

ON THE ENUMERATION OF CERTAIN EDGE-COLORED GRAPHS

近畿大学理工学部 大野泰生 (YASUO OHNO)  
 DEPT. OF MATH., KINKI UNIVERSITY

ABSTRACT. 色の巡回置換の作用下で同型となる辺着色グラフの数え上げについて, これまでの経緯と結果を述べる。

1. INTRODUCTION

頂点数  $n$  の単色グラフ (多重辺やループを許さない) において, 辺をすべて消去し, 辺の無かった 2 頂点間を新たに辺で結ぶことで, 元のグラフの補グラフが得られる。補グラフが元のグラフと同型であるようなグラフのことを, 自己補グラフと呼ぶ。例えば, Figure 1 は  $n = 4$  すなわち 4 頂点の単色グラフの同型類の代表元のリストであるが, 0 と 6, 1 と 5, 2-1 と 4-2, 2-2 と 4-1, 3-1 と 3-3 が各々互いに補グラフの関係になっている。すなわち, 上述でペアになっている 2 つのグラフを重ねると, 辺の重複無しに完全グラフが得られる。そして, この場合唯一相手が存在しない 3-2 のグラフについては, 90 度回転させて 3-2 自身と重ねることで, 完全グラフが得られる。つまり 3-2 は自己補グラフなのである。

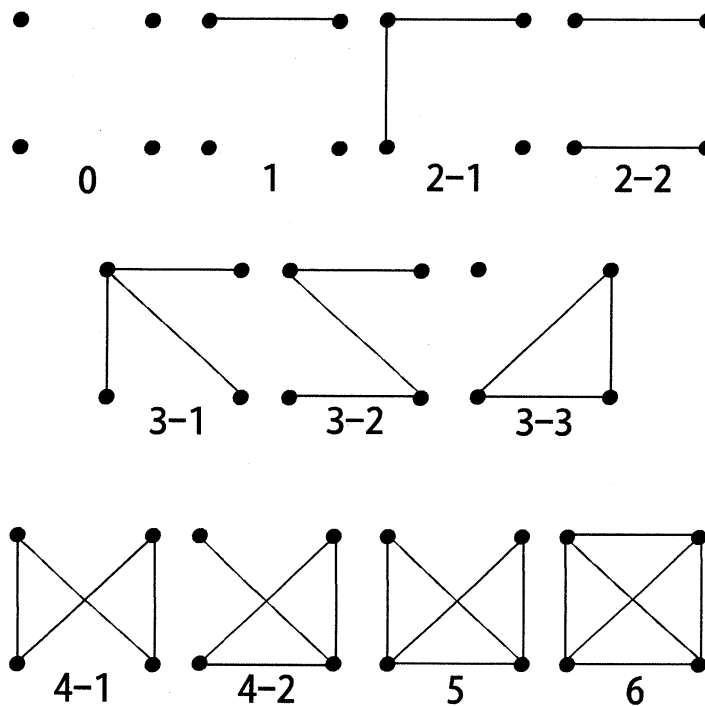


FIGURE 1

自己補グラフの数え上げには Read などによるいくつかの重要な研究成果が知られているが、今回は自己補グラフの個数に関する Royle の予想を軸に研究を進展させた。

Royle は 2001 年に、 $n$  頂点の自己補グラフの個数は、 $n$  頂点で辺数が偶数のグラフの個数と奇数のグラフの個数の差である、とする予想を述べた。この予想を聞くと単純に、自己補でないグラフについて元のグラフとその補グラフが互いに異符号で足し算されているのだろう、というイメージを持たれるかもしれない。 $n$  の値によってはその感覚が正しい場合もあるが、実は重要な場面においてそれは錯覚であると判る。

