

退化放物型方程式に対する有限要素法と有限体積法

齊藤宣一

東京大学大学院数理科学研究科

Finite-element and finite-volume methods for degenerate parabolic equations

Norikazu SAITO

*Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo*

Abstract. We summarize our recent study on the finite-element and finite-volume methods for $u_t - \Delta f(u) = 0$ with the homogeneous Dirichlet boundary condition. Comparison of these methods are given from the view point of nonlinear semigroup theory in L^1 . Fully discrete schemes (by the finite-volume) with a time-increment control for a fast diffusion equation are examined together with some numerical examples. Especially, we propose a special discretization method for the fast diffusion equation that preserves the extinction phenomena of solution.

1 はじめに

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) を有界領域とし, 退化放物型方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} u_t - \Delta f(u) = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \quad u|_{t=0} = u_0(x) & \text{on } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

を考える. ただし, T は正定数, $u_0 \in L^1(\Omega)$ は初期値, また

$$f \in C(\mathbb{R}), \quad \text{非減少}, \quad f(0) = 0 \quad (2)$$

を仮定する.

具体的な例としては次が挙げられる:

- $f(u) = u|u|^{m-1}$ ($m > 1$) のとき, 多孔性媒質を通過する気体の流れ問題であり, porous media equation と呼ばれる.
- $f(u) = u|u|^{m-1}$ ($0 < m < 1$) のとき, 特異拡散 (fast diffusion) 問題である.
- α, β を正定数として

$$f(u) = \begin{cases} \alpha(u+1) & (u \leq -1) \\ 0 & (-1 < u < 1) \\ \beta(u-1) & (u \geq 1) \end{cases}$$

とすれば, 2 相 Stefan 問題の enthalpy formulation である.

- $\Delta f(u) = \nabla \cdot f'(u) \nabla u$ の形に書き直せば、非線形拡散一般を表している。

(1) を扱うための枠組みとして、

$$V = L^1(\Omega)$$

上の非線形半群理論を採用したい。すなわち、 V 上の作用素 L, A を

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ v \in W_0^{1,1}(\Omega) \mid Lv \in V \right\}, \quad Lv = -\Delta v \quad (v \in \mathcal{D}(L)); \quad (3)$$

$$\mathcal{D}(A) = \{ v \in V \mid f(v) \in D(L) \}, \quad Av = Lf(v) \quad (v \in \mathcal{D}(A)) \quad (4)$$

で定義して、(1) を V 上の抽象的發展方程式

$$\frac{d}{dt}u(t) + Au(t) = 0 \quad (0 < t < T), \quad u(0) = u_0 \quad (5)$$

に書き換える。Brezis and Strauss [3] では、 $-A$ が V 上の**極大消散型** (*m-dissipative*) 作用素であることが証明されている。すなわち、 $-A$ は、

$$R(I + \lambda A) = \overline{D(A)} = V; \\ \|v - \hat{v}\|_1 \leq \|v - \hat{v} + \lambda Av - \lambda A\hat{v}\|_1 \quad (v, \hat{v} \in \mathcal{D}(A), \lambda > 0)$$

を満たす。ただし、

$$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

と書いている。この結果と Crandall and Liggett [4] による非線形半群の生成理論を組み合わせれば、直ちに、指数公式

$$S(t) = s\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{m} A \right)^{-m} \quad ([0, T] \text{ 上一様})$$

で特徴付けられる非線形半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ の一意存在が結論でき、(5) の解は、 $u(t) = S(t)u_0$ で与えられることになる。

もう一つの A の重要な性質として、順序保存性

$$(I + \lambda A)^{-1}g \geq (I + \lambda A)^{-1}\hat{g} \quad (g, \hat{g} \in V, g \geq \hat{g}, \lambda > 0).$$

がある。さらに、 L^∞ 安定性

$$\|(I + \lambda A)^{-1}g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \quad (g \in L^\infty(\Omega), \lambda > 0)$$

も成り立つ ([3])。これらと、上記の指数公式を組み合わせれば、直ちに、半群の順序保存性

$$S(t)u_0 \geq S(t)\hat{u}_0 \quad (u_0, \hat{u}_0 \in V, u_0 \geq \hat{u}_0)$$

と L^∞ 安定性

$$\|S(t)u_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \quad (u_0 \in L^\infty(\Omega))$$

が結論できる。

そこで次のような問題を考える。

上述の作用素論的な性質が保存される (analogy が成り立つ) ような, 数値計算向きの離散スキームを構成することは可能か? 仮に可能であったとして, 収束性などは保証されるであろうか?

本論文では, この問題意識の下で行われた, 有限要素法と有限体積法による (1) の研究結果の一部を紹介する. ただし, 証明などに触れる余裕はないので, 詳細は, [6], [11], [12] を参照されたい.

2 有限要素法

簡単のため, Ω は多角形領域とする. $\{\mathcal{T}_h\}_h$ を, Ω の三角形分割の族 (cf. [2], [6]) とし,

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K \quad (h_K = K \text{ の外接円の直径}).$$

と置く. \mathcal{T}_h を構成する三角形 K を要素 (element), 各要素の頂点を節点 (node) と呼ぶ. 関数空間

$$\begin{aligned} X_h &= \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \mid \text{各 } K \in \mathcal{T}_h \text{ 上で一次多項式}\}, \\ V_h &= \{v_h \in X_h \mid v_h|_{\partial\Omega} = 0\} \end{aligned}$$

を, \mathcal{T}_h 上の連続区分一次要素 (の全体) と呼ぶ. $X_h \subset H^1(\Omega)$, $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ (部分空間) に注意すること. \mathcal{T}_h に現れる節点の総数を \bar{N} , その内 Ω に位置するものの個数を N , $\partial\Omega$ 上に位置するものの個数を N_B とする. 全節点に番号をつけて $\{P_i\}_{i=1}^{\bar{N}}$ と書く. $\{P_i\}_{i=1}^N$ は Ω の内部に位置する節点の全体, $\{P_{i+N}\}_{i=1}^{N_B}$ は $\partial\Omega$ 上の節点の全体である. $1 \leq i \leq \bar{N}$ に対して, $\hat{\phi}_i = \hat{\phi}_{h,i} \in X_h$ を

$$\hat{\phi}_i(P_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

と定めると, $\{\hat{\phi}_i\}_{i=1}^{\bar{N}}$ は X_h の基底を, $\{\hat{\phi}_i\}_{i=1}^N$ は V_h の基底をなす.

通常 $L^2(\Omega)$ 内積を

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

と書く.

