

# CGS 計算アルゴリズムのさらなる改良

鍋島克輔\*

NABESHIMA, KATSUSUKE

徳島大学大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部

INSTITUTE OF SOCIO-ARTS AND SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKUSHIMA

## Abstract

A new algorithm for computing a comprehensive Gröbner system is given. Suzuki-Sato's and Kapur-Sun-Wang's algorithms for computing comprehensive Gröbner systems, are based on stability of Gröbner bases of ideals under specializations (Kalkbrener's results). Each algorithm has a different stable condition of Gröbner bases. In order to compute comprehensive Gröbner systems efficiently, it is important to apply good stable conditions. In this paper, we introduce a new stable condition which is stronger than Kapur-Sun-Wang's one. Furthermore, we improve Kapur-Sun-Wang's algorithm for computing comprehensive Gröbner systems, by using the new stable condition.

## 1 はじめに

本稿では包括的グレブナー基底系 (CGS) を計算するための新しいアルゴリズムを紹介する。

いくつかの論文 [2, 5, 7, 14] に記されるように, パラメータ付き問題を解くことは計算機代数において大きな問題の 1 つである. そこでパラメータ付き問題を解くために重要な鍵となるものが CGS である. CGS を速く計算することは産業ならびに自然界の諸問題等の大きな問題を解くために重要なことである.

CGS とはパラメータ付きイデアルのグレブナー基底のことである. CGS の存在とその計算アルゴリズムは 1992 年に Weispfenning の論文 [14] で紹介されている. この論文の発表後 10 年近く CGS についての大きな発展はない. CGS 計算アルゴリズムの大きな発展は 21 世紀に入りこの 10 年ほどの間にめまぐるしく Kapur-Sun-Wang, Montes, Nabeshima, Sato, Suzuki, Weispfenning らによって行われている [6, 8, 9, 10, 12, 13, 15].

近年紹介された CGS 計算アルゴリズムのいくつかは “グレブナー基底の安定性” (Kalkbrener の結果 [4]) という理論に基づいている. この理論に基づいた各々の CGS 計算アルゴリズムは各々の異なったグレブナー基底の安定条件を使って構成されている. その中で Kapur-Sun-Wang によって紹介された安定条件が, それまでの Suzuki-Sato [13], Nabeshima [10] の安定条件より強く, この安定条件を使って構成された Kapur-Sun-Wang の CGS 計算アルゴリズムは他のアルゴリズムより効率が良いことが知られている.

本稿では新しいグレブナー基底の安定条件を紹介するとともに, この新しい安定条件を使い, さらなる CGS 計算アルゴリズムを構成する. この新しい安定条件は Kapur-Sun-Wang の安定条件より強いことから, これを使うことで CGS 計算のさらなる効率化を図ることができる.

---

\*nabesima@ias.tokushima-u.ac.jp

## 2 準備

本稿では、次の記号を使う。  $\bar{A} := \{A_1, \dots, A_m\}$  と  $\bar{X} := \{X_1, \dots, X_n\}$  を  $m$  変数と  $n$  変数の集合とし、また  $\bar{A} \cap \bar{X} = \emptyset$  とする。  $K$  を体とし  $L$  は  $K$  を含む代数閉体とする。また、  $\text{pp}(\bar{X})$ ,  $\text{pp}(\bar{A})$ ,  $\text{pp}(\bar{A}, \bar{X})$  をそれぞれの変数集合  $\bar{X}$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{A} \cup \bar{X}$  からなる項の集合とし、  $\prec_{\bar{X}, \bar{A}}$  を  $\text{pp}(\bar{A}, \bar{X})$  上の  $\bar{A} \ll \bar{X}$  である項順序（ブロック項順序）とする。項順序  $\prec_{\bar{X}}$  と  $\prec_{\bar{A}}$  は  $\prec_{\bar{X}, \bar{A}}$  に制限された項順序であり、  $\prec_{\bar{X}}$  は  $\text{pp}(\bar{X})$  上の項順序、  $\prec_{\bar{A}}$  は  $\text{pp}(\bar{A})$  上の項順序を表す。

$f \in K[\bar{A}][\bar{X}]$ （係数が多項式環  $K[\bar{A}]$  にあり主変数は  $\bar{X}$ ）のとき項順序  $\prec_{\bar{X}}$  に関しての  $f$  の先頭項 (leading power product), 先頭係数 (leading coefficient), 先頭単項 (leading monomial) をそれぞれ  $\text{lpp}_{\bar{X}}(f)$ ,  $\text{lc}_{\bar{X}}(f)$ ,  $\text{lm}_{\bar{X}}(f)$  で表す。多項式  $f$  は  $K[\bar{A}, \bar{X}]$  の元と見ることもできるので、この場合、項順序  $\prec_{\bar{X}, \bar{A}}$  における  $f$  の先頭項, 先頭係数, 先頭単項をそれぞれ  $\text{lpp}_{\bar{X}, \bar{A}}(f)$ ,  $\text{lc}_{\bar{X}, \bar{A}}(f)$ ,  $\text{lm}_{\bar{X}, \bar{A}}(f)$  で表す。  $F$  を  $K[\bar{A}][\bar{X}]$  の部分集合とする。このとき、  $\text{lc}_{\bar{X}}(F) := \{\text{lc}_{\bar{X}}(f) \mid f \in F\}$ ,  $\text{lpp}_{\bar{X}}(F) := \{\text{lpp}_{\bar{X}}(f) \mid f \in F\}$  とする。  $\mathbb{Q}$  を有理数体とし、  $\mathbb{C}$  を複素数体とする。

例えば  $a, b, x, y$  を変数とし、多項式  $f = 2ax^2y + bx^2y + 3x + by + 1$  を考える。このとき、もし  $f$  を  $\mathbb{Q}[a, b, x, y]$  の元としブロック項順序  $\prec_{\{x, y\}, \{a, b\}}$  ( $b \prec_{\text{lex}} a \ll y \prec_{\text{lex}} x$ ,  $[\succ_{\text{lex}}$  は辞書式順序) を考えると、そのとき： $\text{lpp}_{\{x, y\}, \{a, b\}}(f) = ax^2y$ ,  $\text{lc}_{\{x, y\}, \{a, b\}}(f) = 2$ ,  $\text{lm}_{\{x, y\}, \{a, b\}}(f) = 2ax^2y$  となる。もし  $f$  を  $\mathbb{Q}[a, b][x, y]$  の元とみなし  $y \prec x$  となる辞書式順序を考えるならば、そのとき： $\text{lpp}_{\{x, y\}}(f) = x^2y$ ,  $\text{lc}_{\{x, y\}}(f) = 2a + b$ ,  $\text{lm}_{\{x, y\}}(f) = (2a + b)x^2y$  となる。

本稿では、記号  $\langle \cdot \rangle$  を以下のように定義する。  $f_1, \dots, f_l \in R$  としたとき ( $R$  は単位元を持つ可換環)  $\langle f_1, \dots, f_l \rangle := \{\sum_{i=1}^l h_i f_i \mid h_1, \dots, h_l \in R\}$  とする。