再び Figure 1 に戻ろう。 $n = 4$  の場合、先ほども述べたとおり、0 と 6, 1 と 5, ... が各々互いに補グラフになっており、すなわち偶数辺のグラフの補グラフは偶数辺であり、奇数辺のグラフの補グラフは奇数辺である。つまり Royle の予想に従って自己補グラフを算出しようとすると、元のグラフとその補グラフは互いに同符号で加算されてしまう。しかしながら、Royle の予想するとおり

$$1 - 1 + 2 - 3 + 2 - 1 + 1 = 1$$

となって、唯一の自己補グラフ 3-2 の個数を言い当てている。

この Royle の予想は、2009 年の中本-白倉-田澤の論文 ([2]) において肯定的に解決された。我々はこの関係式の辺着色グラフへの拡張に取り組む。

### 2. MAIN THEOREM

任意の自然数  $r$  に対し、 $\zeta_r = \exp\left(\frac{2\pi i}{r}\right)$  とし、 $Z = \{\zeta_r, \zeta_r^2, \dots, \zeta_r^r = 1\}$  を相異なる  $r$  個の色の集合と解釈する。上述の  $Z$  の色で辺着色した  $n$  頂点グラフ全体の集合を  $K_n^{(r)}$  で表す。

色の巡回置換  $\sigma$  を

$$\sigma = \begin{pmatrix} \zeta_r & \zeta_r^2 & \dots & \zeta_r^{r-1} & \zeta_r^r \\ \zeta_r^2 & \zeta_r^3 & \dots & \zeta_r^r & \zeta_r \end{pmatrix}$$

で定義する。 $r$  色完全グラフ  $f \in K_n^{(r)}$  に対して  $\sigma$  を作用させると、 $f$  のすべての辺の色を各々  $\sigma$  で置換して得られるグラフ  $\sigma f$  となる。 $r$  色完全グラフ  $f \in K_n^{(r)}$  が  $\sigma f = f$  を満たすとき、 $f$  を巡回自己同型グラフと呼び、 $K_n^{(r)}$  に含まれる巡回自己同型グラフの個数を  $sc^{(r)}(n)$  で記す:

$$sc^{(r)}(n) = \# \{f \in K_n^{(r)} \mid \sigma f = f\}.$$

グラフ  $f$  の  $\zeta_r^s$  で着色された辺の個数を  $q_s(f)$  で記すとき、以下が成立する。

THEOREM 2.1. 自然数  $r, n$  に対し次が成立する:

$$sc^{(r)}(n) = \sum_{f \in K_n^{(r)}} \zeta_r^{q_1(f) + 2q_2(f) + \dots + rq_r(f)}.$$

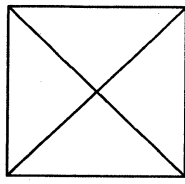
REMARK 2.2. 中本-白倉-田澤の論文 [2] により解決された Royle の予想は、上述の定理の  $r = 2$  の場合に該当する。

### 3. EXAMPLE AND REMARK

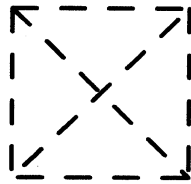
この節では  $n = 4, r = 3$  の場合の  $K_4^3$  の元をすべて書き出し、定理の主張を確認する。ここで  $---$  を  $\zeta_3$ ,  $-----$  を  $\zeta_3^2$ ,  $————$  を  $\zeta_3^3$  で着色された辺とし、各グラフの下に書かれている値の意味は次の通りである:

$$(q_3(f), q_1(f), q_2(f)) \quad \zeta_3^{q_1(f) + 2q_2(f) + 3q_3(f)}.$$

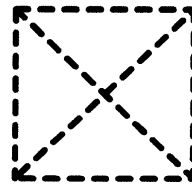
$K_4^3$  の元は以下の 66 通りである。



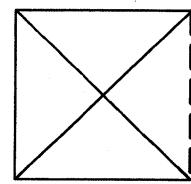
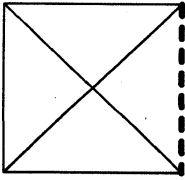
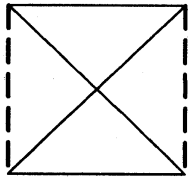
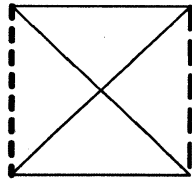
(6, 0, 0) 1



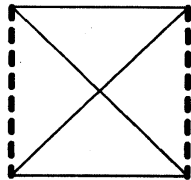
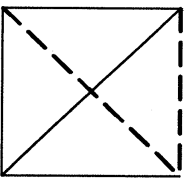
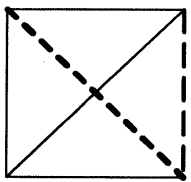
(0, 6, 0) 1



