数理解析研究所講究録
第1811巻 2012年 164-170

Non-Schurian association schemes derived from BGW

平坂　貢 (Mitsugu Hirasaka)*

2012年3月7日

1　ASの拡大とBGW

H, K, G を群とする。G が $K \simeq N$, $G/N \simeq H$ となる正規部分群 N を有するときに、G は K の H による拡大であると言う。アソシエーションスキーム（以下、ASと略す）とは有限群を一般化した組合せ的対象とも考えられる。本講演ではASの拡大を取扱い、その拡大の構造の中にBGW(balanced generalized weighing) 行列が現れること、逆にBGWからASの拡大を構成できることを示す。

[8] において、ASは有限集合 X と、$X \times X$ の分割 S である代数的条件を満たすものとの対 (X, S) と定義されるが、本講演では、ASを $\{0,1\}$-行列の集合として定義する。

定義 1.1. $\{0,1\}$ のみを成分としてもつ n 次正方行列の集合 $\{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ は以下の性質を満たすときASと呼ばれる:

1. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J_n$,　但し、J_n は成分が全て1の n 次正方行列である。

2. $I_n \in \{A_i \mid i = 0,1,\ldots,d\} = \{A_i^t \mid i = 0,1,\ldots,d\}$ 但し、I_n は単位行列で、A_i^t は A_i の転置行列である。

3. $\{A_i \mid i = 0,1,\ldots,d\}$ で張られる $M_n(\mathbb{C})$ の部分空間は行列の積に関して閉じている。

*釜山大学数学科所属。2012年2月1日から2013年1月31日迄、九州大学数理学府に訪問教授として滞在。

上記の3番目の条件は、

$$\forall i,j,\exists\{c_{ij}^k\}; A_iA_j=\sum_{k=0}^{d} c_{ij}^k A_k$$

と書き下すことができる。この $\{c_{ij}^k\}$ はASの構造定数（もしくは交叉数）と呼ばれる。2番目の条件と合わせて、A_i の行和は一定であることがわかる。この行和を k_i と記す。

定義 1.2. $S=\{A_0,A_1,\ldots,A_d\}$ をASとする。全ての A_i が対称行列であるとき、$\{A_0,A_1,\ldots,A_d\}$ は対称ASと呼ばれる。

T を S の空でない部分集合とし、T に属する行列の和を A_T と記し、その行和を k_T と記す。

もし $A_TA_T=k_TA_T$ ならば、T は積閉と呼ばれる。例として、S や単位行列のみからなる集合は積閉である。これらは自明な積閉集合であると呼ばれる。もし S が自明でない積閉集合を持たないとき、S は原始的と呼ばれる。

積閉集合 T に対し、T 上の構造定数を保存する T の置換全体を $\mathrm{Aut}(T)$ と記す。

群にも部分群、商群が定義されるように、ASにも部分AS、商ASが定義される（詳細は、[8] を参照）。そして、ASの拡大も同様に定義される（詳細は、[1] を参照）。

まずは、2個の行列からなるASの C_2 による拡大で対称になるものを考える、但し、C_k は位数 k の巡回群を意味する。

この問題は、O_n を n 次の零行列とするとき、

$$\{(I_n,O_n;O_n,I_n),(J_n-I_n,O_n;O_n,J_n-I_n)\}$$

を含む対称なASを全て見出す問題に帰着する。その答えは、

$$\{(O_n,A;A^t,O_n),(O_n,J_n-A;J_n-A^t,O\}$$

を加えることで、A は、

$$AA^t\in\mathrm{span}(I_n,J_n)$$

となる $\{0,1\}$-行列であることが証明される。すなわち、A は n 個の頂点集合上の対称デザインの結合行列であり、ここにASの拡大との関係が見出せる。

次に、$\{I_{2m}, A, B\}$ の C_2 による拡大を考える、但し、$B = J_{2m} - I_{2m} - A$ で、A は互換の積 $(12)(34)\cdots(2m-1, m)$ に対応する $2m$ 次の置換行列である。この問題は、

$$\{(I_{2m}, O_{2m}; O_{2m}, I_{2m}), (A, O_{2m}; O_{2m}, A), (B, , O_{2m}; O_{2m}, B)\}$$

を含む対称スキームを全て見出す問題に帰着する。その答えを述べる前に、[7] に基づく BGW の定義を紹介する。

定義 1.3. G を有限群とする。整数環上の群環 $\mathbb{Z}[G]$ 上の v 次の正方行列 W が以下の条件を満たすとき、$BGW(v, k, l; G)$ 行列と呼ばれる:

1. $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, v\}$, $W_{ij} \in G \cup \{0\}$;

2. $WW^* = kI_v + \frac{l}{|G|}\bar{G}(J_v - I_v)$.