このとき, (1) に対する標準的な有限要素近似は,

$$\begin{cases} u_h \in C^1([0, T]; V_h), \\ \left(\frac{du_h(t)}{dt}, v_h \right) + (\nabla f(u_h(t)), \nabla v_h) = 0 \quad (\forall v_h \in V_h), \\ u_h(0) = u_{0h} \end{cases} \quad (6)$$

となる。ここで、 $u_{0h} \in V_h$ は u_0 の近似である。

(6) を作用素で表現するために、 $-\Delta$ の有限要素近似 $L_h : V_h \rightarrow V_h$ を、

$$(L_h u_h, v_h) = (\nabla u_h, \nabla v_h) \quad (\forall v_h \in V_h) \quad (7)$$

で定義し、Ritz 射影作用素 $R_h : V_h \rightarrow V_h$ を、

$$(\nabla(R_h u_h - u_h), \nabla v_h) = 0 \quad (\forall v_h \in V_h) \quad (8)$$

で定義する。さらに、 L^2 射影作用素 $P_h : V_h \rightarrow V_h$ を、

$$(P_h u_h - u_h, v_h) = 0 \quad (\forall v_h \in V_h) \quad (9)$$

で定義する。そうすると、(1) は、

$$\frac{du_h(t)}{dt} + L_h R_h f(u_h(t)) = 0 \quad (0 < t < T), \quad u_h(0) = u_{0h} \quad (10)$$

となる。実際、 f が局所 Lipschitz 連続な関数ならば、(10) は、well-posed となる。しかし、 $-A$ の有限要素近似と目される $-L_h R_h$ は、望む性質を満たさない。したがって、なんらかの非標準的な近似を考える必要がある。

そのために、**集中質量 (lumped mass) 近似**を導入する (cf. [6]). 各 P_i に対して、重心領域 D_i が一意に対応している (図 1). この D_i の特性関数を $\bar{\phi}_i = \bar{\phi}_{h,i}$ とする;

$$\bar{\phi}_i(x) = \begin{cases} 1 & (x \in D_i) \\ 0 & (x \in \Omega \setminus \bar{D}_i). \end{cases} \quad (11)$$

そして、 $\{\bar{\phi}_i\}_{i=1}^N$ の張る線形空間 (区分的定数関数) を \bar{V}_h と表して、集中質量作用素 $M_h : V_h \rightarrow \bar{V}_h$ を

$$(M_h v_h)(x) = \sum_{i=1}^N v_h(P_i) \bar{\phi}_i(x) \quad (v_h \in V_h) \quad (12)$$

で定義する。そうしてさらに、 V_h に新たな内積

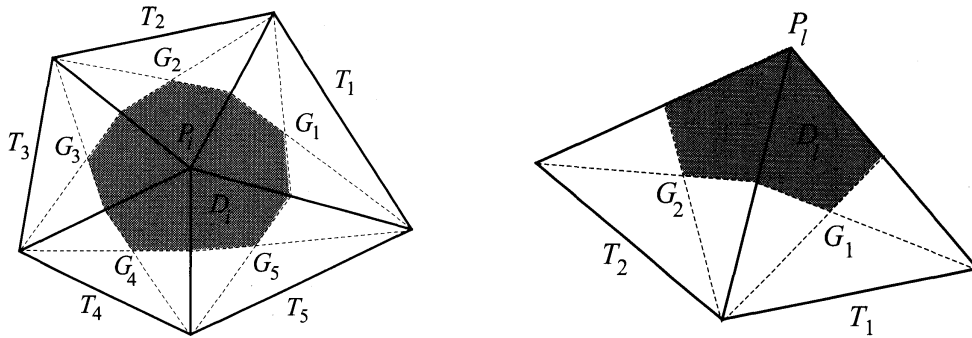
$$(v_h, w_h)_h = (M_h v_h, M_h w_h) = \sum_{i=1}^N v_h(P_i) w_h(P_i) |D_i| \quad (v_h, w_h \in V_h) \quad (13)$$

を導入する ($|D_i|$ は D_i の面積).

さらに、Lagrange 補間作用素 $\pi_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$ を、

$$(\pi_h v)(P_i) = \sum_{i=1}^N v(P_i) \hat{\phi}_i \quad (14)$$

で定義する。



(a) 内部節点 \$P_i\$ の重心領域 \$D_i\$ (b) 境界節点 \$P_l\$ の重心領域 \$D_l\$

図1 重心領域の例. \$G_j\$ などは三角形 \$T_j\$ の重心を表す. すなわち, 重心領域 \$D_j\$ とは, \$P_i\$ のまわりの要素 \$T_j\$ の重心 \$G_j\$ と辺の中点を結んでできる多角形の内部のこと.

そして, (1) の近似として, 次の有限要素近似を考える:

$$\begin{cases} u_h \in C^1([0, T]; V_h), \\ \left(\frac{du_h(t)}{dt}, v_h \right)_h + (\nabla \pi_h f(u_h(t)), \nabla v_h) = 0 \quad (\forall v_h \in V_h), \\ u_h(0) = u_{0h}. \end{cases} \quad (15)$$

これは, 次のように書いても同じである:

$$\frac{du_h(t)}{dt} + A_h u_h(t) = 0 \quad (0 < t < T), \quad u_h(0) = u_{0h}. \quad (16)$$

ただし, 非線形作用素 \$A_h : V_h \to V_h\$ を

$$A_h v_h = L_h \pi_h f(v_h) \quad (v_h \in V_h)$$

で定めている.

\$-A_h\$ は, \$-A\$ の離散化版として相応しい性質を備えている. 離散 \$L^1\$ ノルムを

$$\|v_h\|_{1,h} = \int_{\Omega} M_h \pi_h |v_h| \, dx = \sum_{i=1}^N v_h(P_i) |D_i|$$

で定める.

定理 1. 任意の \$\lambda > 0\$ に対して, 作用素 \$-A_h\$ は次を満たす:

- (i) \$R(I + \lambda A_h) = V_h\$.
- (ii) \$\|v_h - \hat{v}_h\|_{1,h} \leq \|v_h - \hat{v}_h + \lambda A_h v_h - \lambda A_h \hat{v}_h\|_{1,h} \quad (v_h, \hat{v}_h \in V_h)\$.
- (iii) \$(I + \lambda A_h)^{-1} g_h \geq (I + \lambda A_h)^{-1} \hat{g}_h \quad (g_h, \hat{g}_h \in V_h, g_h \geq \hat{g}_h)\$.
- (iv) \$\|(I + \lambda A_h)^{-1} g_h\|_{\infty} \leq \|g_h\|_{\infty} \quad (g_h \in V_h)\$.

したがって、再度、Crandall and Liggett [4] の非線形半群の生成理論が応用できて、次を得る。

定理 2. (i) 作用素 $-A_h$ は $\|\cdot\|_{1,h}$ の下で V_h 上の極大消散型作用素となる。したがって、(16) は一意的な時間大域解 $u_h(t) = S_h(t)u_{0h}$ が存在する。ここで、 $\{S_h(t)\}_{t \geq 0}$ は、

$$S_h(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{m} A_h \right)^{-m} \quad ([0, T] \text{ 上一様})$$

で定義される非線形半群である。

$$(ii) \|S_h(t)u_{0h} - S_h(t)\hat{u}_{0h}\|_1 \leq \|u_{0h} - \hat{u}_{0h}\|_1 \quad (u_{0h}, \hat{u}_{0h} \in V_h).$$

$$(iii) S_h(t)u_{0h} \geq S_h(t)\hat{u}_{0h} \quad (u_{0h}, \hat{u}_{0h} \in V_h, u_{0h} \geq \hat{u}_{0h}).$$

$$(iv) \|S_h(t)u_{0h}\|_\infty \leq \|u_{0h}\|_\infty \quad (u_{0h} \in V_h).$$

次に有限要素スキームの収束性について述べるために、 $\mu > d = 2$ に対して、次の条件を述べる：

$$\begin{cases} \text{任意の } p \in (d, \mu) \text{ と } g \in L^p(\Omega) \text{ に対して,} \\ -\Delta w = g \text{ in } \Omega, \quad w = 0 \text{ on } \partial\Omega \text{ の解 } w \in H^1(\Omega) \text{ は,} \\ w \in W^{2,p}(\Omega), \quad \|w\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p \|f\|_p \text{ を満たす.} \end{cases} \quad (17)$$

