

トーリック多様体の cancellation*

大阪市立大学・理学研究科数学教室[†] 畑中 美帆
Miho Hatanaka
Department of Mathematics, Faculty of Science
Osaka City University

§1. トーリック多様体と fan の定義

定義 1

X : toric variety(トーリック多様体)

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X が複素正規代数多様体で、トーラス $T = (\mathbb{C}^*)^n$ を稠密な開部分集合として含み、さらにトーラスへのトーラス作用が自然に X へのトーラス作用に拡張しているような作用を持っているもののことである。

注意 1

toric manifold もトーリック多様体と訳すが、ここでは toric manifold はコンパクトで特異点を持たない toric variety のこととする。

定義 2

$\Delta \subset \mathbb{R}^n$: fan $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 原点を頂点に持つ convex cone の集まりで、面以外で cone が重ならないもののことである。ただし、1次元 cone の傾きは有理数でなければならない、すべての cone は直線を含まないものに限る。

また、 n 次元の fan とは、 \mathbb{R}^n 上にある fan のこととする。

fan と toric variety は以下の定理にあるように関係がある。

出典：「変換群の幾何の展開」数理解析研究所講究録
〒606-8502 京都市左京区北白川追分町

定理 1 (トーリック幾何の基本定理)

fan のカテゴリと toric variety のカテゴリはカテゴリとして同型である。

このことから、fan と toric variety の間には 1 対 1 対応があることがわかり、toric variety の情報はすべて fan から読み取れることもわかる。

fan と toric variety の関係

fan	toric variety
\mathbb{R}^n を覆っている。	コンパクト
n 次元 cone の数	オイラー標数
各 cone の生成ベクトルが \mathbb{Z}^n の基底の一部	特異点を持たない

他にも、基本群やコホモロジー環も fan からわかる。

- 基本群の求め方

$X(\Delta)$ を fan Δ からできる toric variety とする。 $X(\Delta)$ の基本群は

$$\pi_1(X(\Delta)) \cong N/N'$$

と表される。ここで、 $N = \mathbb{Z}^n$, $N' = \sum_{\sigma \in \Delta} N_\sigma$: N_σ たちで生成される部分群, N_σ : (σ を含む最小の部分空間) $\cap N$

- コホモロジー環の求め方

X を toric manifold とする。 X のコホモロジー環は次のようになる。

$$H^*(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[D_1, \dots, D_d]/I$$

ここで、 d は fan の 1 次元 cone の数を表し、 I は次の (1)、(2) を relation として含むイデアルである。

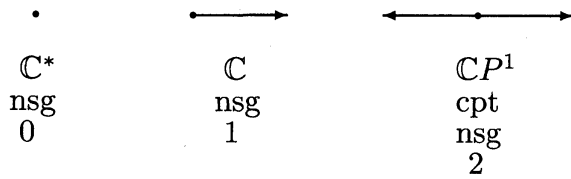
$$(1) D_{i_1} \dots D_{i_t} = 0 \quad (\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_t} \text{ が 1 つの cone に含まれない})$$

