = \mathcal{M}(g_\infty) = 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^N,$$
$|\nabla f_\infty|$ と $|\nabla g_\infty|$ は $\mathbb{R}^N$ 上有界であり,
$$f_n \to f_\infty \ \text{ and } g_n \to g_\infty \ \text{ as } n \to \infty \text{ uniformly on every compact set in } \mathbb{R}^N.$$

故に Moser の定理 [Mo, Corollary, p. 591] より, f_∞ と g_∞ は共に x の 1 次関数であって, f_∞ のグラフは g_∞ のグラフと平行である。以上より, ある定ベクトル $\eta \in \mathbb{R}^N$ が存在して,

$$f_\infty(x) = \eta \cdot x + f_\infty(0) \ \text{ and } \ g_\infty(x) = \eta \cdot x + g_\infty(0) \ \text{ for every } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.15}$$

さらに

$$f_\infty \le f < g \le g_\infty \ \text{ in } \mathbb{R}^N, \tag{4.16}$$
$$f(z_n) - f_\infty(z_n) \ \text{ and } \ g_\infty(z_n) - g(z_n) \ \to 0 \ \text{ as } n \to \infty. \tag{4.17}$$

実際, (4.16) は (4.13) から従う。各 $n \in \mathbb{N}$ について,

$$\begin{aligned} g_n(0) - f_n(0) &\le g(z_n) - f(z_n) \le g_{n+1}(z_n) - f_{n+1}(z_n) \\ &\le g(z_{n+1}) - f(z_{n+1}) \le g_\infty(z_{n+1}) - f_\infty(z_{n+1}) = g_\infty(0) - f_\infty(0) \end{aligned}$$

が成り立つ。故に $g(z_n) - f(z_n) \to g_\infty(0) - f_\infty(0)$ as $n \to \infty$. 従って $n \to \infty$ のとき

$$(f(z_n) - f_\infty(z_n)) + (g_\infty(z_n) - g(z_n)) = (g_\infty(0) - f_\infty(0)) - (g(z_n) - f(z_n)) \to 0.$$

これは (4.17) を示す。

結局 $f \equiv f_\infty$ および $g \equiv g_\infty$ を示せばよい。 補題 4.7 は次の鍵となる補題を導く。

補題 4.8 （勾配評価 [Sak3, Lemma 3.4]） 3つの定数 $\varepsilon_0 > 0, \delta_0 > 0,\ C_0 > 0$ が存在して

(1) もし $z \in \mathbb{R}^N$ かつ $(0 \le) g_\infty(z) - g(z) \le \varepsilon_0$ ならば $\displaystyle\sup_{|y-z| \le \delta_0} |\nabla g(y)| \le C_0;$

(2) もし $z \in \mathbb{R}^N$ かつ $(0 \le) f(z) - f_\infty(z) \le \varepsilon_0$ ならば $\displaystyle\sup_{|x-z| \le \delta_0} |\nabla f(x)| \le C_0.$

補題 4.7 の (i) が (1) を導き, 補題 4.7 の (ii) が (2) を導く。平面と半径 R の球の位置関係のみから導かれる完全に幾何学的な補題である。詳しくは論文 [Sak3] を参照せよ。最後に次がわかる。

補題 4.9 ([Sak3, Lemma 3.5]) 次の 2 つのことが成り立つ。

(i) $g_\infty(x+z_n) - g(x+z_n) \to 0$ *as* $n \to \infty$ *uniformly on every compact set in* $\mathbb{R}^N$*;*

(ii) $f(x+z_n) - f_\infty(x+z_n) \to 0$ *as* $n \to \infty$ *uniformly on every compact set in* $\mathbb{R}^N$*.*

この補題が定理 4.3 の結論を導く。実際, (4.16) と補題 4.7 の下で, 補題 4.9 は 2 つの関数 g_∞ と f_∞ のグラフが距離 R 離れた平行な超平面であることを示している。故に $f \equiv f_\infty$ および $g \equiv g_\infty$ が得られる。補題 4.9 の証明が残された。

補題 4.9 の証明： (i) を示そう。

$$G_n(x) = g(x+z_n) - g(z_n) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^N \text{ and } n \in \mathbb{N}$$

とおくと, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $G_n(0) = 0$ である。(4.17) より, $g_\infty(z_n) - g(z_n) \to 0$ as $n \to \infty$. 従って 補題 4.8 の (1) から, ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\{G_n : n \geq N_0\}$ は $\overline{B_{\delta_0}(0)}$ ($\subset \mathbb{R}^N$) 上同程度連続かつ有界である。Arzelà-Ascoli の定理より, 部分列 $\{G_{n'}\}$ と関数 $G_\infty \in C(\overline{B_{\delta_0}(0)})$ が存在して,

$$G_{n'} \to G_\infty \quad \text{as } n \to \infty \quad \text{uniformly on } \overline{B_{\delta_0}(0)}. \tag{4.18}$$

また $G_\infty(0) = 0$ である。(4.12) より $\mathcal{M}(G_n) \geq 0$ in $\mathbb{R}^N$ となるから, 粘性解の意味で $\mathcal{M}(G_\infty) \geq 0$ in $B_{\delta_0}(0)$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} G_{n'}(x) &= g(x+z_{n'}) - g(z_{n'}) \leq g_\infty(x+z_{n'}) - g(z_{n'}) \\ &= \{g_\infty(x+z_{n'}) - g_\infty(z_{n'})\} + \{g_\infty(z_{n'}) - g(z_{n'})\} = \eta \cdot x + \{g_\infty(z_{n'}) - g(z_{n'})\} \end{aligned}$$