任意の元  $\bar{a} \in L^m$  に対して、特化準同型写像 (specialization homomorphism)  $\sigma_{\bar{a}} : K[\bar{A}] \rightarrow L$  を定義する。もちろん、この写像は自然な拡張として  $\sigma_{\bar{a}} : K[\bar{A}][\bar{X}] \rightarrow L[\bar{X}]$  とも考えることができるのでこの意味としても同じ記号を使う。写像  $\sigma$  でのイデアル  $I \in K[\bar{A}][\bar{X}]$  における像は  $\sigma(I) := \{\sigma(f) \mid f \in I\} \subseteq L[\bar{X}]$  である。この写像は変数  $\bar{A} \rightarrow \bar{a}$  を代入するものと考えればよい。例えば、多項式として  $f = abx^2y + xy + ax + by + 2 \in \mathbb{C}[a, b][x, y]$  を考え  $(a, b) = (-2, 3)$ ,  $(0, \frac{1}{3}) \in \mathbb{C}^2$  とする。このとき、  $\sigma_{(-2, 3)}(f) = -6x^2y + xy - 2 + 3y + 2$  であり  $\sigma_{(0, \frac{1}{3})}(f) = xy + \frac{1}{3}y + 2$  である。

多項式  $f_1, \dots, f_k \in K[\bar{A}]$  に対して、代数多様体として記号  $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_k)$  を使う。本稿では  $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_k) := \{\bar{a} \in L^m \mid f_1(\bar{a}) = \dots = f_k(\bar{a}) = 0\}$  を意味するものとする。

**定義 1 (CGS).**  $F$  を  $K[\bar{A}][\bar{X}]$  の有限部分集合、  $A_1, \dots, A_l$  を  $L^m$  上の代数構造的集合、  $G_1, \dots, G_l$  を  $K[\bar{A}][\bar{X}]$  の有限部分集合とし、  $S$  は  $S \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_l$  となる  $L^m$  の部分集合とする。このとき、有限部分集合  $\mathcal{G} = \{(A_1, G_1), \dots, (A_l, G_l)\}$  が  $S$  上で  $F$  の包括的グレブナー基底系 (CGS) とは、任意の  $\bar{a} \in A_i$  において  $\sigma_{\bar{a}}(G_i)$  が  $L[\bar{X}]$  上、各  $i = 1, \dots, l$  で、  $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$  のグレブナー基底であることである。また、各  $(A_i, G_i)$  を  $\mathcal{G}$  の断片という。もし  $S = L^m$  であれば、  $\mathcal{G}$  を単に  $F$  の包括的グレブナー基底系という。

本稿では、代数構造的集合として  $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_k) \setminus \mathbb{V}(g_1, \dots, g_l) \subseteq L^m$  と表す (ただし、ここでは  $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l \in K[\bar{A}]$  とする)。

**定義 2.** イデアル  $I \subseteq K[\bar{A}][\bar{X}]$  が特化準同型写像  $\sigma$  と項順序  $\prec$  のもとで安定 とは、イデアル  $I$  が

$$\sigma(\text{lm}_{\bar{X}}(I)) = \text{lm}_{\bar{X}}(\sigma(I))$$

を満たすときである。ここで、  $\sigma(\text{lm}_{\bar{X}}(I)) := \{\sigma(\text{lm}_{\bar{X}}(f)) \mid f \in I\}$ ,  $\text{lm}_{\bar{X}}(\sigma(I)) := \{\text{lm}_{\bar{X}}(f) \mid f \in \sigma(I)\}$  である。

このイデアルの安定性については論文 [1, 3, 4] において研究されている。このイデアルの安定性における重要な定理として次がある。この定理が基になり CGS 計算アルゴリズムは構成される。

**定理 3** (Kalkbrener (1997) [4]).  $K[\bar{A}]$  から  $L$  への特化準同型写像を  $\sigma$  として,  $I$  を  $K[\bar{A}][\bar{X}]$  のイデアルとする. また,  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$  を  $\text{pp}(\bar{X})$  上の項順序  $\prec$  に関しての  $I$  のグレブナー基底とする. 今,  $g_i$  が順序付けられており次のようになると仮定する.  $r \in \{1, \dots, s\}$  が存在し

- 各  $i \in \{1, \dots, r\}$  で  $\sigma(\text{lc}_{\bar{X}}(g_i)) \neq 0$  となる.
- 各  $i \in \{r+1, \dots, s\}$  で  $\sigma(\text{lc}_{\bar{X}}(g_i)) = 0$  となる.

このとき次の 3 つは同値である.

- (1)  $I$  は  $\sigma$  と  $\prec$  において安定である.
- (2)  $\{\sigma(g_1), \dots, \sigma(g_r)\}$  は  $\prec$  に関して  $\sigma(I)$  のグレブナー基底である.
- (3) 各  $i \in \{r+1, \dots, s\}$  で,  $\sigma(g_i)$  は  $\{\sigma(g_1), \dots, \sigma(g_r)\}$  によって 0 へ簡約される.

### 3 Kapur-Sun-Wang のアルゴリズム

本章では, Kapur-Sun-Wang のイデアルの安定条件とそれを使った CGS 計算アルゴリズムを紹介する.

**定義 4** (Kapur-Sun-Wang [6]).  $G$  を集合  $F \subset K[\bar{A}, \bar{X}]$  の部分集合とする. 集合  $G$  があるブロック項順序  $\bar{A} \ll \bar{X}$  において, 次を満たすとき  $\text{Noncomparable}(F) = G$  と書くようにする.

- (i)  $\forall f \in F, \exists g \in G$  s.t.  $\text{lpp}_{\bar{X}}(g) \mid \text{lpp}_{\bar{X}}(f)$ .
- (ii) 異なる任意の 2 つの元  $g_1, g_2 \in G$  は,  $\text{lpp}_{\bar{X}}(g_1) \nmid \text{lpp}_{\bar{X}}(g_2), \text{lpp}_{\bar{X}}(g_2) \nmid \text{lpp}_{\bar{X}}(g_1)$  である.

この定義より  $\langle \text{lpp}_{\bar{X}}(\text{Noncomparable}(G)) \rangle = \langle \text{lpp}_{\bar{X}}(G) \rangle$  であることは簡単にわかり, また  $\text{Noncomparable}(G)$  は唯一であるとは限らない. Kapur-Sun-Wang の CGS 計算アルゴリズムは次の安定条件に基づいて構成されている.

**定理 5** (Kapur-Sun-Wang [6]). 集合  $G$  をイデアル  $I \subset K[\bar{A}, \bar{X}]$  の  $\prec_{\bar{X}, \bar{A}}$  に関するグレブナー基底とする. また,  $G_r = G \cap K[\bar{A}]$ ,  $G_m = \text{Noncomparable}(G \setminus G_r)$  とし,  $G_m = \{g_1, \dots, g_s\}$  とする. このとき, 任意の  $\bar{a} \in \mathbb{V}(G_r) \setminus (\mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(g_1)) \cup \mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(g_2)) \cup \dots \cup \mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(g_s)))$  で,  $\sigma_{\bar{a}}(G_m)$  は  $\sigma_{\bar{a}}(I)$  の  $\prec_{\bar{X}}$  に関するグレブナー基底である. (注意:  $\mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(g_1)) \cup \dots \cup \mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(g_s)) = \mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(g_1) \cdots \text{lc}_{\bar{X}}(g_s))$  である.)