定理 3. $\lambda_1 > 0$ と $g \in L^1(\Omega)$ を固定する。 $g_h \in V_h$ を、 $\|g_h - g\|_1 \rightarrow 0$ ($h \downarrow 0$) なるものとする。さらに、 f を狭義単調増加とし、(17) を満たす $\mu > d = 2$ の存在を仮定する。このとき、 $\{\mathcal{T}_h\}_h$ が準一様な三角形分割の族 (cf. [2], [6]) ならば、

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{\lambda \in [0, \lambda_1]} \|u - u_h\|_1 = 0$$

が成り立つ。ここで、 $u + \lambda Au = g$, $u_h + \lambda A_h u_h = g_h$ としている。

定理 4. $T > 0$ と $u_0 \in L^1(\Omega)$ を固定する。 $u_{0,h} \in V_h$ を $\|u_{0,h} - u_0\|_1 \rightarrow 0$ ($h \downarrow 0$) なるものとする。さらに、 f を狭義単調増加とし、(17) を満たす $\mu > 2$ の存在を仮定する。このとき、 $\{\mathcal{T}_h\}_h$ が準一様な三角形分割の族ならば、

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - u_h(t)\|_1 = 0$$

が成り立つ。ここで、 $u(t) = S(t)u_0$, $u_h(t) = S_h(t)u_{0h}$ としている。

定理 1-4 の証明は、Mizutani, Saito and Suzuki [11] にある。しかし、次のような問題点があり、その意味で、“不完全燃焼”の感が残ってしまった。

1. 定理 1(iv) の証明はとても長い。理由は、Brezis and Strauss [3] の基本補題 (Lemma 2) の離散化版が、有限要素法では成立しないからである。結果的に、連続変数の場合と、全く異なる方法を探らねばならなかった。

2. 定理 3 と定理 4 においては, f は狭義単調増加であることが仮定されているため, 結果は, Stefan 問題に応用できない.
3. 定理 3 と定理 4 において, 条件 (17) が仮定されている. $d = 2$ の場合は, 凸多角形であれば, このような $\mu > 2$ は必ず存在する (cf. [7]). しかし, $d = 3$ の場合には, 領域の形状は相当に制限されてしまう.

3 有限体積法

引き続き, Ω は多角形領域とする. 前節と同じ記号を用いるが, 意味が異なるので注意すること.

有限体積法 (finite-volume method, FVM) は, 偏微分方程式の局所的な保存則に基づく離散化手法であり, 移動や拡散効果を伴う方程式の数値計算に良く利用されている. 規則あるいは準規則格子上での有限体積法の歴史は, 1960 年代前半にまで遡ることができる. 一方で, もっと一般の不規則格子 (許容メッシュ) 上での有限体積法, とくにその数学解析についての本質的な進展があったのは, 精々 1990 年代後半であり, まだ 10 年程度の歴史しかない.

有限体積法では, Ω を control volume と呼ばれる小領域に分割し, 各 control volume 上で定数値を取る区分的定数関数で, 方程式の解 u を近似する. control volume の集合を許容メッシュ (admissible mesh) と言う. その定義は次の通りである (cf. [5], [9]).

定義 1 (許容メッシュ). Ω の部分領域の集合 $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \in \Lambda}$ ($\Lambda = \{1, \dots, N\}$) が Ω の許容メッシュとであるとは, 次の 4 つの条件が満たされる時と言う:

- (A1) 各 D_i は開凸多角形で, $\bar{\Omega} = \bigcup_{i \in \Lambda} \bar{D}_i$.
- (A2) $i \neq j$ のとき, \bar{D}_i と \bar{D}_j は, 共通部分を持たないか, 一頂点を共有するか, 一辺 (全体) を共有するかのいずれかしかない. 一辺を共有するとき $\sigma_{ij} = \bar{D}_i \cap \bar{D}_j$ と書く. また, そうでない場合は, $\sigma_{ij} = \emptyset$ と定義しておく.
- (A3) 各 D_i には, 点 $P_i \in \bar{D}_i$ が付随しており, $\sigma_{ij} \neq \emptyset$ のとき, P_i と P_j を結ぶ線分は, σ_{ij} を含む直線と直交する.
- (A4) $\partial\Lambda = \{i \in \Lambda \mid \partial\Omega \cap \bar{D}_i \text{ の長さが正}\}$ とし, D_i ($i \in \partial\Lambda$) を境界 control volume と呼ぶ. そして, $i \in \partial\Lambda$ のときは, $P_i \in \partial\Omega \cap \bar{D}_i$ である.

サイズパラメータ $h_i = D_i$ の直径, $h = \text{size } \mathcal{D} = \max\{h_i \mid i \in \Lambda\}$ を導入し, これを $\mathcal{D} = \mathcal{D}_h$ と明示する.

注意 1. 現在, 許容メッシュの定義としては, Eymard et al. [5] の Definition 9.1 を引用するのが普通である. そこでは, 上記の (A4) を許容メッシュの条件に含めず, 境界条件の処理に別の注意を払っている. しかし, それはあまり本質的ではなく, はじめから (A4) を

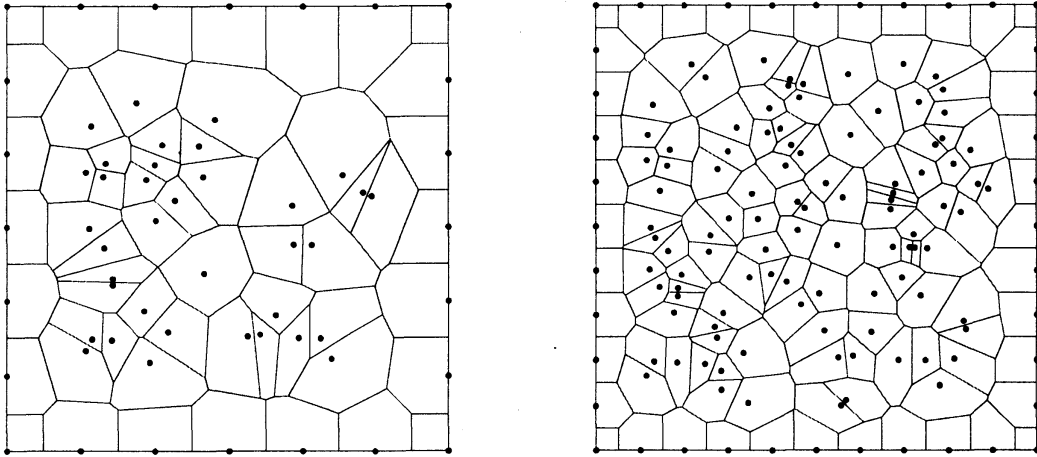


図2 Voronoi 図による許容メッシュ.

