数理解析研究所講究録
第1811巻 2012年 141-154

コンパクトGelfand対の等質空間上のデザイン

奥田隆幸 (東京大学大学院数理科学研究科)

1 序

P. Delsarte, J. Goethals, J. Seidel [6] によって展開された球面上の Delsarte 理論として知られている球面デザインと球面上の符号の関係を, より一般の等質空間上の点配置の理論に拡張したい.

これまでに知られている結果としては. まず球面上の理論と平行する形でランク1のコンパクト対称空間上で Delsarte 理論が展開されることが, 坂内英一, S. G. Hoggar の80年代の仕事を通じて知られている [4]. 高いランクのコンパクト対称空間については, 2000年代前半に C. Bachoc, R. Coulangeon, G. Nebe, 坂内英一らにより, 実グラスマン多様体上のデザインと符号の定義が与えられ, Fisher 型不等式とその等号成立条件が求められている [2, 3]. その後, 実グラスマン多様体の場合と並行する形で, 複素グラスマン多様体, 及びユニタリ群上のデザイン, 符号の定義が与えられている [8, 9]. 特に A. Roy による複素グラスマン多様体についての研究では, 球面などランク1対称空間の場合に比べると弱い主張であるものの, 点配置にアソシエーションスキームが付随するための十分条件も求められている. また2011年には, A. Roy–須田庄 [10] によって複素球面 ($:= \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| = 1\}$; 対称空間ではない) 上のデザインと符号の定義が与えられ, Delsarte 理論が展開されている.

本報告では一般のコンパクト等質空間 G/K においてデザインと符号の定義を与え, Fisher 型不等式とその等号成立条件, また点配置にアソシエーションスキームが付随するための十分条件を紹介する.

2 コンパクト等質空間上のデザインと符号

本報告では, 常に G はコンパクト (ハウスドルフ) 位相群, K は G の閉部分群を表すこととする. この節では, コンパクト等質空間 G/K 上のデザインと符号の定義を与える.

2.1 G/K 上のデザイン

コンパクト等質空間 G/K 上の複素数値連続関数全体の集合を $C(G/K)$ と書くことにする. G/K 上には左 G-不変 Haar 測度が定数倍を除いて一意に存在することが知られている. そのような左 G-不変 Haar 測度 μ を一つ固定すれば, G/K 上の任意の連続関数 f に対して

$$f \text{ の } G/K \text{ 上の平均} := \frac{1}{|G/K|}\int_{\omega \in G/K} f(\omega)d\mu(\omega) \quad (\in \mathbb{C})$$

が定義される. ここで $|G/K|$ は測度 μ についての G/K の体積としている. このように定義した f の平均は μ の取り方に依らないことに注意しておこう.

G は関数空間 $C(G/K)$ に自然に作用するが, $C(G/K)$ の部分空間 V が G の作用で閉じているとき, V を $C(G/K)$ の G-部分表現と呼ぶことにしよう. 本報告では, V としては専ら有限次元のものを扱う.

等質空間 G/K の有限部分集合 X について, X 上の関数全体の空間を

$$C(X) := \mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$$

と書くことにする. また任意の $\mathfrak{f} \in C(X)$ に対して,

$$\mathfrak{f} \text{ の } X \text{ 上の平均} := \frac{1}{|X|}\sum_{x \in X} \mathfrak{f}(x)$$

と定義する. 更に, G/K 上の関数 $f \in C(G/K)$ についても,

$$f \text{ の } X \text{ 上の平均} := \frac{1}{|X|}\sum_{x \in X} f(x)$$

と定義しよう. つまり "f の X 上の平均" を "$f|_X(\in C(X))$ の X 上の平均" として定めた.

G/K 上の有限部分集合 X と $C(G/K)$ の有限次元 G-部分表現 V に対して, "X が G/K 上の V-デザイン" ということを以下で定義しよう:

Definition 2.1 (G/K 上のデザイン). X を G/K の空でない有限部分集合とし, V を $C(G/K)$ の有限次元 G-部分表現とする. このとき, X が V-デザインであるということを, 任意の $f \in V$ について, 次の等式

$$f \text{ の } X \text{ 上の平均} = f \text{ の } G/K \text{ 上の平均}$$

が成り立つこととする.