この安定条件 『 $(\mathbb{V}(G_r) \setminus (\mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(g_1)) \cup \dots \cup \mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(g_s))))$ 』 は Suzuki-Sato, Nabeshima の安定条件より強い. したがって, Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムは Suzuki-Sato, Nabeshima の CGS 計算アルゴリズムより効率的に働く. この定理を使った CGS 計算アルゴリズムは次である.

**アルゴリズム K-S-W** (Kapur-Sun-Wang [6])

**Input:**  $(E, N, F)$ ,  $\prec_{\bar{X}, \bar{A}}$ :  $E, N, K[\bar{A}]$  の有限部分集合;  $F, K[\bar{A}, \bar{X}]$  の有限部分集合;  $\prec_{\bar{X}, \bar{A}}, \bar{A} \ll \bar{X}$  となるブロック項順序.

**Output:**  $(E_i, N_i, G_i)$  の有限集合;  $\{(\mathbb{V}(E_i) \setminus \mathbb{V}(N_i)), G_i\}$  は,  $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N)$  上で,  $F$  の (minimal) CGS となる.

**BEGIN**

**if**  $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N) = \emptyset$  **then return**  $\{\}$ ; **end-if**;

$G \leftarrow \text{ReducedGröbnerBasis}(F \cup E, \prec_{\bar{X}, \bar{A}})$ ;

**if**  $1 \in G$  **then return**  $\{E, N, \{1\}\}$ ; **end-if**;

$G_r \leftarrow G \cap K[\bar{A}]$ ;

```

if  $(\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(G_r)) \setminus \mathbb{V}(N) = \emptyset$  then  $\mathcal{PGB} \leftarrow \{\}$ ;
  else  $\mathcal{PGB} \leftarrow \{E, G_r \wedge N, \{1\}\}$ ; end-if;
if  $\mathbb{V}(G_r) \setminus \mathbb{V}(N) = \emptyset$  then return  $\mathcal{PGB}$ ; else
   $G_m \leftarrow \text{Noncomparable}(G \setminus G_r)$ ;
   $\{h_1, \dots, h_s\} \leftarrow \{\text{lc}_{\bar{x}}(g) \mid g \in G_m\}$ ;  $h \leftarrow \text{lcm}\{h_1, \dots, h_s\}$ ;
  if  $(\mathbb{V}(G_r) \setminus \mathbb{V}(N)) \setminus \mathbb{V}(h) \neq \emptyset$  then
     $\mathcal{PGB} \leftarrow \mathcal{PGB} \cup \{(G_r, N \wedge \{h\}, G_m)\}$ 
  end-if;
   $\mathcal{PGB} \leftarrow \mathcal{PGB} \cup \text{NEW}(G_r \cup \{h_1\}, N, G \setminus G_r) \cup$ 
     $\text{NEW}(G_r \cup \{h_2\}, N \wedge \{h_1\}, G \setminus G_r) \cup \text{NEW}(G_r \cup \{h_3\}, N \wedge \{h_1 h_2\}, G \setminus G_r)$ 
     $\cup \dots \cup \text{NEW}(G_r \cup \{h_s\}, N \wedge \{h_1 \cdots h_s\}, G \setminus G_r)$ ;
  return  $\mathcal{PGB}$ ;
end-if;
END
(注:  $A \wedge B = \{fg \mid f \in A, g \in B\}$ .)

```

次の例で, Kapur-Sun-Wang のアルゴリズム (K-S-W) がどのように働くか述べる.

**例 6.**  $F = \{ax^2 - xy + y^2, bxy + y, ax^2 - y, (b+1)xy^2 + ax\} \subset \mathbb{C}[a, b][x, y]$  を集合とし,  $a, b$  パラメータ,  $x, y$  変数とする. ブロック項順序を  $\prec_{\{x, y\}, \{a, b\}}$  とし ( $\text{pp}(a, b) \ll \text{pp}(x, y)$ ),  $y \prec_{lex} x$ ,  $a \prec_{tdr} b$  とする. ただし,  $\prec_{lex}$  は辞書式項順序を意味し,  $\prec_{tdr}$  は全次数逆辞書式項順序を意味する. このとき, Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムは次のように  $F$  の CGS を計算する.

- (1) まずはじめに,  $\langle F \rangle$  の簡約グレブナー基底を  $\mathbb{C}[a, b][x, y]$  で計算する. このとき, 計算された簡約グレブナー基底は  $G = \{(a + b^2 + b)y, ((-b + 2)a - 1)y, (a^2 + 6a - b - 3)y, -y^2 + (a + 2b + 1)y, ax + by, xy + (-a - 2b - 2)y\}$  である. 次に,  $\text{Noncomparable}(G)$  となる集合を構成する. この場合, 3つの集合  $\{ax + by, (a + b^2 + b)y\}$ ,  $\{ax + by, ((-b + 2)a - 1)y\}$ ,  $\{ax + by, (a^2 + 6a - b - 3)y\}$  が  $\text{Noncomparable}(G)$  となる.  $\text{Noncomparable}(G)$  として 1つの集合のみ必要なので, ここで我々はこの3つから1つ選択する必要がある. どの集合でも良い. ここでは  $\{ax + by, (a + b^2 + b)y\}$  を選択したとしよう. このとき定理 5 より, CGS の 1つの断片として  $\{\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{V}(a(a + b^2 + b)), \{ax + by, (a + b^2 + b)y\}\}$  を得る. 次に, 我々は次の2つの場合  $\{a = 0\}$  と  $\{a + b^2 + b = 0, a \neq 0\}$  を考えなければならない.
- (2)  $\{a = 0\}$  の場合を考える.  $\langle G \cup \{a\} \rangle$  の簡約グレブナー基底は  $G_2 = \{a, y\}$  である. このとき,  $G_{21} = G_2 \setminus (G_2 \cap \mathbb{C}[a, b]) = \{y\}$  であり  $\text{lc}_{\{x, y\}}(y) = \mathbb{V}(1) = \emptyset$  である. したがって, 1つの断片として  $\{\mathbb{V}(a), \{y\}\}$  を得る. ここで  $\text{lc}_{\{x, y\}}(G_{21}) = \emptyset$  なので, この場合の計算はここで終わる.
- (3-1)  $\{a + b^2 + b = 0, a \neq 0\}$  の場合を考える.  $\langle G \cup \{a + b^2 + b\} \rangle$  の簡約グレブナー基底は  $G_3 = \{a + b^2 + b, ((-b + 2)a - 1)y, (a^2 + 6a - b - 3)y, -y^2 + (a + 2b + 1)y, ax + by, xy + (-a - 2b - 2)y\}$  である. また,  $G_{31} = G_3 \setminus (G_3 \cap \mathbb{C}[a, b]) = \{(a^2 + 6a - b - 3)y, ((-b + 2)a - 1)y, -y^2 + (a + 2b + 1)y, ax + by, xy + (-a - 2b - 2)y\}$  であり, 2つの集合  $\{ax + by, (a^2 + 6a - b - 3)y\}$ ,  $\{ax + by, ((-b + 2)a - 1)y\}$  が  $\text{Noncomparable}(G_{31})$  である. ここでは  $\{ax + by, (a^2 + 6a - b - 3)y\}$  を選択するとする. そうすると  $\text{lc}_{\{x, y\}}(ax + by) = a$ ,  $\text{lc}_{\{x, y\}}((a^2 + 6a - b - 3)y) = a^2 + 6a - b - 3$ ,  $\mathbb{V}(a + b^2 + b) \setminus \mathbb{V}(a)$  であるので, 断片として  $\{\mathbb{V}(a + b^2 + b) \setminus \mathbb{V}(a(a^2 + 6a - b - 3)), \{ax + by, (a^2 + 6a - b - 3)y\}\}$  を得る. この場合, 次に  $a^2 + 6a - b - 3 = 0$  の条件を付けくわえた場合を CGS を求めるために考えなければならない.
- (3-2)  $\{a + b^2 + b = 0, a^2 + 6a - b - 3 = 0, a \neq 0\}$  の場合を考える.  $\langle G \cup \{a + b^2 + b, a^2 + 6a - b - 3\} \rangle$  の簡約グレ