但し、$\bar{G} = \sum_{g \in G} g \in \mathbb{Z}[G]$ で、W^* の (i, j) 成分は、$W_{ji} = 0$ ならば 0 で、そうでないならば、W_{ji}^{-1} となる。

前段落の問題に対する答えは以下のように導かれる。

追加して対称 AS になる行列を $\{(O, B_i; B_i^t, O) \mid i = 1, 2, \ldots, r\}$ とすると、$r \leq 3$ である ([4, p.223]、あるいは、[5, Prop. 2.7] を参照)。$\{I, A\}$ は行列の積に関して群をなし、右からの積により、$\{(O, B_i; B_i^t, O) \mid i = 1, 2, \ldots, r\}$ 上に作用する。その場合分けは以下のとおりである。

1-1. $r = 1$.

2-1. $r = 2$, $\{I_{2m}, A\}$ は自明に作用する。

2-2. $r = 2$, $B_1 A = B_2$.

3-1. $r = 3$, $\{I_{2m}, A\}$ は自明に作用する。

3-2. $r = 3$, $\{I_{2m}, A\}$ の作用で、B_i のみが固定される。この場合、一般性を失うことなく、B_3 のみが固定されるとしてよい。

1-1 の場合、$B_1 = J_{2m}$ なので、一意に定まる。

2-1 の場合、$B_1 = C \otimes J_2$、但し、$\otimes$ は行列のクロネッカー積で、C は $CC^t \in \mathrm{span}(I_m, J_m)$ となる m 次の $\{0, 1\}$-正方行列である。

2-2 の場合、B_1 は (同様に B_2 も)

$$(B_1)_{2j+1, 2k+1} = 1 \Longleftrightarrow W_{j,k} = 1 \in C_2$$

という対応により、$BGW(m,m,m;C_2)$ 行列 W を誘導する。

3-1 の場合、$\{I_{2m}, A\}$ による商スキームを考えると、起りえないことが分かる。

3-2 の場合、B_1 は (同様に B_2 も)、

$$(B_1)_{2j+1,2k+1} = (B_1)_{2j+1,2k+2} = 0 \Longleftrightarrow W_{j,k} = 0 \in \mathbb{Z}[C_2]$$

$$(B_1)_{2j+1,2k+1} = 1 \Longleftrightarrow W_{j,k} = 1 \in C_2$$

という対応により、$BGW(m,k,l,C_2)$ 行列 W を誘導する。

このようにして、全ての場合においてBGW行列との関係性が示された。

次に考察すべきことは、上記を一般化した3個の行列からなる非原始的 AS の C_2 による対称拡大である。しかしながら、前述のような結果は得られるかどうか未解決である。しかし、任意の BGW 行列からこのような拡大が得られることは次のように示される。

W を $BGW(n,k,l;G)$ とする。そのとき、3個の行列からなる非原始的 AS の C_2 による対称拡大を以下のように構成できる：

1. G のある正則表現を $\{P_g \mid g \in G\}$ とする。
2. $g \mapsto P_g, 0 \mapsto O_m$ という写像により、W から、次数 mn の $\{0,1\}$-正方行列 $\tilde{W}$ を構成する, 但し、$|G| = m$.
3. $(O, \tilde{W}; \tilde{W}^t, O)$ によって、生成される全行列環の部分代数は、アダマール積に関して閉じており、そのアダマール積による原始冪等元達は唯一に決まり、AS をなす。
4. 更に、その AS は求める拡大になっている。

2 BGWの周辺の話題

この節では、BGW 関連の問題を紹介する。

p を素数とするとき、$BGW(p,p,p;C_p)$ の一意性を考察する。W と V を $BGW(p,p,p;C_p)$ とする。p 次の置換行列 P_i と G の元を対角成分に持つ対角行列 D_i, $i=1,2$ が存在して、$V = P_1D_1WD_2P_2$ となるとき、$V \simeq W$ と記す。$\simeq$ は同値関係であり、この同値関係による同値関係の個数を決定していく。$p = 2,3,5,7$ のときには、手計算で、$BGW(p,p,p;C_p)$ の同値類が1個だけであることを確かめることができる。

$p = 11, 13$ のときには、計算機により、同値類の個数が 1 個だけであることが確かめられる（私が指導する学生である H.Jo が計算プログラムを書いた）。しかし、$p = 17$ のときは、まだ未解決である。

任意の $BGW(p, p, p; C_p)$ 行列は位数 p の射影平面を誘導することが知られている（[6] を参照）。一方で、$p \geq 11$ のときの位数 p の射影平面の同値類の個数は 1 以上であること以外は知られてない。このことは、$BGW(p, p, p; C_p)$ の同値類の個数が 2 個以上であった時に、新たな射影平面を構成する可能性があることを示唆している。

3 Non-Schurian AS の構成

この節では、表題にある Non-Schurian AS の構成を取扱い、J.R.Cho と K.Kim との共同研究で得られた定理の応用を紹介する。

定義 3.1. $\{A_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots, d\} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ を AS とする。もし $\{A_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots, d\}$ で張られる $M_n(\mathbb{C})$ の部分空間が、$\{1, 2, \ldots, n\}$ 上のある置換群 G の中心化環と一致するとき、$\{A_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots, d\}$ は Schurian と呼ばれる。すなわち、

$$\mathrm{span}\{A_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots, d\} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \forall g \in G, P_g M = M P_g\}$$