この定義から次のことがすぐに分かる:

Fact 2.2. X を G/K の空でない有限部分集合とし, V を $C(G/K)$ の有限次元 G-部分表現とする.

- X が G/K 上の V-デザインであるなら, 任意の $g \in G$ に対して, gX もまた V-デザインである.
- G/K が有限集合であるとき, $X = G/K$ とすれば, どんな V に対しても X は G/K 上の V-デザインである.

ここで定義したデザインの概念が球面デザインや組合せデザインの一般化になっていることを Section 3 で確認する.

2.2 G/K 上の符号

G/K 上の符号の定義を述べるため, いくつか記号を準備しておこう.

まず, 直積空間 $G/K \times G/K$ の G の対角作用についての商空間を, ここでは $[G/K]$ と書く事にする. つまり, $G/K \times G/K$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$(\omega, \omega') \sim (g\omega, g\omega') \quad (\omega, \omega' \in G/K,\ g \in G),$$

で定義し, その同値類の集合に商位相を入れたものとして $[G/K]$ を定義する (一般に, $[G/K]$ には自然な多様体構造は入らないことを注意しておく). ここで, 商写像を $\mathcal{A} : G/K \times G/K \to [G/K]$ と書くと, 任意の $\omega, \omega' \in G/K$ に対して,

$$\mathcal{A}(\omega, \omega) = \mathcal{A}(\omega', \omega')$$

が成り立つ. そこで,

$$\mathbf{1}_{[G/K]} := \mathcal{A}(\omega, \omega) \in [G/K] \quad (\omega \in G/K).$$

と置いておく.

等質空間 G/K の K 作用についての商空間を $K\backslash G/K$ と置けば, 先に定義した空間 $[G/K]$ と $K\backslash G/K$ は自然に同一視できる. つまり, 次の写像は (位相空間の間の) 同相である:

$$[G/K] \to K\backslash G/K, \quad \mathcal{A}(gK, g'K) \mapsto Kg^{-1}g'K.$$

いま, G は連続関数の空間 $C(G/K)$ に自然に作用するのであったが, その制限として, K の $C(G/K)$ への作用を考えよう. 連続関数 $f_0 \in C(G/K)$ がこの K-作用で不変であるとき, K-spherical であるという. K-spherical な G/K 上の連続関数 f_0 に対して, f_0 が誘導する $[G/K] \simeq K\backslash G/K$ 上の連続関数を $\tilde{f}_0$ と書くことにしよう. つまり,

$$\tilde{f}_0(\mathcal{A}(\omega,\omega')) := f_0({g_\omega}^{-1}\omega') \quad (\text{for } \omega,\omega' \in G/K \text{ with } \omega = g_\omega K,\ g_\omega \in G)$$

によって, $[G/K]$ 上の関数 $\tilde{f}_0$ を定義する.

また, G/K の有限部分集合 X に対して, $[G/K]$ の有限部分集合 $\mathcal{A}'(X)$ を

$$\mathcal{A}'(X) := \{\, \mathcal{A}(x,y) \in [G/K] \mid x,y \in X \,\}$$

と定義する. 特に

$$\mathcal{A}'(X) = \mathbf{1}_{[G/K]} \sqcup \{\, \mathcal{A}(x,y) \mid x,y \in X \text{ with } x \neq y \,\}$$

が分かる.

以上の言葉を用いて, G/K 上の符号の定義を述べよう:

Definition 2.3 (G/K 上の F-符号, V-符号)**.** X を G/K の空でない有限部分集合とし, F を $[G/K]$ 上の連続関数としよう. このとき, X が G/K 上の F-符号であるということを, 等式

$$F(\mathcal{A}(x,y)) = |X|\delta_{xy} \quad (\text{for any } x,y \in X),$$

が成り立つこととして定義する (ただし δ_{xy} はクロネッカーデルタとしている). また, $C(G/K)$ の有限次元 G-部分表現 V に対して, X が G/K 上の V-符号であるということを, ある "K-spherical な G/K の関数 f_0 であって, $f_0 \in V$ かつ X が G/K 上の $\tilde{f}_0$-符号となるもの" が存在することとして定義する.