ブナー基底は  $G_4 = \{a+b^2+b, a^2+6a-b-3, ((-b+2)a-1)y, -y^2+(a+2b+1)y, -x+(-a-3b)y\}$  である。このとき,  $G_{32} = G_4 \setminus (G_4 \cap \mathbb{C}[a, b]) = \{((-b+2)a-1)y, -y^2+(a+2b+1)y, -x+(-a-3b)y\}$  であり  $\text{Noncomparable}(G_{32}) = \{((-b+2)a-1)y, -x+(-a-3b)y\}$  である。  $\text{lc}_{\{x,y\}}(((b+2)a-1)y) = (-b+2)a-1$ ,  $\mathbb{V}(a+b^2+b, a^2+6a-b-3) \setminus \mathbb{V}(a)$  なので, 断片として  $\{\mathbb{V}(a+b^2+b, a^2+6a-b-3) \setminus \mathbb{V}(a(a^2+6a-b-3)((-b+2)a-1)), \{((-b+2)a-1)y, -x+(-a-3b)y\}\}$  を得る。次に,  $(-b+2)a-1=0$  の条件を付けくわえた場合を我々は考えなければならない。

(3-3)  $\{a+b^2+b=0, a^2+6a-b-3=0, (-b+2)a-1=0, a \neq 0\}$  の場合を考える。  $\langle G \cup \{a+b^2+b, a^2+6a-b-3, (-b+2)a-1\} \rangle$  の簡約グレブナー基底は  $G_5 = \{a+b^2+b, (-b+2)a-1, a^2+6a-b-3, -y^2+(a+2b+1)y, -x+(-a-3b)y\}$  である。このとき,  $G_{33} = G_5 \setminus (G_5 \cap \mathbb{C}[a, b]) = \{-y^2+(a+2b+1)y, x+(a+3b)y\}$ ,  $\text{Noncomparable}(G_{33}) = G_{33}$  である。  $\mathbb{V}(\text{lc}_{\{x,y\}}(-y^2+(a+2b+1)y)) = \mathbb{V}(\text{lc}_{\{x,y\}}(x+(a+3b)y)) = \emptyset$  であり  $\mathbb{V}(a+b^2+b, a^2+6a-b-3, (-b+2)a-1) \cap \mathbb{V}(a) = \emptyset$  があるので, 断片として  $\{\mathbb{V}(a+b^2+b, a^2+6a-b-3, (-b+2)a-1), \{-y^2+(a+2b+1)y, x+(a+3b)y\}\}$  を得た。これで  $F$  の CGS 計算を終了する。

上の計算結果として  $F$  の CGS は次であり 4 つの断片を持つ:

$$\begin{aligned} & \{ \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{V}(a(a+b^2+b)), \{ax+by, (a+b^2+b)y\}, \{\mathbb{V}(a), \{y\}\}, \\ & \{\mathbb{V}(a+b^2+b) \setminus \mathbb{V}(a(a^2+6a-b-3)), \{ax+by, (a^2+6a-b-3)y\}\}, \\ & \{\mathbb{V}(a+b^2+b, a^2+6a-b-3) \setminus \mathbb{V}(a(a^2+6a-b-3)((-b+2)a-1)), \{((-b+2)a-1)y, -x+(-a-3b)y\}, \\ & \{\mathbb{V}(a+b^2+b, a^2+6a-b-3, (-b+2)a-1), \{-y^2+(a+2b+1)y, x+(a+3b)y\}\} \}. \end{aligned}$$

Figure 1 はこの例の計算手順を木構造を用いて表したものである。次の章でも同様の例を用いて新しい方法の計算方法を説明する。

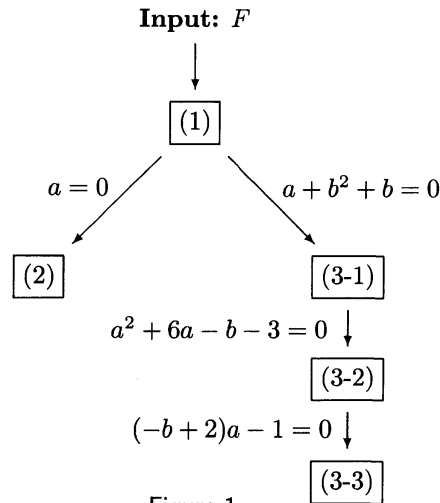


Figure 1

上の例等で述べたように,  $\text{Noncomparable}(G)$  は唯一ではない。したがって, もし Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムを適用するならば,  $\text{Noncomparable}(G)$  として 1 つを選択しなければならない。この選択は時々, 出力と計算速度に影響を及ぼす。しかしながら, 次章で紹介する新しい CGS 計算アルゴリズムでは, この選択は必要ない。

## 4 主結果

本章では新しいより強いイデアルの安定条件を紹介するとともに、その安定条件を使った CGS 計算アルゴリズムを構成する。次の定義は、本稿の主定理に使われる重要なものである。

**定義 7.**  $F$  を  $K[\bar{A}, \bar{X}]$  の部分集合とし、 $\bar{A} \ll \bar{X}$  となるブロック項順序を持つとする。このとき、 $\text{lpp}_{\bar{X}}(F)$  の最小基底 (minimal basis) を  $\text{MBlpp}(F)$  で表す。

$$\text{MBlpp}(F) = \{\text{lpp}_{\bar{X}}(f) \mid \text{lpp}_{\bar{X}}(g) \nmid \text{lpp}_{\bar{X}}(f), \text{lpp}_{\bar{X}}(g) \neq \text{lpp}_{\bar{X}}(f), f, g \in F\}.$$

$\text{MBlpp}(F)$  はまた  $\langle \text{lpp}_{\bar{X}}(F) \rangle$  の簡約グレブナー基底である。

この定義より  $\langle \text{MBlpp}_{\bar{X}}(F) \rangle = \langle \text{lpp}_{\bar{X}}(\text{Noncomparable}(F)) \rangle = \langle \text{lpp}_{\bar{X}}(F) \rangle$  であることが簡単にわかり、また  $\text{MBlpp}(F)$  は唯一であることがいえる。例として次を考える。

集合  $F = \{ax^2 - y, ay^2 - 1, ax - 1, (a+1)x - y, (a+1)y - 1\} \subset \mathbb{Q}[a, x, y]$  と辞書式項順序として  $a \prec y \prec x$  を考える。このとき、 $F_1 = \{ax - 1, (a+1)y - a\}$  と  $F_2 = \{(a+1)x - y, (a+1)y - a\}$  は  $\text{Noncomparable}(F)$  である。また、集合  $\{x, y\}$  は  $\text{MBlpp}(F)$  である。明らかに  $\langle \text{lpp}_{\bar{X}}(F) \rangle = \langle \text{lpp}_{\bar{X}}(F_1) \rangle = \langle \text{lpp}_{\bar{X}}(F_2) \rangle = \langle \text{MBlpp}(F) \rangle = \langle x, y \rangle$  であることがわかる。次が本稿の主定理である。