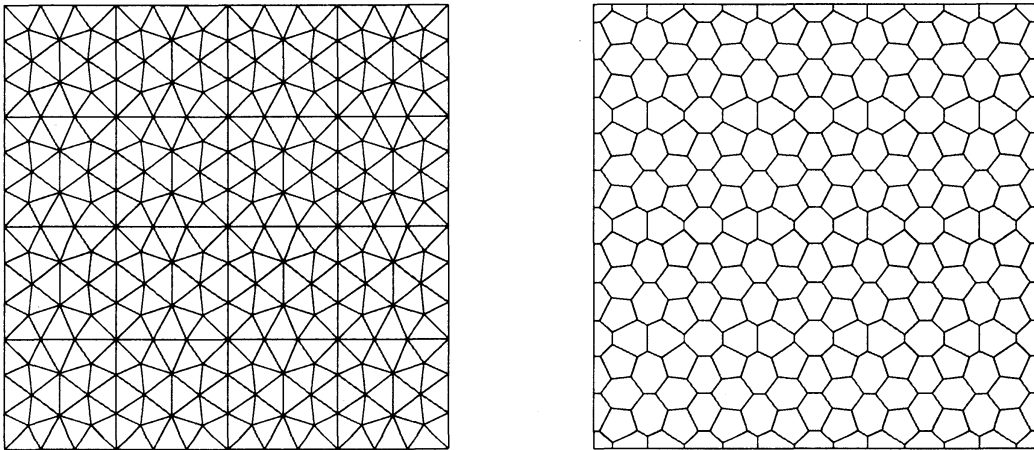


図3 鋭角型三角形分割 (左) とその外心領域に基づく双対メッシュ (右).

仮定しておいた方が、有限体積スキームの記述、解析が明快になるので、本論文ではそのようにした。

許容メッシュ \mathcal{D}_h の具体的を図2と図3に挙げる。

退化放物型方程式 (1) に戻って、有限体積法による近似スキームを述べよう。許容メッシュ $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in \Lambda}$ が与えられたとして、 $u_t - \Delta f(u) = 0$ を各 D_i ($i \in \Lambda$) で積分し、発散定理を使うと

$$\int_{D_i} u_t \, dx - \int_{\partial D_i} \nabla f(u) \cdot \nu_i \, dS = 0$$

を得る。

区分的定数関数の空間

$$V_h = \text{span} \{\varphi_i\}_{i \in \Lambda}, \quad \varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & (x \in D_i) \\ 0 & (x \in \Omega \setminus D_i) \end{cases}$$

を導入し、一般に、 $v_h \in V_h$ に対して、 $v_i = v_h(P_i)$ ($i \in \Lambda$) と書く。さらに、

$$d_{ij} = |P_i - P_j|, \quad m_i = D_i \text{の面積}, \quad m_{ij} = \sigma_{ij} \text{の長さ}, \quad \gamma_{ij} = \frac{m_{ij}}{d_{ij}},$$

$$\Lambda_i = \{j \in \Lambda \mid \sigma_{ij} \neq \emptyset\}, \quad \nu_{ij} = \sigma_{ij} \text{上の } D_i \text{ から } D_j \text{ へ向かう単位法ベクトル}$$

と記号を定める。(1) の解を $u(x, t) \approx u_h(t) \in V_h$ と近似することを考える。実際、拡散部分は、中心差分を使って、

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_i} \nabla f(u_h(t)) \cdot \nu_i \, dS &= \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\sigma_{ij}} \nabla f(u_h(t)) \cdot \nu_{ij} \, dS_{ij} \\ &\approx \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\sigma_{ij}} \frac{f(u_j(t)) - f(u_i(t))}{d_{ij}} \, dS_{ij} \\ &= \sum_{j \in \Lambda_i} \gamma_{ij} (f(u_j(t)) - f(u_i(t))) \end{aligned}$$

とする。時間微分の項は、

$$\int_{D_i} u_t \, dx \approx m_i \frac{du_i(t)}{dt}$$

と近似する。以上をまとめて、(1) の有限体積スキームとして、次を得る。

$$\begin{cases} u_h \in C^1([0, T]; V_h), \\ \frac{du_i(t)}{dt} - \frac{1}{m_i} \sum_{j \in \Lambda_i} \gamma_{ij} [f(u_j(t)) - f(u_i(t))] = 0 & (i \in \Lambda), \\ u_i(t) = 0 \quad (i \in \partial\Lambda), \quad u_i(0) = u_{0,i} \equiv \frac{1}{m_i} \int_{D_i} u_0(x) \, dx & (i \in \bar{\Lambda}). \end{cases} \quad (18)$$

作用素 L と A の有限体積近似 $L_h, A_h : V_h \rightarrow V_h$ を

$$(L_h v_h)(P_i) = -\frac{1}{m_i} \sum_{j \in \Lambda_i} \gamma_{ij} (v_j - v_i) \quad (i \in \Lambda),$$

$$(A_h v_h) = L_h(f(v_h))$$

で定めると、(18) は、

$$\frac{d}{dt} u_h(t) + A_h u_h(t) = 0 \quad (0 < t < T), \quad u_h(0) = u_{0,h} \quad (19)$$

となる。

すでに使っているし、明らかなことであるが、

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(0) = 0, \quad v_h \in V_h \quad \Rightarrow \quad \varphi(v_h) \in V_h \quad (20)$$

が成り立つ。これは、意外に、解析の各場面で役に立つ。

定理 5. 任意の $\lambda > 0$ に対して, 作用素 A_h は次を満たす:

- (i) $R(I + \lambda A_h) = V_h$.
- (ii) $\|v_h - \hat{v}_h\|_1 \leq \|v_h - \hat{v}_h + \lambda A_h v_h - \lambda A_h \hat{v}_h\|_1 \quad (v_h, \hat{v}_h \in V_h)$.
- (iii) $(I + \lambda A_h)^{-1} g_h \geq (I + \lambda A_h)^{-1} \hat{g}_h \quad (g_h, \hat{g}_h \in V_h, g_h \geq \hat{g}_h)$.
- (iv) $\|(I + \lambda A_h)^{-1} g_h\|_p \leq \|g_h\|_p \quad (g_h \in V_h, 1 \leq p \leq \infty)$.

定理 6. (i) 作用素 $-A_h$ は通常 L^1 ノルムの下で V_h 上の極大消散型作用素となる。したがって, (19) は一意的な時間大域解 $u_h(t) = S_h(t)u_{0,h}$ が存在する。ここで, $\{S_h(t)\}_{t \geq 0}$ は,

$$S_h(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{m} A_h \right)^{-m} \quad ([0, T] \text{ 上一様})$$

で定義される非線形半群である。

- (ii) $\|S_h(t)u_{0,h} - S_h(t)\hat{u}_{0,h}\|_1 \leq \|u_{0,h} - \hat{u}_{0,h}\|_1 \quad (u_{0,h}, \hat{u}_{0,h} \in V_h)$.
- (iii) $S_h(t)u_{0,h} \geq S_h(t)\hat{u}_{0,h} \quad (u_{0,h}, \hat{u}_{0,h} \in V_h, u_{0,h} \geq \hat{u}_{0,h})$.
- (iv) $\|S_h(t)u_{0,h}\|_p \leq \|u_{0,h}\|_p \quad (u_{0,h} \in V_h, 1 \leq p \leq \infty)$.

定理 5 の証明は, 対応する有限要素法版の証明に比べて, 極めて“自然に”できる。もう少し正確には, Brezis and Strauss [3] の離散化版実行することが可能である。その解析には, 次に述べる補題が本質的役割を果たす。この補題は, 極大単調作用素に対する Brezis and Strauss の結果 ([3, Lemma 2]) の有限体積版と考えられる。重要な点は, この補題の有限要素版は一般には成立しない, という点である。

補題 1. $f, \phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を非減少関数 (不連続でも良い) として, さらに, $f(0) = 0$ を仮定すると,

$$\int_{\Omega} (L_h \phi(u_h)) f(u_h) dx = a_h(\phi_h, f_h) \geq 0 \quad (u_h \in V_h)$$

が成り立つ。ただし, $f_h = f(u_h)$, $\phi_h = \phi(u_h)$ と置いている。

ここで,

- $a_h(u_h, v_h) = \sum_{\sigma_{ij} \in \Gamma_h} \gamma_{ij}(u_j - u_i)(v_j - v_i)$;
- $\Gamma_h = \{\sigma_{ij} \mid i \in \Lambda \text{ and/or } j \in \Lambda\}$.