より, (4.17) と (4.18) から, $n' \to \infty$ とすれば

$$G_\infty(x) \leq \eta \cdot x \quad \text{in } \overline{B_{\delta_0}(0)}. \tag{4.19}$$

故に, 粘性解の意味で $\mathcal{M}(\eta \cdot x) = 0 \leq \mathcal{M}(G_\infty)$ in $B_{\delta_0}(0)$ であって $\eta \cdot 0 = 0 = G_\infty(0)$ であるから, Giga and Ohnuma の強比較定理 [GO, Theorem 3.1, p. 173] が使えて,

$$G_\infty(x) \equiv \eta \cdot x \quad \text{in } \overline{B_{\delta_0}(0)}.$$

このようにして極限関数 G_∞ は部分列の選び方によらず一意に定まり, 従って (4.18) から

$$G_n(x) \to \eta \cdot x \quad \text{as } n \to \infty \text{ uniformly on } \overline{B_{\delta_0}(0)} \tag{4.20}$$

となり,

$$\begin{aligned} g_\infty(x+z_n) - g(x+z_n) &= \{g_\infty(x+z_n) - g_\infty(z_n)\} - G_n(x) + \{g_\infty(z_n) - g(z_n)\} \\ &= \eta \cdot x - G_n(x) + \{g_\infty(z_n) - g(z_n)\} \end{aligned}$$

であるから, (4.17) と (4.20) より,

$$g_\infty(x+z_n) - g(x+z_n) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty \text{ uniformly on } \overline{B_{\delta_0}(0)}. \tag{4.21}$$

さらに, 補題 4.8 の (1) を任意の点 $z \in \partial B_{\delta_0}(0)$ に再度用いて上記の議論を繰り返せば, $B_{\delta_0}(0)$ をより大きな $B_{\frac{3}{2}\delta_0}(0)$ に置き換えて, (4.21) が成り立つことがわかる。この議論を必要なだけ繰り返せば, 結論 (i) が得られる。□

次の問題が生ずる。$N \geq 3$ のときも $N = 2$ のときと同様に $\{|f(x)-f(y)| : |x-y| \leq 1\}$ の有界性の仮定無しに定理 4.3 は成立するか。また, 非線形拡散方程式 $\partial_t u = \Delta\phi(u)$ に関しても定理 4.3 と同様な定理が成り立つか。

References

[Al 1] G. Alessandrini, Matzoh ball soup: a symmetry result for the heat equation, J. Analyse Math. 54 (1990), 229–236.

[Al 2] G. Alessandrini, Characterizing spheres by functional relations on solutions of elliptic and parabolic equations, Appl. Anal. 40 (1991), 251–261.

[BCN] H. Berestycki, L. A. Caffarelli, and L. Nirenberg, Monotonicity for elliptic equations in unbounded Lipschitz domains, Comm. Pure Appl. Math. 50 (1997), 1089–1111.

[Fr] L. E. Fraenkel, An Introduction to Maximum Principles and Symmetry in Elliptic Problems, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[GO] Y. Giga and M. Ohnuma, On strong comparison principle for semicontinuous viscosity solutions of some nonlinear elliptic equations, Int. J. Pure Appl. Math. 22 (2005), 165–184.

[GT] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, (Second Edition.), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[K] M. S. Klamkin, A physical characterization of a sphere, in Problems, SIAM Review 6 (1964), p. 61.

[LC] T. Levi-Civita, Famiglie di superficie isoparametriche nell' ordinario spazio euclideo, Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 26 (1937), 355–362.

[MPS] R. Magnanini, J. Prajapat, and S. Sakaguchi, Stationary isothermic surfaces and uniformly dense domains, Trans. Amer. Math. Soc., 358 (2006), 4821–4841.

[MS1] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Matzoh ball soup: Heat conductors with a stationary isothermic surface, Annals of Math., 156 (2002), 931–946.

[MS2] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Stationary isothermic surfaces for unbounded domains, Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), 2723–2738.

[MS3] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Nonlinear diffusion with a bounded stationary level surface, Ann. Inst. Henri Poincaré - (C) Anal. Non Linéaire 27 (2010), 937–952.

[MS4] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Stationary isothermic surfaces and some characterizations of the hyperplane in the N-dimensional Euclidean space, J. Differential Equations 248 (2010), 1112–1119.

[MS5] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Interaction between nonlinear diffusion and geometry of domain, J. Differential Equations 252 (2012), 236–257.

[MS6] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Matzoh ball soup revisited: the boundary regularity issue, Math. Methods Applied Sciences, in press.

[MS7] R. Magnanini and S. Sakaguchi, in preparation.

[Mo] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 577–591.

[Sak1] S. Sakaguchi, When are the spatial level surfaces of solutions of diffusion equations invariant with respect to the time variable?, J. Analyse Math. 78 (1999), 219–243.

[Sak2] S. Sakaguchi, A Liouville-type theorem for some Weingarten hypersurfaces, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, 4 (2011), 887–895.

[Sak3] S. Sakaguchi, Stationary level surfaces and Liouville-type theorems characterizing hyperplanes, Springer INdAM Series, to appear.

[Seg] B. Segre, Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni, Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 27 (1938), 203–207.

[Ser] J. Serrin, A symmetry problem in potential theory, Arch. Ration. Mech. Anal. 43 (1971), 304–318.

[Va] S. R. S. Varadhan, On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 431–455.

[Z] L. Zalcman, Some inverse problems of potential theory, Contemp. Math. 63 (1987), 337-350.