**定理 8.** 集合  $G$  をイデアル  $I \subset K[\bar{A}, \bar{X}]$  のブロック項順序  $\prec_{\bar{X}, \bar{A}}$  ( $\bar{A} \ll \bar{X}$ ) におけるグレブナー基底とする。また、 $G_r = G \cap K[\bar{A}]$ ,  $\text{MBlpp}(G \setminus G_r) = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$  とする。ここで各  $1 \leq i \leq s$  で  $G_{p_i} = \{f \in G \mid \text{lpp}_{\bar{X}}(f) = p_i\}$  とする。このとき、任意の  $\bar{a} \in \mathbb{V}(G_r) \setminus (\mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(G_{p_1}) \cup \mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(G_{p_2}) \cup \dots \cup \mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(G_{p_s})))$  において、 $\sigma_{\bar{a}}(G_{p_1} \cup G_{p_2} \cup \dots \cup G_{p_s})$  は  $\prec_{\bar{X}}$  に関して  $L[\bar{X}]$  上で  $\sigma_{\bar{a}}(I)$  のグレブナー基底である。

(注意:  $V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s)$ ,  $W = \mathbb{V}(g_1, \dots, g_t)$  とすると、 $V \cup W = \mathbb{V}(f_i g_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t)$  となる。)

この証明は論文 [4] の Theorem 3 と同様に項順序に関する帰納法を使うことによって証明可能である。しかしながら、ここでは紙面の都合上割愛する。

定理 5 とこの定理を比べると、定理 5 の安定条件は  $V := \mathbb{V}(G_r) \setminus (\mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(g_1)) \cup \dots \cup \mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(g_s)))$  である。また、定理 8 の安定条件は  $W := \mathbb{V}(G_r) \setminus (\mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(G_{p_1}) \cup \dots \cup \mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(G_{p_s})))$  である。明らかに、各  $1 \leq i \leq s$  で  $\text{lc}_{\bar{X}}(g_i) \in \text{lc}_{\bar{X}}(G_{p_i})$  であるので、包含関係として  $\mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(G_{p_i})) \subset \mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(g_i))$  を得る。したがって、 $V \subset W$  である。すなわち、この条件は定理 5 の条件より強い。今、この強い安定条件を使い Kapur-Sun-Wang アルゴリズムを改良する。

### アルゴリズム NEW

**Input:**  $(E, N, F)$ ,  $\prec_{\bar{X}, \bar{A}}$ :  $E, N, K[\bar{A}]$  の有限部分集合;  $F, K[\bar{A}, \bar{X}]$  の有限部分集合;  $\prec_{\bar{X}, \bar{A}}$ ,  $\bar{A} \ll \bar{X}$  となるブロック項順序。

**Output:**  $(E_i, N_i, G_i)$  の有限集合;  $\{(\mathbb{V}(E_i) \setminus \mathbb{V}(N_i)), G_i\}$  は、 $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N)$  上で、 $(F)$  の CGS となる。

**BEGIN**

**if**  $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N) = \emptyset$  **then return**  $\{\}$ ; **end-if**;

$G \leftarrow \text{ReducedGröbnerBasis}(F \cup E, \prec_{\bar{X}, \bar{A}})$ ;

**if**  $1 \in G$  **then return**  $\{E, N, \{1\}\}$ ; **end-if**;

$G_r \leftarrow G \cap K[\bar{A}]$ ;

**if**  $(\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(G_r)) \setminus \mathbb{V}(N) = \emptyset$  **then**

$\mathcal{PGB} \leftarrow \{\}$ ; **else**

$\mathcal{PGB} \leftarrow \{E, G_r \wedge N, \{1\}\}$ ;

**end-if**;

```

if  $\mathbb{V}(G_r) \setminus \mathbb{V}(N) = \emptyset$  then return  $\mathcal{PGB}$ ; else
   $\{p_1, \dots, p_s\} \leftarrow \text{MBlpp}(G \setminus G_r)$ ;
  for  $i = 1$  to  $s$  do
     $G_i \leftarrow \{g \in G \mid \text{lpp}_{\bar{X}}(g) = p_i\}$ ;
     $i \leftarrow i + 1$ ;
  end-for;
  if  $(\mathbb{V}(G_r) \setminus \mathbb{V}(N)) \setminus (\mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(G_1)) \cup \dots \cup \mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(G_s)))$  then
     $\mathcal{PGB} \leftarrow \mathcal{PGB} \cup \{(G_r, N \wedge \text{lc}_{\bar{X}}(G_1) \wedge \dots \wedge \text{lc}_{\bar{X}}(G_s), G_1 \cup \dots \cup G_s)\}$ 
  end-if;
   $\mathcal{PGB} \leftarrow \mathcal{PGB} \cup \text{NEW}(G_r \cup \text{lc}_{\bar{X}}(G_1), N, G \setminus G_r) \cup$ 
     $\text{NEW}(G_r \cup \text{lc}_{\bar{X}}(G_2), N \wedge \text{lc}_{\bar{X}}(G_1), G \setminus G_r) \cup$ 
     $\text{NEW}(G_r \cup \text{lc}_{\bar{X}}(G_3), N \wedge \text{lc}_{\bar{X}}(G_1) \wedge \text{lc}_{\bar{X}}(G_2), G \setminus G_r) \cup$ 
     $\dots \cup$ 
     $\text{NEW}(G_r \cup \text{lc}_{\bar{X}}(G_s), N \wedge \text{lc}_{\bar{X}}(G_1) \wedge \dots \wedge \text{lc}_{\bar{X}}(G_{s-1}), G \setminus G_r)$ ;
  return  $\mathcal{PGB}$ ;
end-if;
END
(注:  $A \wedge B = \{fg \mid f \in A, g \in B\}$ .)

```

アルゴリズムのわかりやすさを確保するため、このアルゴリズムには細かい最適化のテクニックの記述はしていない。もちろん、より良い出力のために論文 [6, 13] らに書かれているテクニックを適応することは可能である。

次の例で、我々は CGS 計算において定理 8 と上のアルゴリズムがどのように働くか述べる。

**例 9.** ここでは例 6 と同じ問題を考える。例 6 から  $F = \{ax^2 - xy + y^2, bxy + y, ax^2 - y, (b+1)xy^2 + ax\}$  であり  $\langle F \rangle$  の  $\prec_{\{x,y\},\{a,b\}}$  に関する簡約グレブナー基底は  $G = \{(a+b^2+b)y, ((-b+2)a-1)y, (a^2+6a-b-3)y, -y^2 + (a+2b+1)y, ax+by, xy+(-a-2b-2)y\}$  である。