$$(2) \sum_{i=1}^d \langle u, v_i \rangle D_i = 0$$

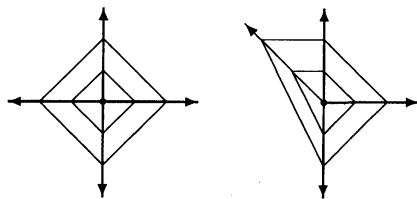
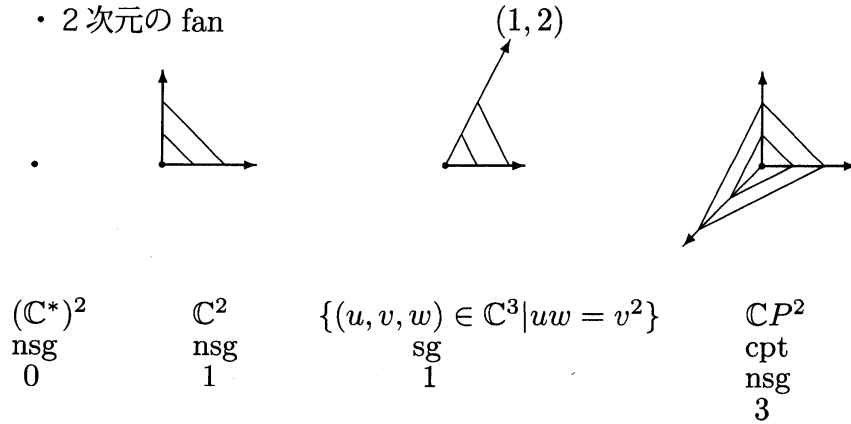
ここで、 v_i は 1 次元 cone τ_i の first lattice point、 u は \mathbb{Z}^n の元、 $\langle u, v_i \rangle$ は u と v_i のユークリッド内積とする。

以下、fan と toric variety の例を紹介する。

・ 1次元の fan



・ 2次元の fan

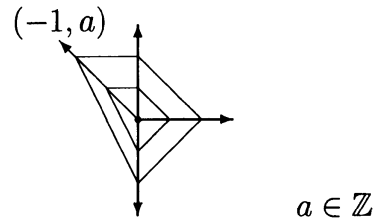


※ 2次元の fan は \mathbb{R}^2 上にある

Hirzebruch surface
 $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$
 cpt
 nsg
 4

ここで、fan のすぐ下はその fan に対応する toric variety、cpt はコンパクト、nsg は特異点を持たない、sg は特異点を持つ、一番下の数字はオイラー標数を表す。

次に、variety としての同型と微分同相の違いについて Hirzebruch surface を用いて説明する。Hirzebruch surface の fan は、一般的に次のような形をしている。



この fan からできる Hirzebruch surface を F_a で表す。このとき、次が成り立つ。

$$F_a \text{ と } F_b \text{ が variety として同型} \Leftrightarrow a = b \text{ or } -b$$

$$F_a \text{ と } F_b \text{ が微分同相} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{2}$$

実際、次のことが成り立つ。

$$2 \text{ つの toric variety } X \text{ と } Y \text{ が variety として同型}$$

$$\Leftrightarrow X \text{ の fan } \Delta_X \text{ と } Y \text{ の fan } \Delta_Y \text{ が同型}$$

ここで、2 つの fan Δ_X と Δ_Y が同型であるとは、 \mathbb{Z}^n から \mathbb{Z}^n への同型写像が存在し、その写像で Δ_X と Δ_Y が写りあうことである。ただし、 X と Y の次元はともに n 次元とする。一方で、2 つの toric manifold X と Y が微分同相になるための fan の条件は知られていない。そのため、variety の同型に関する問題は、トーリック幾何の基本定理（上の関係）を使うことができるが、微分同相に関する問題は、同じようにはできない。

ここで、toric variety の分類について紹介する。variety としての同型に関する分類は、fan の分類に帰着できるが、微分同相に関する分類は fan を使うことはできない。しかし、2 次元以下であれば分類は知られている。

1 次元の toric manifold ; $\mathbb{C}P^1$

2 次元の toric manifold ; $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$

$$\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2} \# \dots \# \overline{\mathbb{C}P^2}$$

§2. トーリック多様体の分解の一意性と cancellation

ここでは、トーリック多様体の分解の一意性と cancellation 問題について紹介する。

定理 2

各整数 i, j に対して、 X_i, Y_j を (variety として、直積に関して) 既約な toric variety と

する。この時 $X_1 \times \cdots \times X_k$ と $Y_1 \times \cdots \times Y_l$ が variety として同型であれば、 $k = l$ であり、対称群 S_k の元 σ が存在し、どの X_i も $Y_{\sigma(i)}$ と variety として同型になる。

この定理により、toric variety X の既約な直積分解の仕方は、variety 同型に関して、順序を除き一意であることがわかる。この定理は、トーリック幾何の基本定理を用いて fan の言葉に書き直すことで証明できる。