という記号を用いている。

次に収束性についての結果を述べる。 f については, 始めに述べた (2) を仮定するのみで良い。一方で, 許容メッシュについては,

$$\nu_1 = \inf_{\mathcal{D}_h \in \{\mathcal{D}_h\}_h} \nu_h > 0 \quad (21)$$

を仮定する。ただし,

$$\nu_h = \min_{\sigma_{i,j} \in \Gamma_h} \frac{d_{i,j}}{d_i}, \quad d_i = \text{diam}(D_i), \quad d_{i,j} = \text{dist}(P_i, \sigma_{ij})$$

としている。

定理 7. $\lambda_1 > 0$ と $g \in L^1(\Omega)$ を固定する。 $g_h \in V_h$ を, $\|g_h - g\|_1 \rightarrow 0$ ($h \downarrow 0$) なるものとする。このとき, (21) の下で,

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{\lambda \in [0, \lambda_1]} \|u - u_h\|_1 = 0$$

が成り立つ。ここで, $u + \lambda Au = g$, $u_h + \lambda A_h u_h = g_h$ としている。

定理 8. $T > 0$ と $u_0 \in L^1(\Omega)$ を固定すると, (21) の下で,

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - u_h(t)\|_1 = 0$$

が成り立つ。ここで, $u(t) = S(t)u_0$, $u_h(t) = S_h(t)u_{0,h}$ としている。

次に, 時間変数に関する離散化を考える。

$$t_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n, \quad \tau_1, \dots, \tau_n > 0$$

という非一様な時間変数の分割を導入して,

$$u_h^n \approx u_h(t_n)$$

とする。

(18) に対しては, 極大消散型作用素で記述される発展方程式に対する時間離散化スキーム (cf. Nochetto and Savaré [13]) が, 直ちに適用できる。例えば, 後退 Euler 近似

$$\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} + A_h u_h^n = 0, \quad u_h^0 = u_{0,h}$$

に対して

$$u_h^\tau(t) = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} (t - t_{n-1}) + u_h^{n-1} \quad (t_{n-1} \leq t < t_n)$$

と定義すると, 事前誤差評価

$$\max_{t \in [0, T]} \|u_h(t) - u_h^\tau(t)\|_1 \leq (T \|A_h u_{0,h}\|_1) \tau.$$

および, 事後評価

$$\max_{t \in [0, T]} \|u_h(t) - u_h^\tau(t)\|_1 \leq 2 \|A_h u_{0,h}\|_1^{1/2} \left(\sum_{n=1}^N \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_1 \right)^{1/2}$$

が成り立つ.

また, 前進 Euler 近似

$$\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau_{n+1}} + A_h u_h^n = 0, \quad u_h^0 = u_{0,h},$$

を採用しても良い. この場合,

$$\tau_{n+1} \leq \frac{1}{\eta_h^n} \left(\min_{i \in \Lambda} \frac{m_i}{\sum_{j \in \Lambda_i} \gamma_{ij}} \right) \Rightarrow \|u_h^{n+1}\|_\infty \leq \|u_{0,h}\|_\infty,$$

が成り立つ. ここで,

$$\eta_h^n = \sup_{M' \leq z \neq w \leq M} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, \quad M' = \min_{i \in \Lambda} u_h^n, \quad M = \max_{i \in \Lambda} u_h^n$$

としている.

4 特異拡散問題の全離散近似. 消滅現象の再現

前節で考察した有限体積法を, 特異拡散 (fast diffusion) 問題

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta f(u) = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \quad u|_{t=0} = u_0 & \text{on } \Omega \end{cases} \quad (22)$$

に応用してみよう. ただし, $0 < \alpha < 1$ に対して, $f(s) = s^\alpha$ ($s \geq 0$) としている. これは, $\varphi(r) = r^{1/\alpha} = r^p$ ($r \geq 0$) と定義して, 未知関数を $v = f(u)$ と置き換えることで,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(v) - \Delta v = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \quad v|_{t=0} = v_0 = u_0^\alpha & \text{on } \Omega \end{cases} \quad (23)$$

と書くこともできる.

半離散有限体積近似は, 前節と同じ記号の下で,

$$\begin{cases} \frac{du_i(t)}{dt} - \frac{1}{m_i} \sum_{j \in \Lambda_i} \gamma_{ij} [f(u_j(t)) - f(u_i(t))] = 0 & (i \in \Lambda), \\ u_i(t) = 0 & (i \in \partial\Lambda), \quad u_i(0) = u_{0,i} \equiv \frac{1}{m_i} \int_{D_i} u_0(x) dx & (i \in \bar{\Lambda}), \end{cases} \quad (24)$$

あるいは,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi(v_i(t)) - \frac{1}{m_i} \sum_{j \in \Lambda_i} \gamma_{ij} [v_j(t) - v_i(t)] = 0 & (i \in \Lambda), \\ v_i(t) = 0 & (i \in \partial\Lambda), \quad v_i(0) = v_{0,i} = v_{0,i}^\gamma & (i \in \bar{\Lambda}) \end{cases} \quad (25)$$

となる。これらはもちろん同値である (有限要素法の場合は、この書き換えが、同値にならない)。

以後は、直接には (25) のみを扱う。時間変数を後退 Euler 近似で離散化してみると、

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau_n} [\varphi(v_i^n) - \varphi(v_i^{n-1})] - \frac{1}{m_i} \sum_{j \in \Lambda_i} \gamma_{ij} [v_j^n - v_i^n] = 0 & (i \in \Lambda), \\ v_i^n = 0 & (i \in \partial\Lambda), \quad v_i^0 = v_{0,i} \quad (i \in \bar{\Lambda}) \end{cases} \quad (26)$$

を得る。作用素で書けば、

$$\frac{\varphi(v_h^n) - \varphi(v_h^{n-1})}{\tau_n} + L_h v_h^n = 0 \quad (n \geq 1), \quad v_h^0 = v_{0,h} \quad (27)$$

となる。

これらのスキームの収束性については、前節で述べたように、(21) の下で、

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|\varphi(v_h(t)) - \varphi(v(t))\|_1 &= 0, \\ \max_{t_n \in [0, T]} \|\varphi(v_h(t)) - \varphi(v_h^n)\|_1 &\leq (T \|L_h v_{0,h}\|_1) \tau_{\max} \end{aligned}$$

が成り立つ。

次に、時間増分 τ_n の具体的な決め方を指定する必要がある。

その際に、(23) の解 v について、

$$c_1 (T_* - t)^{1/(p-1)} \leq \|v(t)\|_{p+1} \leq c_2 (T_* - t)^{1/(p-1)}$$

を満たす $T_* = T_*(v_0) > 0$ と $c_1, c_2 > 0$ が存在することに注意を払うべきである。すなわち、初期値 v_0 が、 $v_0 > 0$, $v_0 \not\equiv 0$ を満たせば、 $0 \leq t < T_*$ では、 $v(x, t) > 0$ ($x \in \Omega$), $t \geq T_*$ では、 $v \equiv 0$ となる。この T_* を解の**消滅時刻 (extinction time)**と呼ぶ。数値計算では、消滅時刻付近での解の様子を詳細に観察したい。したがって、

$$\tau_n \rightarrow 0, \quad t_n \rightarrow T_* \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (28)$$