- (1)  $\text{MBlpp}(G) = \{x, y\}$  であるので、アルゴリズムより  $G_x = \{ax+by\}$ ,  $G_y = \{(a+b^2+b)y, ((-b+2)a-1)y, (a^2+6a-b-3)y\}$  を得る。また、 $\text{lc}_{\{x,y\}}(G_x) = \{a\}$ ,  $\text{lc}_{\{x,y\}}(G_y) = \{a+b^2+b, (-b+2)a-1, a^2+6a-b-3\}$  を得る。よって、定理 8 より、1つの断片として  $\{\mathbb{C}^2 \setminus (\mathbb{V}(a) \cup \mathbb{V}(a+b^2+b, (-b+2)a-1, a^2+6a-b-3))\}$ ,  $G_x \cup G_y$  を得る。 $F$  の CGS を得るために、この後の計算として 2つの場合  $\{a=0\}$  と  $\{a+b^2+b=0, (-b+2)a-1=0, a^2+6a-b-3=0, a \neq 0\}$  を考えなければならない。
- (2) まず、 $\{a=0\}$  の場合を考える。(I.e.,  $\text{lm}_{\{x,y\}}(G_x)$  の元をすべてゼロにする)。  $\langle G \cup \text{lc}_{\{x,y\}}(G_x) \rangle$  の  $\prec_{\{x,y\},\{a,b\}}$  に関する簡約グレブナー基底は  $G_1 = \{a, y\}$  である。このとき、 $G_{11} = G_1 \setminus (G_1 \cap \mathbb{C}[a, b]) = \{y\}$  であり  $\text{lc}_{\{x,y\}}(G_{11}) = \mathbb{V}(1) = \emptyset$  である。定理 8 より、任意の  $\alpha \in \mathbb{V}(a)$  において、 $\sigma_\alpha(G_{11})$  は  $\langle \sigma_\alpha(F) \rangle$  のグレブナー基底である。また、 $\text{lc}_{\{x,y\}}(G_{11}) = \emptyset$  より、この場合はここで計算を終わる。
- (3) 次に、 $\{a+b^2+b=0, (-b+2)a-1=0, a^2+6a-b-3=0, a \neq 0\}$  の場合を考える。(I.e.,  $\text{lm}_{\{x,y\}}(G_y)$  の元をすべてゼロにする)。  $\langle G \cup \text{lc}_{\{x,y\}}(G_y) \rangle$  の  $\prec_{\{x,y\},\{a,b\}}$  に関する簡約グレブナー基底は  $G_2 = \{a+b^2+b, (-b+2)a-1, a^2+6a-b-3, y^2 - (a+2b+1)y, x + (a+3b)y\}$  である。このとき、 $G_{22} = G_2 \setminus (G_2 \cap \mathbb{C}[a, b]) = \{y^2 - (a+2b+1)y, x + (a+3b)y\}$  であり  $\text{lc}_{\{x,y\}}(G_{22}) = \mathbb{V}(1, 1) = \emptyset$  である。定理 8 と例 6 (3-3) より、断片として  $\{\mathbb{V}(a+b^2+b, (-b+2)a-1, a^2+6a-b-3), G_{22}\}$  を得る。ここで、 $\text{lc}_{\{x,y\}}(G_{22}) = \emptyset$  より、CGS 計算はここで終わる。

上の結果より  $F$  の CGS として次と得た:

$$\left\{ \{ \mathbb{C}^2 \setminus (\mathbb{V}(a) \cup \mathbb{V}(a + b^2 + b, (-b + 2)a - 1, a^2 + 6a - b - 3)) \}, G_x \cup G_y \}, \{ \mathbb{V}(a), G_{11} \}, \{ \mathbb{V}(a + b^2 + b, (-b + 2)a - 1, a^2 + 6a - b - 3), G_{22} \} \right\}.$$

ここで得られた CGS の断片の数は例 6 で得られたものより少ない。これは、新しく得られたイデアルの安定条件が Kapur-Sun-Wang のものより強いことからなるものと考えられる。Figure 2 はこの計算の手順を木構造を用いて表したものである。見てわかるように Figure 1 の木よりも小さく効率的である。

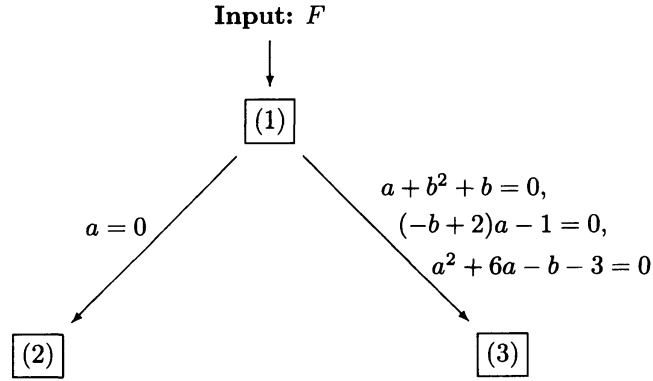


Figure 2

このアルゴリズムの良い点の 1 つは、もし  $\mathbb{V}(\text{lc}_{\bar{X}}(G_{p_i})) \neq \emptyset$  であれば、 $\text{lm}_{\bar{X}}(G_{p_i})$  の元のすべてが次のステップで消えることである。例えば、Figure 2 (1)  $\rightarrow$  (3) を見れば、すべてゼロに簡約されることがわかる。これによりグレブナー基底の計算回数を減らすことができ計算の効率化が図られていると思われる。

ここで、 $\{(\mathbb{V}(E_i) \setminus \mathbb{V}(N_i)), G_i\}$  を  $F$  の断片の 1 つとすると、アルゴリズム NEW は簡単に  $(E_i, N_i, \text{MBlpp}(G_i))$  を出力するように改良できる。MBlpp( $G_i$ ) の情報は次元の計算のときに重要な働きをする。各問題に対応して出力の形を変えることは重要である。

このアルゴリズムはパラメータ付きイデアルの次元を求めるときには、ものすごく有用である。しかしながら、構成方法から分かるように出力された多項式の集合  $G_1 \cup \dots \cup G_s$  は対応する代数構造的集合においてはグレブナー基底であるが、その集合のどの元の先頭項が対応する代数構造的集合で“ゼロにならないか”という情報はない。これはパラメータ付きイデアルの問題を考える場合、扱いづらい。Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムの出力には、“すべてゼロにならない”という情報が付いている。なぜなら、Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムは次の miniam CGS を出力するからである。次の定義の記号は定義 1 と同じである。

**定義 10.**  $S$  上で  $F$  の CGS を  $\mathcal{G} = \{(A_1, G_1), \dots, (A_l, G_l)\}$  とする。  $\mathcal{G}$  が **minimal** であるとは、各  $i = 1, \dots, l$  において、

- (i) 任意の  $g \in G_i$ ,  $\bar{a} \in A_i$  で、 $\sigma_{\bar{a}}(\text{lc}_{\bar{X}}(g)) \neq 0$ ,
- (ii)  $\sigma_{\bar{a}}(G_i)$  は  $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle \subset L[\bar{X}]$  の minimal グレブナー基底である、
- (iii)  $A_i \neq \emptyset$  であり各  $i, j = 1, \dots, l$ , において  $A_i \cap A_j = \emptyset$  である。ただし、 $i \neq j$  である。

パラメータ付き問題を扱う上で minimal CGS を計算することで問題が簡単になる場合が多々にある。次の章では、アルゴリズム NEW を minimal CGS を出力するように改良する。