この符号の定義は, X そのものではなく $\mathcal{A}'(X)$ に依存していることを注意してこう.

定義からすぐに次のことが分かる:

Fact 2.4. X を G/K の空でない有限部分集合とし, V を $C(G/K)$ の有限次元 G-部分表現とする.

- X が G/K 上の V-符号であるなら, 任意の $g \in G$ に対して gX もまた V-符号である.

- G/K が有限集合であるとき, $C(G/K)$ は有限次元であり, $V = C(G/K)$ とすれば, どんな X も G/K 上の V-符号である.

ここで定義した符号の概念が球面上の距離集合の概念の一般化になっていることを Section 3 で確認する.

3 球面デザインと組合せデザイン

(G,K) 及び V を適切に選ぶことによって, 球面デザインと組合せデザインを "G/K 上の V-デザイン" として表そう.

3.1 球面デザイン

$(G,K) = (O(d+1), O(d))$ のとき, 等質空間 G/K は d-次元単位球面 S^d と同一視される. ここで, $S^d(\simeq G/K)$ 上の l-次斉次な球面調和多項式全体の空間を $\mathrm{Harm}_l(S^d)$ と書くことにしよう. 各 $l = 0, 1, \ldots$ に対して $\mathrm{Harm}_l(S^d)$ は $G = O(d+1)$ の既約表現であり, S^d 上の連続関数全体の空間 $C(S^d)$ の中で $\bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathrm{Harm}_l(S^d)$ は稠密であることが知られている (Peter–Weyl の定理).

以下では X を $S^d \simeq G/K$ の空でない有限部分集合とし, 自然数 t に対して, $V_t := \bigoplus_{l=0}^{t} \mathrm{Harm}_l(S^d)$ とする.

ここで定義からすぐに次のことが分かる:

Proposition 3.1. 次の (X,t) についての条件は互いに同値である:

1. *X は G/K 上の V_t-デザイン.*
2. *X は球面 t-デザイン.*

またこの場合,

$$K \backslash G/K \simeq [-1,1]$$

(ここで $[-1,1]$ は閉区間 $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ の意味で用いた) であり, 任意の二元 $\omega, \omega' \in S^d \simeq G/K$ に対して,

$$\mathcal{A}(\omega, \omega') = \langle \omega, \omega' \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$$

(ただし $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$ は $\mathbb{R}^{d+1}$ の標準内積としている) に他ならない. 従って, $\mathcal{A}'(X)$ は X の内積集合に 1 を付け加えたものである.

更に, よく知られているように, 各 l に対して, $\mathrm{Harm}_l(S^d)$ 中の $O(d)$-spherical 関数 (つまり帯球関数) 全体の空間は一次元であり, $O(d)$-spherical

な連続関数 $f \in \mathrm{Harm}_l(S^d)$ に対して, f_0 の誘導する $[-1,1] \simeq K\backslash G/K$ 上の連続関数は l-次の Gegenbauer 多項式の定数倍である.

これらのことから, 次の命題も分かる.

Proposition 3.2. 次の (X,t) についての条件は互いに同値:

1. X は G/K 上の V_t-符号.
2. $\mathcal{A}'(X) \subset [-1,1]$ は t-次以下の正規零化多項式を持つ. すなわち t-次以下の一変数多項式 F であって, $\mathcal{A}'(X)$ 上では零であり, $F(1)=1$ となるものが存在する.
3. $|\mathcal{A}'(X)| \leq t$.