但し、P_g は置換 g に対応する置換行列である。

p を素数として、$\mathbb{F}_p$ を p 個の元からなる有限体とする。このとき、$X = \mathbb{F}_p^3$ 上の置換群 G を次のように定義する。

$$G = \langle \rho, \tau_x \mid x \in X \rangle$$

但し、

$$\rho : X \to X, (a, b, c) \mapsto (a + b, b + c, c)$$

$$\tau_x : X \to X, y \mapsto x + y$$

である。

このとき、G の作用の中心可換はアダマール積に関する原始冪等元からなる唯一の基底を有し、その基底は AS をなす。この AS に属する行列の一部を変形して、同じ構造定数を持つ Non-Schurian AS を構成する。

$S = \{A_i \mid i = 0, 1, \ldots, d\}$ を上で定義されている G から構成される AS とする。

$$H = \{A_i \in S \mid k_i = 1\},\ T = \{A_i \in S \mid \forall A_j \in H, A_jA_i = A_i\} \cup H$$

のように H と T を定義する。このとき、$H \subseteq T$ であり、H と T は共に積閉である。積閉の定義から、T は X 上の同値関係を定義することがわかる。その同値類全体を $X_1, X_2, \ldots, X_p$ と記す。このとき、各 X_a 上で AS、$\{A_{ab} \mid b \in T\}$ が定義される、但し、A_{ab} は $A_b, b \in T,$ を $X_a \times X_a$ 上に制限したものである。ここで、$T - H$ の任意の元 A_b に対して、$\tilde{A}_b = A_{1b}^t + \sum_{a=2}^{p} A_{ab}$ と定義する。このとき、$H \cup \{\tilde{A}_b \mid b \in T - H\} \cup (S - T)$ は AS になり、S と同じ構造定数を持ち、$p \geq 3$ のときは Non-Schurian であることが証明される。($p = 3$ のときは、S と同じ構造定数を持つ AS の同値類の個数が分かっている。詳細は [3] を参照)。この結果は次のように一般化される(詳細は [2] を参照)。

定理 3.1. $S = \{A_i \mid i = 0, 1, \ldots, d\}$ を AS で、T は S の積閉集合で、$X_1, \ldots, X_m$ を T に対応する同値類全体とする。$\iota_1, \ldots, \iota_m \in \mathrm{Aut}(T)$ で、$\tilde{\iota}_1, \ldots, \tilde{\iota}_m \in \mathrm{Aut}(S)$ となるものとする、但し、$\tilde{\iota}_i$ は $S \backslash T$ の元を固定し、T への制限したとき ι_i と一致するものとする。このとき、$\{A'_j \mid A_j \in T\} \cup (S \backslash T)$ は AS となり、S の同一の構造定数を持つ、但し、$A'_j = \sum_{i=1}^{m} \iota_i(A_j)_{X_i \times X_i}$ で、$\iota_i(A_j)_{X_i \times X_i}$ は $\iota_i(A_j) \in T$ を $X_i \times X_i$ 上に制限した行列である。

定理 3.2. $S = \{A_i \mid i = 0, 1, \ldots, d\}$ を AS で、H と T は $H \subseteq T$ となる S の積閉集合で、次の条件を満たすものとする。

1. S の T による商 AS は行列の積に関して群をなす。

2. 任意の $A_i \in S \setminus T$ に対して、$A_i \sum_{A_j \in T} A_j$ と $A_i \sum_{A_j \in H} A_j$ は線形従属である。

3. 任意の $A_i \in T$ に対して、$A_i \sum_{A_j \in H} A_j$ と A_i は線形従属である。

このとき、H の任意の元を固定する $\iota \in \mathrm{Aut}(T)$ に対して、$\tilde{\iota} \in \mathrm{Aut}(S)$ である、但し、$\tilde{\iota}$ は、$S \setminus T$ の任意の元を固定し、T への制限したとき ι と一致するものとする。

ここで、相異なる i, j に対し、$X_i \times X_j$ 上に制限した部分行列は BGW と同一視されることを言及しておく。

参考文献

[1] S. Bang, M. Hirasaka, Construction of association schemes from difference sets, European J. Combin. 26 (2005), no. 1, 59-74.

[2] J.R. Cho, M. Hirasaka, K.Kim, On p-schemes of order p^3, submitted to J.Algebra, 2012.

[3] A. Hanaki, I. Miyamoto, `http://kissme.shinshu-u.ac.jp/as/data/as28`.

[4] D.G. Higman, Coherent algebras, Linear Algebra Appl. 93 (1987), 209-239,

[5] M. Hirasaka, R. Sharafdini, Characterization of balanced coherent configurations, J. Algebra 324 (2010), no. 8, 2025-2041.

[6] D. Jungnickel, On difference matrices, resolvable transversal designs and generalized Hadamard matrices, Math. Z. 167 (1979), no. 1, 49—60

[7] W.de Launey, D. Flannery, Algebraic design theory, Mathematical Surveys and Monographs, 175. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[8] P.-H. Zieschang, Theory of association schemes, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.