この定理から toric variety の variety 同型に関する cancellation が成り立つことがわかる。

系 1

X, Y, Z を toric variety とする。このとき、 $X \times Z$ と $Y \times Z$ が variety として同型であれば、 X と Y が variety として同型である。

次に、variety 同型を微分同相に変えると以下が成り立つ。

定理 3

各 i, j に対して、 X_i と Y_j を (smooth manifold として、直積に関して) 既約な複素 2 次元以下の toric manifold とする。このとき、 $X_1 \times \cdots \times X_k$ と $Y_1 \times \cdots \times Y_l$ が微分同相であれば、 $k = l$ であり、対称群 S_k の元 σ が存在し、どの X_i も $Y_{\sigma(i)}$ と微分同相になる。

この定理により、toric manifold X が複素 2 次元以下の既約な toric manifold に微分同相に関して直積分解できれば、その分解は順序を除き一意であることがわかる。

注意 2

(直積に関して) “smooth manifold として既約” と “variety として既約” は異なる。この違いを Hirzebruch surface を用いて説明する。

前の章で、1 次元 cone の傾きが $(1, 0), (0, 1), (0, -1), (-1, a)$ となる fan からできる Hirzebruch surface を F_a と表した。 F_2 について見てみる。 F_2 は $F_0 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ と微分同相なので、 F_2 は smooth manifold として既約でないことがわかる。一方で、 F_2 は $F_0 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ と variety として同型ではないので、 F_2 は variety としては既約である。この例だけでも、“smooth manifold として既約” と “variety として既約” は異なることがわかる。

上の定理の証明にトーリック幾何の基本定理を使うことはできない。前章で述べたが、2 つの toric manifold が微分同相になるための fan の条件がわかっていないからである。そこで、次の 2 つの補題を紹介する。

補題 1

各 i, j に対して、 X_i と Y_j を (smooth manifold として、直積に関して) 既約な複素 2 次元以下の toric manifold とする。このとき、コホモロジー環 $H^*(X_1 \times \cdots \times X_k)$ と $H^*(Y_1 \times \cdots \times Y_l)$ が同型であれば、 $k = l$ であり、対称群 S_k の元 σ が存在し、どの $H^*(X_i)$ も $H^*(Y_{\sigma(i)})$ と同型になる。

補題 2

X と Y を複素 2 次元以下の toric manifold とする。このとき、 X と Y が微分同相になるための必要十分条件は、それぞれのコホモロジー環 $H^*(X)$ と $H^*(Y)$ が同型であることである。

注意 3

上の 2 つの補題はいずれも高次元で成り立つかどうかはわかっていない。補題 2 を一般次元で考えたものは、コホモロジー剛性問題と呼ばれている。コホモロジー剛性問題は、部分的な肯定的結果が知られているが、反例はまだ知られていない。(このコホモロジー剛性問題に関する参考文献は [3] で挙げている。)

系としてコホモロジー同型に関する cancellation について紹介する。

系 2

X, Y, Z を複素 2 次元以下の toric manifold とする。このとき、コホモロジー環 $H^*(X \times Z)$ と $H^*(Y \times Z)$ が同型であれば、 $H^*(X)$ と $H^*(Y)$ が同型になる。

この系から、微分同相に関する cancellation も成り立つことがわかる。

系 3

X, Y, Z を複素 2 次元以下の toric manifold とする。このとき、 $X \times Z$ と $Y \times Z$ が微分同相であれば、 X と Y は微分同相である。

参考文献

- [1] William Fulton. *Introduction to Toric Varieties*. Ann. of Math. Studies, vol.131, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.
- [2] Tadao Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry*. 3.Folge. Band 15. A Series of Modern Surveys in Mathematics. 1985.

- [3] 栞田 幹也.『論説 トーリックトポロジー』. 2010年7月 夏季号. 第62巻 第3号. 日本数学会編集. 岩波書店