Remark 3.3. この命題における最後の条件 $|\mathcal{A}'(X)| \leq t$ とその他の条件の同値性については, G/K がランク 1 のコンパクト対称空間であること (言い換えると $K\backslash G/K$ が一次元的であること) が本質的に用いられている. 一般の (G,K) については, X が G/K 上の V-符号であるような場合に, これに対応する $\mathcal{A}'(X)$ の上からの評価については今のところよく分っていない. ただし後で紹介するように, X が V-符号なら $|X| \leq \dim_{\mathbb{C}} V$ であるから,

$$|\mathcal{A}'(X)| \leq |X|^2 - |X| \leq (\dim_{\mathbb{C}} V)(\dim_{\mathbb{C}} V - 1)$$

という (非常に荒い) 上からの評価はできる. また, これも後で紹介するように, X が G/K 上の $V \cdot V^-$-デザインである場合には,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_G(V) \leq |\mathcal{A}'(X)|$$

という下からの評価も得られる.

3.2 組合せデザイン

n 点集合 Ω を一つ固定し, $0 \leq k \leq n$ に対して,

$$\Omega_k := \{\, b \subset \Omega \mid |b| = k \,\}$$

と書くことにしよう. n-次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の Ω への作用も一つ固定しておくと, この作用は $\mathfrak{S}_n$ の Ω_k への推移的な作用を誘導する. 従って, Ω_k は $\mathfrak{S}_n$ の等質空間として,

$$\Omega_k \simeq \mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$$

と書ける.

以下では X を $\Omega_k \simeq G/K$ の空でない有限部分集合とする. X が組合せ t-デザインであるとは, 任意の $a \in \Omega_t$ (つまり a は Ω の t-点部分集合) に対して,

$$|\{x \in X \mid a \subset x\}|$$

を考えたとき, これが $a \in \Omega_t$ によらずに一定となることであった. この組合せ t-デザインを $\Omega_k \simeq \mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$ 上のデザインの言葉で言い換えよう.

Ω_t 上の関数空間 $C(\Omega_t)$ から Ω_k 上の関数空間 $C(\Omega_k)$ への写像

$$\Phi : C(\Omega_t) \to C(\Omega_k), \quad \psi \mapsto \Phi(\psi)$$

$$\Phi(\psi)(b) := \sum_{a \subset b,\ a \in \Omega_t} \psi(a) \quad (\text{for any } b \in \Omega_k)$$

を考える. ここで, $V_t := \Phi(C(\Omega_t))$ と書くことにすると, V_t は $C(\Omega_k)$ の有限次元 $\mathfrak{S}_n$-部分表現である.

このとき, 組合せデザインの定義をうまく書き換えることにより, 次の同値性が証明できる.

Proposition 3.4. (X, t) に対する次の条件は同値である:

1. X は $\Omega_k \simeq \mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$ 上の V_t-デザインである.
2. X は組合せ t-デザインである.

3.3 コンパクト Gelfand 対の等質空間

コンパクト (ハウスドルフ) 群 G とその閉部分群 K に対して, $C(G/K)$ への G への表現が無重複である, すなわち G の任意の既約表現の $C(G/K)$ における重複度が必ず 1 以下であるとき, (G, K) は Gelfand 対であると言う.

この節で上に挙げた二つの例 $(G.K) = (O(d+1), O(d))$, $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$ はいずれも Gelfand 対である. その他にも, G が連結で (G, K) が対称対なら (G, K) が Gelfand 対になることは良く知られている. 従って, $(G, K) = (SO(n), S(O(k) \times O(n-k)))$ などの場合も Gelfand 対であり, この場合 G/K は実グラスマン多様体である.

後でコンパクト等質空間 G/K の有限部分集合 X にアソシエーションスキームが付随するための十分条件を紹介する (Theorem 4.4) が, ここで付随するアソシエーションスキームは一般には非可換である. しかし, (G, K) が Gelfand 対である場合には, このアソシエーションスキームは可換になる.

4 主結果

この節では次の設定を考える:

Setting 4.1. G はコンパクト(ハウスドルフ)位相群で, K はその閉部分群とする. また, X は等質空間 G/K の空でない有限部分集合で, V は G/K 上の連続関数の空間 $C(G/K)$ の有限次元 G-部分表現であるとする.