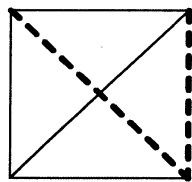
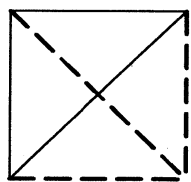
(0, 0, 6) 1

(5, 1, 0)  $\xi$ (5, 0, 1)  $\xi^2$ (4, 2, 0)  $\xi^2$ 

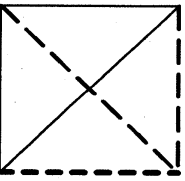
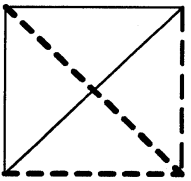
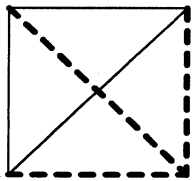
(4, 1, 1) 1

(4, 0, 2)  $\xi$ (4, 2, 0)  $\xi^2$ 

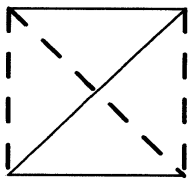
(4, 1, 1) 1

(4, 0, 2)  $\xi$ 

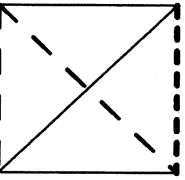
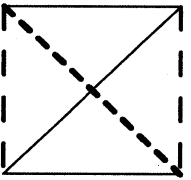
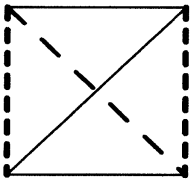
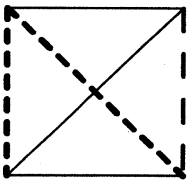
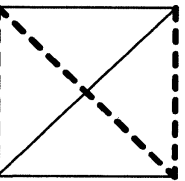
(3, 3, 0) 1

(3, 2, 1)  $\xi$ (3, 1, 2)  $\xi^2$ 

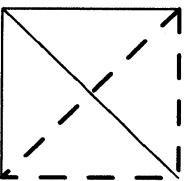
(3, 0, 3) 1



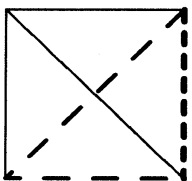
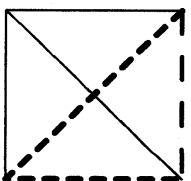
(3, 3, 0) 1

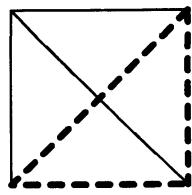
(3, 2, 1)  $\xi$ (3, 2, 1)  $\xi$ (3, 1, 2)  $\xi^2$ (3, 1, 2)  $\xi^2$ 