となることが望ましい。

そこで、Berryman and Holland [1] で報告されている消滅時刻の評価を応用する:

$$\lambda_p \frac{\|v(t)\|_{p+1}^{p+1}}{\|\nabla v(t)\|_2^2} \leq T_*(v(t)) \leq \lambda_p C_S \|v(t)\|_{p+1}^{p-1} \quad \left(\lambda_p = \frac{p}{p-1} \right). \quad (29)$$

ここで、 C_S は Sobolev の不等式に現れる領域定数によって定義される正定数、 $T_*(v(t))$ は、 $v(t)$ を改めて初期値として考えた際の消滅時刻を表す。これに基づいて、 $0 < \delta < 1$ を安全係数として固定して、

$$\tau_n = \min \left\{ \tau_0, \delta \lambda_p \frac{\|v_h^{n-1}\|_{p+1}^{p+1}}{a_h(v_h^{n-1}, v_h^{n-1})} \right\} \quad (30)$$

と選べば*1, (28) が期待できる.

このスキームによる数値解散結果を図 4-6 に示す. いずれの場合も, 消滅時刻付近での解の様子がうまく捉えられている.

しかしながら, (26) の解 v_h^n が, (29) の離散化版を満たしている訳でなく, その意味で, (30) の正当性は明らかでない. そもそも, (26) にも離散消滅現象は起こり得るのであろうか? 残念ながら, 後退 Euler 近似に基づく (26) については, 離散消滅現象の有無はいまのところよくわからない. しかしながら, 消滅現象を厳密に再現するような離散スキームは存在する.

それを述べるために, M. N. Le Roux による, 一見奇妙な時間離散化方法を応用する ([10]):

$$\begin{cases} \frac{p}{p-1} v_i^n \frac{(v_i^n)^{p-1} - (v_i^{n-1})^{p-1}}{\tau_n} - \frac{1}{m_i} \sum_{j \in \Lambda_i} \gamma_{ij} (v_j^n - v_i^n) = 0 & (i \in \Lambda), \\ v_i^n = 0 & (i \in \partial\Lambda), \quad v_i^0 = v_{0,i} \quad (i \in \bar{\Lambda}). \end{cases} \quad (31)$$

あるいは, 次のように書いても同じである:

$$\frac{p}{p-1} v_h^n \frac{(v_h^n)^{p-1} - (v_h^{n-1})^{p-1}}{\tau_n} + L_h v_h^n = 0 \quad (n \geq 1), \quad v_h^0 = v_{h0}. \quad (32)$$

このスキームについては, つぎの結果が成り立つ (証明は, いずれどこかで述べる).

補題 2. $v_h^{n-1} \equiv 0$ ならば, (32) を満たす解は $v_h^n \equiv 0$ のみである.

定義 2. $H_n = \frac{a_h(v_h^n, v_h^n)}{\|v_h^n\|_{p+1}^2}$ とする.

定理 9. $0 \neq 0 \leq v_h^{n-1} \in V_h$ に対して,

$$\tau_n < \frac{p}{p-1} \cdot \frac{\|v_h^{n-1}\|_{p+1}^{p-1}}{H_{n-1}} \quad (33)$$

と選べば, (32) には一意な解 $v_h^n \in V_h$ が存在し, さらに,

$$v_h^n \geq 0, \neq 0, \quad \|v_h^n\|_\infty \leq \|v_h^{n-1}\|_\infty, \quad H_n \leq H_{n-1}$$

を満たす.

定理 10. $0 \neq 0 \leq v_h^0 \in V_h$ とする. このとき,

$$t_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n < \frac{p}{p-1} \cdot \frac{\|v_h^0\|_{p+1}^{p+1}}{a_h(v_h^0, v_h^0)} \quad (34)$$

*1 赤木剛朗氏 (神戸大学) からのアドバイスに基づく.

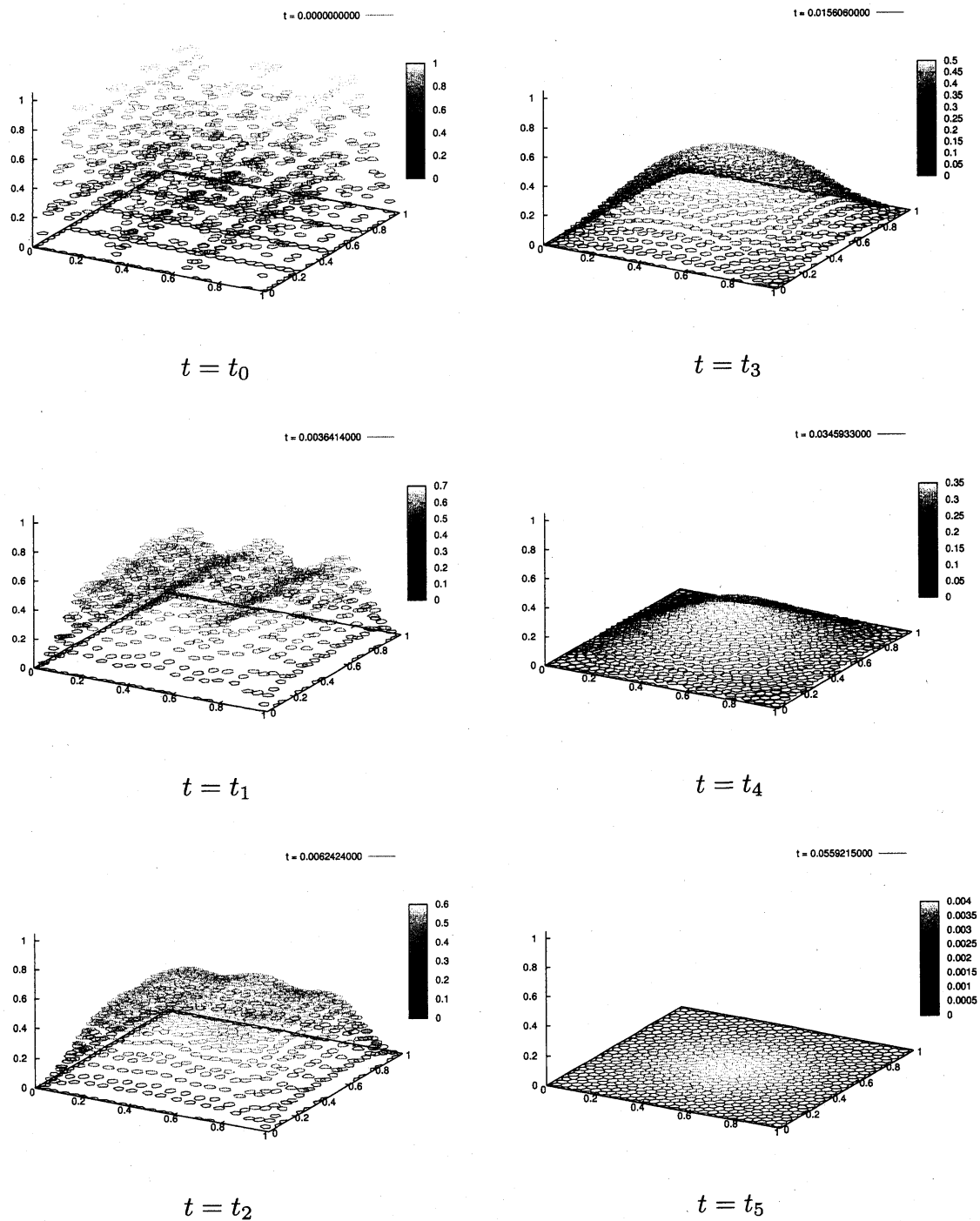


図4 初期値 $u_0(x, y) = |\sin(3\pi x) \sin(4\pi y)|$ に対するスキーム (26) の計算 ($0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 \approx T_*$). $p = 2$ の場合.