この節では, 本報告の主定理として, 以下の三つのことに関する命題を紹介する.

- X はいつ V-デザインになるか?
- Fisher 型不等式に相当するものは何か?
- X にアソシエーションスキームが付随するための条件は何か?

ここで紹介する命題は, 球面上の Delsarte 理論を始めとした, これまでに研究されてきた各種等質空間上の Delsarte 理論の一部を一般化したものである.

4.1 V-デザインの必要十分条件

設定 4.1 において, X が G/K 上の V-デザインであるための必要十分条件を述べたい.

まず, V の G-表現としてのある分解

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$$

を考える. すると, V-デザインの定義から, X が G/K 上の V-デザインであることと, 各 $i = 0, \ldots, m$ に対して, X が G/K 上の V_i-デザインであることは同値である. 従って, V が既約である場合について, X が V-デザインであるための条件を述べればよい.

まず, V が G の自明表現である場合には, X は自動的に G/K 上の V-デザインである. そこで, V が自明でない既約表現である場合について考えたい. 以下ではそのような場合において, X が V-デザインであるための必要十分条件を命題としてまとめた. (以下の命題においては, 記号の混乱を避けるため, V の替わりに W を用いた.)

Proposition 4.2. 設定 4.1 において, W を $C(G/K)$ の自明でない既約有限次元 G-部分表現であるとする. このとき, 以下の (X, W) についての条件は互いに同値である:

1. X は G/K 上の W-デザイン.

2. 任意の $f \in W$ に対して,

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0.$$

3. 任意の *K-spherical* な $f_0 \in W$ に対して,

$$\sum_{x,y \in X} \tilde{f}_0(\mathcal{A}(x,y)) = 0,$$

ただしここで $\tilde{f}_0$ は f_0 が誘導する $[G/K]$ 上の連続関数としている(記号については *Section* 2.2 を参照).

4.2 Fisher 型不等式

設定 4.1 において,

$$V^- := \{ \overline{f} \mid f \in V \}, \quad V \cdot V^- := \mathbb{C}\text{-span}\{ f \cdot \overline{f'} \mid f, f' \in V \}$$

と定めよう. ただし $\overline{f}$ は G/K 上の複素数値関数 f の複素共役としている. このとき, V^- と $V \cdot V^-$ は $C(G/K)$ の有限次元 G-部分表現である.

我々の設定における Fisher 型の不等式を以下で述べよう.

Theorem 4.3 (Fisher 型不等式). 設定 4.1 において, 次のことが成り立つ:

1. X が G/K 上の $V \cdot V^-$-デザインであるとする. このとき, 次の不等式

$$|X| \geq \dim_{\mathbb{C}} V$$

が成り立つ. 特にこのとき, この不等式の等号が成立することと, X が G/K 上の V-符号であることは同値である.

2. X が G/K 上の V-符号であるとする. このとき, 次の不等式

$$|X| \leq \dim_{\mathbb{C}} V$$

が成り立つ. 特にこのとき, この不等式の等号が成立することと, X が G/K 上の $V \cdot V^-$-デザインであることは同値である.

4.3 アソシエーションスキーム

設定 4.1 を考えよう．以下で $\mathfrak{X} := (X, \{R_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}'(X)})$ がアソシエーションスキームとなるための十分条件を与えよう．ここでのアソシエーションスキームとしては, 一般には非可換なものも想定していることを注意しておく．

まず, 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(X)$ に対して, X 上の二項関係 R_α を

$$R_\alpha := \{\,(x,y) \in X \times X \mid \mathcal{A}(x,y) = \alpha\,\} \quad (\alpha \in \mathcal{A}'(X))$$

で定める．すると, $X \times X$ の分割

$$X \times X = \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}'(X)} R_\alpha$$

が得られる．

また, V 上の G-絡作用素全体の集合を $\mathrm{End}_G(V)$ と書くことにする．つまり

$$\mathrm{End}_G(V) := \{\, A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \mid g \circ A = A \circ g \quad (\text{for any } g \in G)\,\}$$