(3, 0, 3) 1

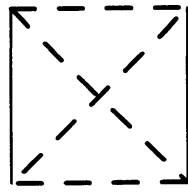


(3, 3, 0) 1

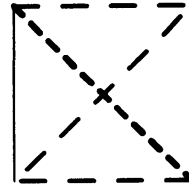
(3, 2, 1)  $\xi$ (3, 1, 2)  $\xi^2$



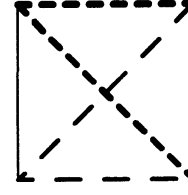
(3, 0, 3) 1



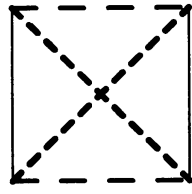
(2, 4, 0)  $\xi$



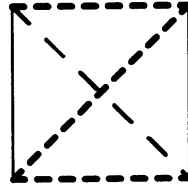
(2, 3, 1)  $\xi^2$



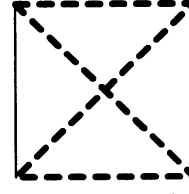
(2, 2, 2) 1



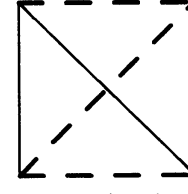
★(2, 2, 2) 1



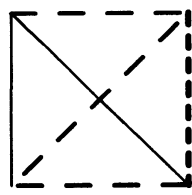
(2, 1, 3)  $\xi$



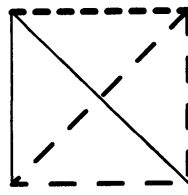
(2, 0, 4)  $\xi^2$



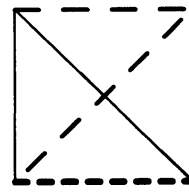
(2, 4, 0)  $\xi$



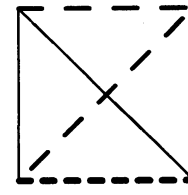
(2, 3, 1)  $\xi^2$



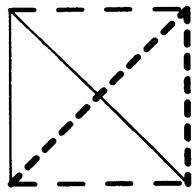
(2, 3, 1)  $\xi^2$



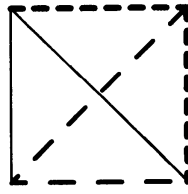
(2, 3, 1)  $\xi^2$



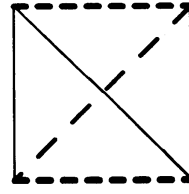
★(2, 2, 2) 1



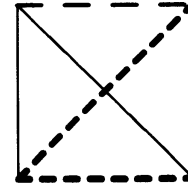
(2, 2, 2) 1



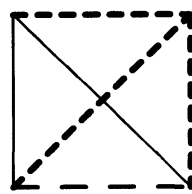
★(2, 2, 2) 1



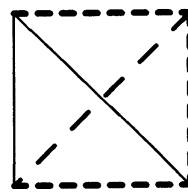
(2, 2, 2) 1



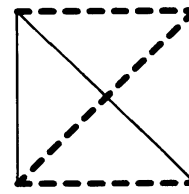
(2, 1, 3)  $\xi$



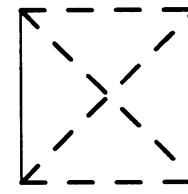
(2, 1, 3)  $\xi$



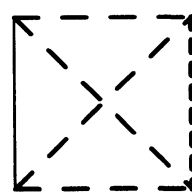
(2, 1, 3)  $\xi$



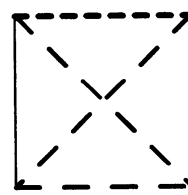
(2, 0, 4)  $\xi^2$