## 5 Minimal CGS の計算

Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムが CGS として  $\mathcal{G} = \{(A_1, G_1), \dots, (A_l, G_l)\}$  を出力したとする。このとき、任意の  $\bar{a} \in A_i$  と  $g \in G_i$  において、 $\sigma_{\bar{a}}(\text{lc}_{\bar{X}}(g)) \neq 0$  となる。この性質は Suzuki-Sato と Nabeshima のアルゴリズムももつ。もちろん、最適化のテクニックを使えばこの 2 つのアルゴリズムが minimal CGS を出力するように簡単に改良は可能であるが、Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムの方が効率がよい。ここで、新しく提案したアルゴリズム NEW を考えてみると、アルゴリズム NEW は minimal CGS を出力しない。minimal CGS を出力させるためには、Suzuki-Sato と Nabeshima のアルゴリズムとは違う改良が必要である。なぜならば、アルゴリズム NEW は性質『任意の  $\bar{a} \in A_i$  と  $g \in G_i$  において、 $\sigma_{\bar{a}}(\text{lc}_{\bar{X}}(g)) \neq 0$  となる』が成り立たないからである。本章では、アルゴリズム NEW を minimal CGS を出力するように改良する。

ここで、多項式の集合を  $F \subset K[\bar{A}][\bar{X}]$  とし、アルゴリズム NEW が  $F$  の CGS として  $\mathcal{G} = \{(A_1, G_1), \dots, (A_l, G_l)\}$  を出力するとしよう。このとき、各断片  $(A_i, G_i)$  は定義 10 の (i), (ii) を満たすとは限らない。定義 10 の (i), (ii) を満たすように出力  $\mathcal{G}$  の各断片を変形させる。すなわち、各  $A_i$  上で定義 10 の (i), (ii) を満たすようにする。“どのようにするか?”

我々は Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムを知っている。基本的にはこの Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムの流れで minimal CGS を計算するようにする。しかしながら、 $A_i$  上の特化準同型写像  $\sigma$  により  $\sigma(G_i)$  がグレブナー基底になることがすでにわかっているので、Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムで必要だった真に簡約グレブナー基底の計算は必要なく、我々は“簡約化だけ”で簡約グレブナー基底を得ることができる。ここが大きな違いである。次のアルゴリズム MINIMAL は  $A_i$  上で  $F$  の minimal CGS を出力する。

### アルゴリズム MINIMAL

**Input:**  $(E, N, G_{p_1} \cup G_{p_2} \cup \dots \cup G_{p_s})$ , アルゴリズム NEW からの出力の CGS の 1 つの断片 (記号はアルゴリズム NEW から同じものを使う),

**Output:**  $(E_i, N_i, G_i)$  の有限集合;  $\{(\mathbb{V}(E_i) \setminus \mathbb{V}(N_i)), G_i\}$  は、 $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N)$  上で、 $F$  の minimal CGS となる。

**BEGIN**

$\{f_1, \dots, f_s\} \leftarrow$  各  $1 \leq j \leq s$  において、 $G_{p_j}$  から 1 つ元  $f_j$  を選択せよ。

$\{h_1, \dots, h_s\} \leftarrow \text{lc}_{\bar{X}}(\{f_1, \dots, f_s\})$ ;  $h \leftarrow \text{lcm}\{h_1, \dots, h_s\}$ ;

**if**  $\{(\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N)) \setminus \mathbb{V}(h) \neq \emptyset$  **then**

$\mathcal{PGB} \leftarrow \{(\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N)) \setminus \mathbb{V}(h), \{f_1, \dots, f_s\}\}$ ;

**else**  $\mathcal{PGB} \leftarrow \{\}$

**end-if**

$\mathcal{PGB} \leftarrow \mathcal{PGB} \cup \text{Mini\_main}(E \cup \{h_1\}, N, (G_{p_1}, \dots, G_{p_s}))$

$\cup \text{Mini\_main}(E \cup \{h_2\}, N \wedge \{h_1\}, (G_{p_1}, \dots, G_{p_s}))$

$\cup \text{Mini\_main}(E \cup \{h_3\}, N \wedge \{h_1 h_2\}, (G_{p_1}, \dots, G_{p_s}))$

$\cup \dots \cup \text{Mini\_main}(E \cup \{h_s\}, N \wedge \{h_1 \dots h_s\}, (G_{p_1}, \dots, G_{p_s}))$ ;

**return**  $\mathcal{PGB}$ ;

**END**

### サブアルゴリズム Mini\_main

**Input:**  $(E, N, (G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_s}))$ :  $E, N, K[\bar{A}]$  の有限集合;  $G_{p_i}, K[\bar{A}, \bar{X}]$  の有限集合 ( $1 \leq i \leq s$ ).

**Output:**  $(E_i, N_i, G_i)$  の有限集合;  $\{(\mathbb{V}(E_i) \setminus \mathbb{V}(N_i)), G_i\}$  は、 $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N)$  上で、 $F$  の minimal CGS となる。

**BEGIN**

**if**  $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N) = \emptyset$  **then return**  $\{\}$  **end-if**

```

 $G_{p_i} \leftarrow$  各  $1 \leq i \leq s$  で,  $G_{p_i}$  を  $E$  によって簡約化せよ. (**)
 $\{f_1, \dots, f_s\} \leftarrow$  select  $f_j$  from  $G_{p_j}$  for each  $1 \leq j \leq s$ .
 $\{h_1, \dots, h_s\} \leftarrow \text{lc}_{\bar{X}}(\{f_1, \dots, f_s\}); h \leftarrow \text{lcm}\{h_1, \dots, h_s\};$ 
if  $\{(\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N)) \setminus \mathbb{V}(h) \neq \emptyset$  then
 $\mathcal{PGB} \leftarrow \{(\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N)) \setminus \mathbb{V}(h), \{f_1, \dots, f_s\}\};$  else  $\mathcal{PGB} \leftarrow \{\}$ 
end-if
 $\mathcal{PGB} \leftarrow \mathcal{PGB} \cup \text{Mini\_main}(E \cup \{h_1\}, N, (G_{p_1}, \dots, G_{p_s}))$ 
   $\cup \text{Mini\_main}(E \cup \{h_2\}, N \wedge \{h_1\}, (G_{p_1}, \dots, G_{p_s}))$ 
   $\cup \text{Mini\_main}(E \cup \{h_3\}, N \wedge \{h_1 h_2\}, (G_{p_1}, \dots, G_{p_s}))$ 
   $\cup \dots \cup \text{Mini\_main}(E \cup \{h_s\}, N \wedge \{h_1 \dots h_s\}, (G_{p_1}, \dots, G_{p_s}));$ 
return  $\mathcal{PGB};$ 
END

```

Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムと違う箇所は サブアルゴリズム `Mini.main` の (\*\*) である。我々は真にグレブナー基底計算アルゴリズムを使って簡約グレブナー基底を計算する必要がない。我々は簡約化  $G_{p_i} \downarrow_E$  の計算だけでよい ( $1 \leq i \leq s$ )。もちろん,  $\langle F \cup E \rangle$  の簡約グレブナー基底計算の計算量は,  $G_{p_i} \downarrow_E$  の簡約化計算より大きい。この点から, Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムより, アルゴリズム MINIMAL は効率的であると考えられる。アルゴリズム MINIMAL がどのように働くが次の例でみる。