とする．もし, V が G の無重複表現なら, Schur の補題から

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_G(V) = V \text{ 中の既約 } G\text{-表現の数}$$

となる．

次の定理は, X にアソシエーションスキームが付随するための十分条件を与える:

Theorem 4.4. 設定 4.1 において, X が G/K 上の $V \cdot V^-$-デザインであるとする．このとき, 以下の事が成り立つ:

1. このとき,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_G(V) \le |\mathcal{A}'(X)|$$

である．特に V が G の無重複表現であるなら,

$$V \text{ 中の既約 } G\text{-表現の数} \le |\mathcal{A}'(X)|$$

となる．

2. 上の不等式の等号が成立している，すなわち $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_G(V) = |\mathcal{A}'(X)|$ が成り立っているとしよう．このとき，$\mathfrak{X} = (X, \{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}'(X)})$ はアソシエーションスキームである．更に，このアソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ が可換であることと，V が G の表現として無重複であることは同値である．また，この場合には X は G/K 上の V-符号であり，特に $|X| = \dim_{\mathbb{C}} V$ でなければならない．

3. 等式 $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_G(V) = |\mathcal{A}'(X)| - 1$ と "X が G/K 上の V-符号では無い" ということを仮定しよう．このとき，$\mathfrak{X} = (X, \{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}'(X)})$ はアソシエーションスキームである．更に，このアソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ が可換であることと，V が G の表現として無重複であることは同値である．

Remark 4.5. (G, K) が *Gelfand* 対であるとき，$C(G/K)$ の G-部分表現 V は必ず無重複であるから，上の定理によって付随するアソシエーションスキームは必ず可換になる．

5　コンパクト群上のデザインの例

G_0 をコンパクト（ハウスドルフ）群とする．このとき，$G_0 \times G_0$ もまたコンパクト群であり，

$$\Delta G_0 := \{ (g, g) \in G_0 \times G_0 \mid g \in G_0 \}$$

は $G_0 \times G_0$ の閉部分群となる．群 $G_0 \times G_0$ は G_0 に両側からの積によって推移的に作用し，G_0 の単位元における固定化部分群が ΔG_0 である．従って，

$$G_0 \simeq (G_0 \times G_0)/\Delta G_0$$

となる．この節では，G_0 をコンパクト等質空間 $(G_0 \times G_0)/\Delta G_0$ とみなし，この空間上のデザインの例を紹介しよう．

5.1　コンパクト群の有限部分群によるデザイン

G_0 の有限部分群 Γ がデザインになるための条件を紹介しよう．

まず，$(G_0 \times G_0, \Delta G_0)$ は Gelfand 対である．すなわちコンパクト群 G_0 上の関数空間 $C(G_0)$ に $G_0 \times G_0$ が両側正則表現として作用するが，この表現

は無重複である．より詳しくは，$C(G_0)$ の任意の有限次元 $G_0 \times G_0$-部分表現 V は，G_0 の既約表現のある有限集合 $\{U_0, \ldots, U_t\}$ を用いて

$$V \simeq \bigoplus_{i=l}^{t} (U_l \boxtimes U_l{}^-)$$

(ただし，$U_l \boxtimes U_l{}^-$ は G_0 の既約表現 U_l とその共役表現 $U_l{}^-$ の外部テンソルであり，$G_0 \times G_0$ の既約表現となる) の形で既約分解されることが知られている．

G_0 の有限部分群 Γ を $(G_0 \times G_0)/\Delta G_0$ の部分集合とみなしたとき，これがデザインになるための条件は次のようになる:

Proposition 5.1. Γ をコンパクト群 G_0 の有限部分群とする．また，V を $C(G_0)$ の有限次元 $(G_0 \times G_0)$-部分表現とし，その既約分解が

$$\bigoplus_{i=l}^{t} (U_l \boxtimes U_l^-) \quad (U_l \in \widehat{G_0})$$

(ただし $\widehat{G_0}$ は G_0 の既約表現の同値類の集合) と書けているとする．このとき，次の (Γ, V) についての条件は同値である:

1. Γ は $G_0 \simeq (G_0 \times G_0)/\Delta G_0$ 上の V-デザインである．
2. 任意の $i = 0, \ldots, m$ に対して，$U_i^G = U_i^\Gamma$.