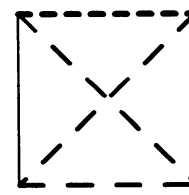
(1, 5, 0)  $\xi^2$



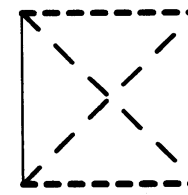
(1, 4, 1) 1



(1, 4, 1) 1



(1, 3, 2)  $\xi$



(1, 3, 2)  $\xi$

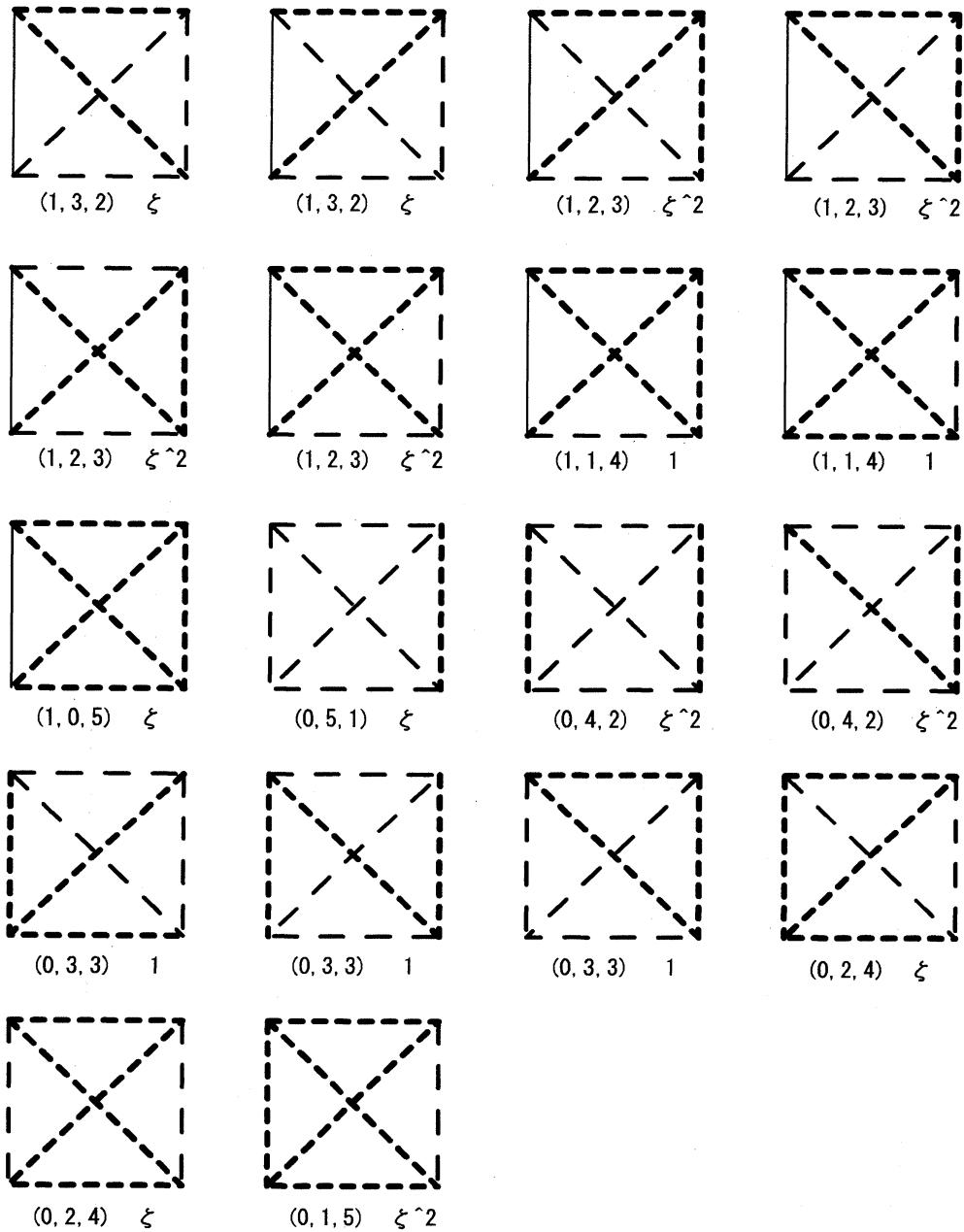


FIGURE 2

以上のように、66個の  $K_4^3$  の元のうち、 $\zeta^{q_1(f)+2q_2(f)+3q_3(f)}$  の値が1のグラフが24個、 $\zeta$  のグラフが21個、 $\zeta^2$  のグラフが21個であるから、定理の右辺の値は、

$$24 \cdot 1 + 21 \cdot \zeta + 21 \cdot \zeta^2 = 3$$

となる。実際、★印を付けた3つのグラフが巡回自己同型であり、 $sc^{(3)}(4) = 3$ なので、右辺の値と一致している。

REMARK 3.1. ここでは通常の辺着色グラフの場合について述べたが、小畑-大野の共同研究 [1] により、同様の関係式が、辺着色された 2 部グラフ、有向グラフ、 $h$ -ハイパーグラフ等の場合にも成立することが明らかになっている。

#### ACKNOWLEDGEMENT

講演機会をくださった本研究集会の主催者の皆さまに感謝を申し上げます。

#### REFERENCES

- [1] K. Kobata and Y. Ohno, *Edge colored complete graphs and a generalization of self-complementarity*, submitted.
- [2] A. Nakamoto, T. Shirakura and S. Tazawa, *An alternative enumeration of self-complementary graphs*, *Utilitas Mathematica* 80 (2009) 25-32.
- [3] Y. Ohno, *A generalization of self-complementarity for edge colored graphs*, preprint.
- [4] M. Ueno and S. Tazawa, *Enumeration of bipartite self-complementary graphs*, preprint.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KINKI UNIVERSITY KOWAKAE 3-4-1 HIGASHIOSAKA-SHI 577-8502 OS-  
AKA JAPAN.

*E-mail address:* ohno@math.kindai.ac.jp