**例 11.** 例 9 と同じ問題を考える。例 9 から,  $F$  の CGS は次である:  $\{\{W, G_x \cup G_y\}, \{\mathbb{V}(a), G_{11}\}, \{\mathbb{V}(a+b^2+b), (-b+2)a-1, a^2+6a-b-3\}, G_{22}\}$  ただし,  $W = \mathbb{C}^2 \setminus (\mathbb{V}(a) \cup \mathbb{V}(a+b^2+b), (-b+2)a-1, a^2+6a-b-3)$  である。

各断片において, アルゴリズム MINIMAL を適応する。2つの断片  $\{\mathbb{V}(a), G_{11}\}$  と  $\{\mathbb{V}(a+b^2+b), (-b+2)a-1, a^2+6a-b-3\}, G_{22}\}$  を入力したならば, アルゴリズム MINIMAL は入力と同じものを返す。断片  $\{\mathbb{C}^2 \setminus (\mathbb{V}(a) \cup \mathbb{V}(a+b^2+b), (-b+2)a-1, a^2+6a-b-3)\}, G_x \cup G_y\}$  の場合を考える。

- (1)  $G_y$  から  $(a+b^2+b)y$ ,  $G_x$  から  $ax+by$  を選択すると,  $W \setminus \mathbb{V}(a(a+b^2+b)) = \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{V}(a(a+b^2+b)) \neq \emptyset$  なので, 1つの断片として  $\{\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{V}(a(a+b^2+b)), \{(a+b^2+b)y, ax+by\}\}$  を得る。このとき,  $\mathbb{V}(a) \cap W = \emptyset$  なので, 我々は  $a=0$  の場合を考える必要がない。ここで次の計算のため,  $E = \{a+b^2+b\}$  とおく。
- (2) 次に,  $E$  による簡約化の計算が必要になる。すなわち,  $G_y \downarrow_E$  と  $G_x \downarrow_E$  を計算する。このとき,  $G_y := G_y \downarrow_{\{a+b^2+b\}} = \{(a^2+6a-b-3)y, ((-b+2)a-1)y\}$  であり  $G_x := G_x \downarrow_{\{a+b^2+b\}} = \{ax+by\}$  である。 $G_y$  から  $(a^2+6a-b-3)y$ ,  $G_x$  から  $ax+by$  を選択すると, 我々は1つの断片として  $\{\mathbb{V}(a+b^2+b) \setminus \mathbb{V}(a(a^2+6a-b-3)), \{(a^2+6a-b-3)y, ax+by\}\}$  を得る。次の計算のため  $E$  を更新し,  $E := E \cup \{a^2+6a-b-3\}$  とする。
- (3) ここで,  $G_y := G_y \downarrow_E = \{((-b+2)a-1)y\}$ ,  $G_x := G_x \downarrow_E = \{ax+by\}$  であるので, 1つの断片として  $\{\mathbb{V}(a+b^2+b, a^2+6a-b-3) \setminus \mathbb{V}(a((-b+2)a-1)), \{((-b+2)a-1)y, ax+by\}\}$  を得る。代数構造的集合  $\mathbb{V}(a+b^2+b, a^2+6a-b-3, (-b+2)a-1) \cap W = \emptyset$  であるので, アルゴリズム MINIMAL はここで停止する。

これにより,  $F$  の minimal CGS を  $\langle E \cup F \rangle$  の簡約グレブナー基底計算をすることなしに求めることができた。

定義 10 の (2) を『 $\sigma_{\bar{a}}(G_i)$  はイデアル  $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle \subset L[\bar{X}]$  の簡約グレブナー基底である。ただし,  $G_i \subset K(\bar{A})[\bar{X}]$  とする。』に変えることで **reduced CGS** を定義することができる。論文 [13] に書いている方法

を使えば, minimal CGS を計算後, 簡単に reduced CGS を得ることは可能である, ただし,  $K(\bar{A})[\bar{X}]$  で考えなければならない.

## 6 まとめ

本稿では, より強いイデアルの安定条件を紹介した. またそれを使った CGS 計算アルゴリズムを紹介した. 著者は紹介したアルゴリズム NEW と Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムを計算機代数システム Risa/Asir [11] 上で実装した. 計算実験では本稿で紹介した新しいアルゴリズム NEW が多くの例で Kapur-Sun-Wang のアルゴリズムより, 計算時間, 断片の数とも優れていた.

minimal CGS を出力するアルゴリズムはまだ実装されていない. 多分, 効率的だと類推されるが, 計算実験をするまで実際のところわからない. 今後, 実装して比較することが課題である.

最後に, 代数構造的集合が空になるかどうかチェックするアルゴリズムについて本稿では触れていないので一言書く. これに関しては, いくつかのアルゴリズムがすでに紹介されているが, 著者の経験上, Kapur-Sun-Wang[6] が紹介しているアルゴリズムが最も速い. 『与えられた代数的構造集合が空になるか?』のチェックはこのアルゴリズムを使うべきだと考える.

## 謝辞

本研究は科学研究費 (課題番号:22740065) の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [1] Becker, T. On Gröbner bases under specialization. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 5:1–8, 1994.
- [2] Gao, X. and Chou, S. Solving Parametric Algebraic Systems. In Wang, P., editor, *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 335–341. ACM-Press, 1992.
- [3] Gianni, P. Properties of Gröbner bases under specializations. In Davenport, J., editor, *EURO-CAL'87*, pages 293–297. ACM Press, 1987.
- [4] Kalkbrener, M. On the Stability of Gröbner Bases Under Specializations. *Journal of Symbolic Computation*, 24:51–58, 1997.
- [5] Kapur, D. An Approach for Solving Systems of Parametric Polynomial Equations. In Saraswat, V. and Hentenryck, P., editors, *Principles and Practice of Constraint Programming*, pages 217–244. MIT Press, 1995.
- [6] Kapur, D., Sun, Y., and Wang, D. A New Algorithm for Computing Comprehensive Gröbner Systems. In Watt, S., editor, *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 29–36. ACM-Press, 2010.
- [7] Lazard, D. and Rouillier, F. Solving Parametric Polynomial Systems. *Journal of Symbolic Computation*, 43/3:636–667, 2007.
- [8] Manubens, M. and Montes, A. Improving DISPGB algorithm using the discriminant ideal. *Journal of Symbolic Computation*, 41:1245–1263, 2006.

- [9] Montes, A. A new algorithm for discussing Gröbner basis with parameters. *Journal of Symbolic Computation*, 33/1-2:183–208, 2002.
- [10] Nabeshima, K. A Speed-Up of the Algorithm for Computing Comprehensive Gröbner Systems. In Brown, C., editor, *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 299–306. ACM-Press, 2007.
- [11] Noro, M. and Takeshima, T. Risa/Asir- A Computer Algebra System. In Wang, P., editor, *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 387–396. ACM-Press, 1992. <http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html>.
- [12] Suzuki, A. and Sato, Y. An alternative approach to Comprehensive Gröbner bases. *Journal of Symbolic Computation*, 36/3-4:649–667, 2003.
- [13] Suzuki, A. and Sato, Y. A Simple Algorithm to compute Comprehensive Gröbner Bases using Gröbner bases. In Dumas, J-G., editor, *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 326–331. ACM Press, 2006.
- [14] Weispfenning, V. Comprehensive Gröbner bases. *Journal of Symbolic Computation*, 14/1:1–29, 1992.
- [15] Weispfenning, V. Canonical Comprehensive Gröbner bases. *Journal of Symbolic Computation*, 36/3-4:669–683, 2003.