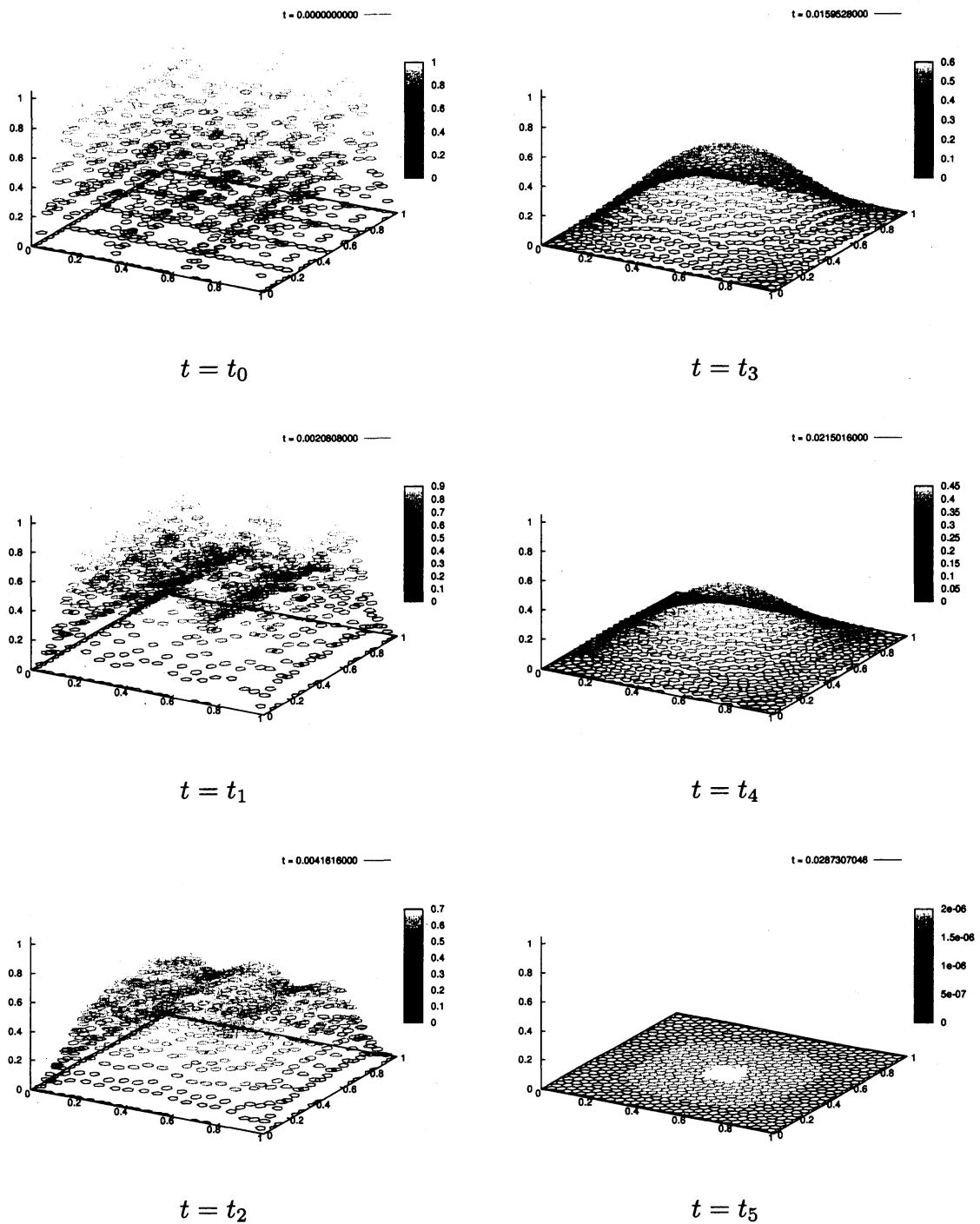


図5 初期値 $u_0(x, y) = |\sin(3\pi x) \sin(4\pi y)|$ に対するスキーム (26) の計算 ($0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 \approx T^*$). $p = 3$ の場合.