特に $G_0 = O(d+1)$ とし

$$V_t := \bigoplus_{l=0}^{t} (\mathrm{Harm}_l(S^d) \boxtimes \mathrm{Harm}_l(S^d)^-)$$

とおけば，$O(d+1)$ の有限部分群 Γ が $O(d+1) \simeq (O(d+1) \times O(d+1))/\Delta O(d+1)$ 上の V_t-デザインであることと，Γ が $O(d+1)$ 内の t-均質群であることは同値である．

従って，$G_0 \simeq (G_0 \times G_0)/\Delta G_0$ 上のデザインの概念は $O(d+1)$ 内の t-均質群の一般化と言うことができる．

5.2 群アソシエーションスキーム

G_0 が有限群である場合には, $X := G_0$, $V := C(G_0)$ とすれば,

- X は $G_0 \simeq (G_0 \times G_0)/\Delta G_0$ 上の $V \cdot V^-$-デザイン (この場合には $V \cdot V^- = V$).
- X は V-符号.
- $|\mathcal{A}'(X)| = |\{ G_0$の共役類$\}| = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_G V$.

などが成り立つ. 特に Theorem 4.4 から X にはアソシエーションスキームが付随するが, これは G_0 の群アソシエーションスキームに他ならない.

5.3 部分群でない例

$G_0 = U(2)$ としよう. このとき,

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

とし, $U(2)$ の標準表現 U (2 次元表現) に対して,

$$V = U \boxtimes U^-$$

と置こう. X は四点集合であり, V は $U(2) \times U(2)$ の四次元表現である.

このとき, X が V-符号になることが直接計算から確認できる. 特にいま $|X| = 4 = \dim_{\mathbb{C}} V$ であるから, Theorem 4.3 から X は $V \cdot V^-$-デザインでもある.

Remark 5.2. この場合には $|\mathcal{A}'(X)| = 2$ であることから, $\mathfrak{X} = (X, \{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}'(X)})$ はクラス 1 のアソシエーションスキームになる. しかし, $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_G V = 1$ であり, X は V-符号であるから, (X, V) は *Theorem* 4.4 の条件は満たしていない. 従って, *Theorem* 4.4 はアソシエーションスキームが付随するための十分条件を与えているが, 必要条件にはなっていない.

References

[1] 坂内英一・坂内悦子. 球面上の代数的組合せ理論. シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999.

[2] C. Bachoc, E. Bannai, and R. Coulangeon. Codes and designs in Grassmannian spaces. *Discrete Mathematics*, 277(1-3):15–28, 2004.

[3] C. Bachoc, R. Coulangeon, and G. Nebe. Designs in Grassmannian spaces and lattices. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 16(1):5–19, 2002.

[4] E. Bannai and S. G. Hoggar. On tight t-designs in compact symmetric spaces of rank one. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 61(3):78–82, 1985.

[5] E. Bannai and S. G. Hoggar. Tight t-designs in projective spaces, and Newton polygons. *Ars Combin.*, 20(A):43–49, 1985. Tenth British combinatorial conference (Glasgow, 1985).

[6] P. Delsarte, J. Goethals, and J. Seidel. Spherical codes and designs. *Geom. Dedicata*, 6(3):363–388, 1977.

[7] 小林俊行・大島利雄. リー群と表現論. 岩波書店, 2005.

[8] A. Roy. Bounds for codes and designs in complex subspaces. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 31(1):1–32, 2010.

[9] A. Roy and A. Scott. Unitary designs and codes. *Designs, Codes and Cryptography*, 53(1):13–31, 2009.

[10] A. Roy and S. Suda. Complex spherical designs and codes. *Technical Report*, arXiv:1104.4692, 2011.

[11] 竹内勝. 現代の球関数. 岩波書店, 1975.