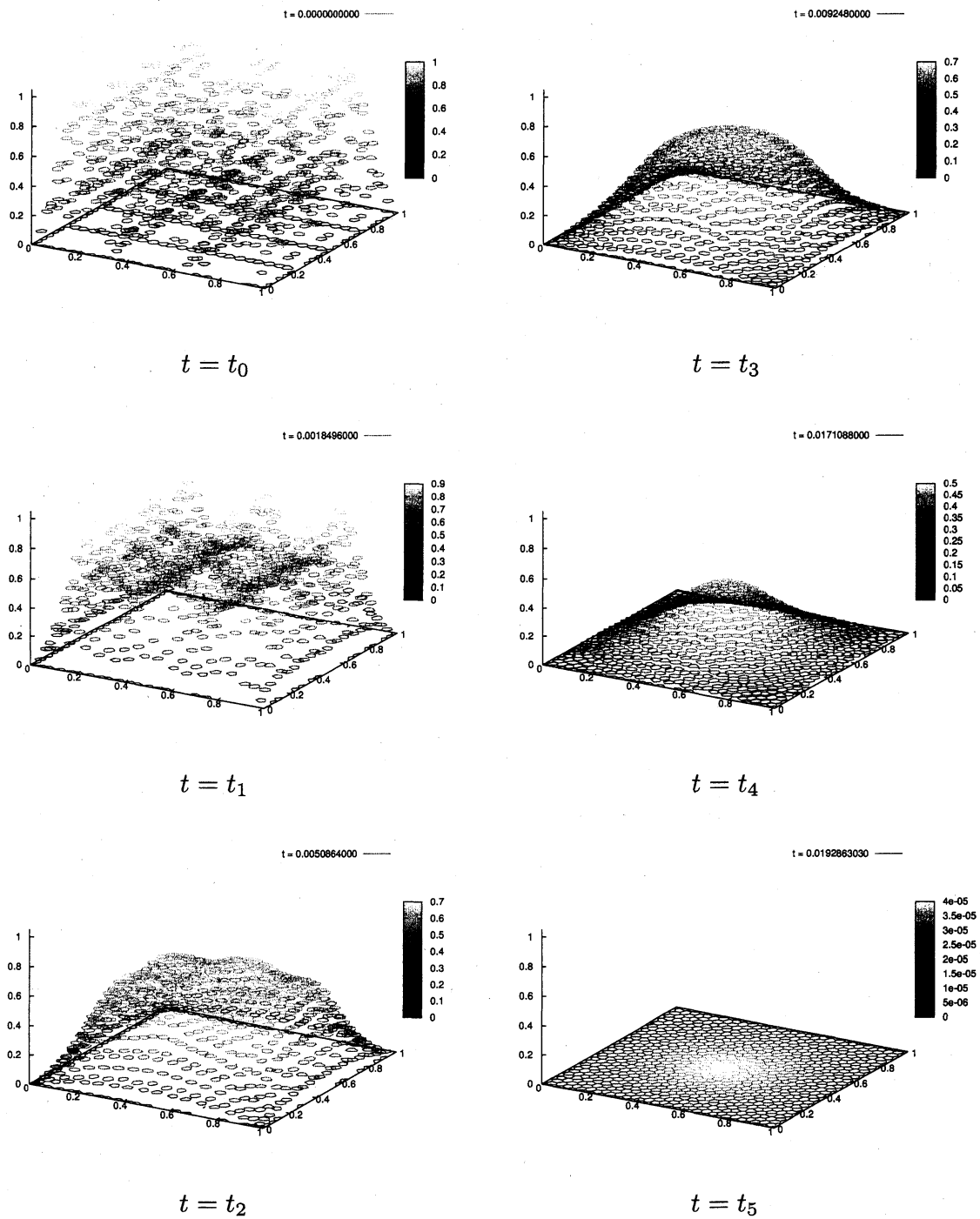


図6 初期値 $u_0(x, y) = |\sin(3\pi x) \sin(4\pi y)|$ に対するスキーム (26) の計算 ($0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 \approx T_*$). $p = 4$ の場合.

である限りにおいて (この不等式を満たす範囲なら, τ_n はどう選んでも良い. 特に, (33) を満たさなくても良い), (32) には, 一意な解 $\{v_h^k\}_{k=0}^n \subset V_h$ が存在し, さらに,

$$v_h^k \geq 0, \neq 0, \quad \|v_h^n\|_\infty \leq \|v_h^{n-1}\|_\infty \leq \cdots \leq \|v_h^0\|_\infty, \quad H_n \leq H_{n-1} \leq \cdots \leq H_0$$

を満たす.

定理 11. $0 \neq 0 \leq v_h^0 \in V_h$ とする. さらに, 正数の列 $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$ を,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k = \infty \quad (35)$$

を満たすものとし, (34) を満たす正の整数 n の存在を仮定する. このとき, 以下の (36)–(39) を満たすような離散消滅時刻

$$T^* = T^*(h, \tau, v_h^0) = \tau_1 + \cdots + \tau_N, \quad N = N(h, \tau, v_h^0) \geq n$$

が存在する:

$$v_h^1, v_h^2, \dots, v_h^N \in V_h \text{ は (32) の解;} \quad (36)$$

$$v_h^k \geq 0, \neq 0 \quad (1 \leq k \leq N-1), \quad v_h^k \equiv 0 \quad (k \geq N); \quad (37)$$

$$\lambda_p \frac{\|v_h^0\|_{p+1}^{p+1}}{a_h(v_h^0, v_h^0)} \leq T^* \leq \lambda_p C_1 \|v_h^0\|_{p+1}^{p-1}; \quad (38)$$

$$C_2 (T^* - t_n)^{\frac{1}{p-1}} \leq \|v_h^n\|_{p+1} \leq \left(\frac{T^* - t_n}{T^*} \right)^{\frac{1}{p-1}} \|v_h^0\|_{p+1}. \quad (39)$$

ただし, $C_1 = \tilde{C}_{p+1}^2 = 48(p+1)^2/\nu_1$, $C_2 = (p-1)/p \cdot \tilde{C}_{p+1}^{-2}$, $\lambda_p = p/(p-1)$.

補題 3 (離散 Sobolev の不等式 [5]). $2 \leq q < \infty$ に対して,

$$\|v_h\|_q \leq C_q a_h(v_h, v_h)^{1/2} \quad (v_h \in V_h), \quad C_q = 4q \sqrt{\frac{3}{\nu_1}},$$

が成り立つ.

定理 12. $0 \neq 0 \leq v_h^0 \in V_h$, $\{v_h^k\}_{k \geq 1} \subset V_h$ を (32) の解として, $U_{\tau, h} \in C([0, T]; V_h)$ を,

$$U_{\tau, h}(t) = \frac{(v_h^n)^p - (v_h^{n-1})^p}{\tau_n} (t - t_{n-1}) + (v_h^{n-1})^p \quad (t_{n-1} \leq t \leq t_n)$$

で定義する. このとき, 任意の $T > 0$ に対して,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_h(t) - U_{\tau, h}(t)\|_1 = 0$$

が成り立つ. ただし, $u_h(t) = S_h(t)u_{0, h}$ と書いている.

なお, (32) を用いて数値計算を行う際には, 各 $t = t_n$ で

$$\text{Find } v = v_h^n \in V_h \quad \text{s.t.} \quad \frac{p}{p-1} v \frac{v^{p-1} - \tilde{v}^{p-1}}{\tau_n} + L_h v = 0$$

の形の非線形方程式を解かねばならない. ただし, $\tilde{v} = v_h^{n-1} \in V_h$ と置いている. それには, Keller の単調スキーム ([8]) :

$$L_h v_k + \frac{p}{(p-1)\tau_n} (p \|\tilde{v}\|_\infty^{p-1} - \tilde{v}^{p-1}) v_k = \frac{p}{(p-1)\tau_n} (p \|\tilde{v}\|_\infty^{p-1} - v_{k-1}^{p-1}) v_{k-1} \quad (k \geq 1)$$

が便利である. 初期値は, $v_0 = \tilde{v}$ とすれば良い. 一般論より,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v - v_k\|_1 = 0$$

が保証されている.

参考文献

- [1] J. G. Berryman and C. J. Holland: *Stability of the separable solution for fast diffusion*, Arch. Rational Mech. Anal. **74** (1980) 379–388.
- [2] S. C. Brenner and L. R. Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 3rd edition, Springer, 2007.
- [3] H. Brezis and W. Strauss: *Semi-linear second-order elliptic equations in L^1* , J. Math. Soc. Japan, **25** (1973) 565–590.
- [4] M. G. Crandall and T. Liggett: *Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces*, Amer. J. Math., **93** (1971), 265–293.
- [5] R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin: *Finite Volume Methods*, Handbook of Numerical Analysis **VII** (2000) 713–1020, Elsevier.
- [6] H. Fujita, N. Saito, and T. Suzuki: *Operator Theory and Numerical Methods*, Elsevier, Amsterdam, 2001.
- [7] P. Grisvard: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston, 1985.
- [8] H. B. Keller: *Elliptic boundary value problems suggested by nonlinear diffusion process*, Arch. Rational Mech. Anal. **74** (1969) 363–381.
- [9] P. Knabner and L. Angermann: *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*, Springer, 2003.
- [10] M. N. Le Roux: *Semidiscretization in time for parabolic problems*, Math. Comp. **33** (1979) 919–931.
- [11] A. Mizutani, N. Saito and T. Suzuki: *Finite element approximation for degenerate parabolic equations. An application of nonlinear semigroup theory*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **39** (2005) 755–780.

- [12] A. Mizutani, N. Saito and T. Suzuki: *Analysis of the finite volume approximation for $u_t - \Delta f(u) = 0$* , in preparation.
- [13] R. H. Nochetto and G. Savaré: *Nonlinear evolution governed by accretive operators in Banach spaces: error control and applications*, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **16** (2006) 439–477.

齊藤 宣一

(SAITO, Norikazu)

東京大学大学院数理科学研究科

153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1

`norikazu @ ms.u-tokyo.ac.jp`

2012 年 6 月 9 日