数理解析研究所講究録
第1816巻 2012年 79-82

可解多様体のファイバー束のドラームホモトピー

東京大学数理科学研究科　糟谷 久矢
Hisashi Kasuya
Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo

1　目的

論文 [8] の内容に関して、論文内ではあまり説明されなかった観点から紹介し、さらにそこから考えられる新しい展望について紹介する。

2　背景：冪零ドラームホモトピー

ドラームホモトピー理論とは、多様体の微分形式を用いてホモトピーの情報を得る手法に関する理論である。最も重要な手法として、Sullivan の極小モデル理論がある。Sullivan はコホモロジー連結 ($H^0\cong$（係数体））な微分を持つ次数付き代数 (DGA) に対して、コホモロジー同型を導く射を持つ”極小”な DGA が一意に存在する事を示した（[13]）。この”極小”な DGA を Sullivan の極小モデルと呼ぶ。ドラームホモトピー理論では、多様体の微分形式がなす DGA(ドラーム DGA) の Sullivan の極小モデルを考える。

M を単連結なコンパクト多様体とする。このとき、ドラーム DGA$A^*(M)$ の Sullivan 極小モデル $\mathcal{M}_M=\bigwedge V^*$ に対して同型 $V^*\cong Hom(\pi_*,\mathbb{R})$ が成り立つ ([13])。また、G を格子 Γ を持つ単連結冪零リー群とし、$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする。このとき、冪零多様体 G/Γ のドラーム DGA$A^*(G/\Gamma)$ の Sullivan 極小モデルはリー環の DGA$\bigwedge\mathfrak{g}^*$ に同型である ([10],[6])。ここで、冪零多様体 G/Γ は Γ を基本群に持つ aspherical 多様体である。さらに冪零多様体 G/Γ 上の単連結なコンパクト多様体をファイバーに持つファイバー束

$$M\to E\to G/\Gamma$$

を考える。G/Γ の基本群はファイバー M に冪零に作用していると仮定する。Halperin や Grivel の結果より ([5], [3])、$A^*(E)$ の Sullivan の極小モデルは $\bigwedge \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M}_M$(ここで $\mathcal{M}_M$ 上の微分は $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ によって捩られている)。

3 結果と展望：可解ドラームホモトピー

前章において、冪零な基本群を持つ多様体のドラーム DGA$A^*(M)$ の Sullivan 極小モデルがホモトピーの良い情報を持っている事を見た。では、より一般的な場合である基本群が可解の場合にはどうだろうか。

単連結可解リー群 $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^2$、$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ を考える。このとき、G は格子 Γ を持つ。G/Γ のドラーム DGA$A^*(G/\Gamma)$ の Sullivan 極小モデルは $S^1 \times S^2$ の Sullivan 極小モデルと同型になる ([12])。ここで、G/Γ は aspherical であり、その基本群 Γ は非可換な可解群である。よって、$A^*(G/\Gamma)$ の Sullivan 極小モデルは G/Γ のホモトピーに関してよい情報を持っているとは言い難い。

Hain の DGA:X を多様体、$\cdot\rho : \pi_1(X) :\to T$ を X の基本群からダイアゴナルな代数群 T へのザリスキ稠密な像を持つ表現とし、$\{E_\alpha\}$ を T の 1 次元表現全体から得られる X の平坦束の集合とする。このとき、直和 $A(X, \mathcal{O}_\rho) = \bigoplus A(X, E_\alpha)$ は DGA となる。

私は [8] で次を示した。

定理: G を単連結可解リー群で格子 Γ を持つ者とする。表現 $\mathrm{Ad}_s : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ を G の随伴表現 Ad の（リーの定理による）三角化の対角部分として定義する。この表現 Ad_s に対して、Hain の DGA$A(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\mathrm{Ad}_s})$ を考える。このとき、$A(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\mathrm{Ad}_s})$ の Sullivan 極小モデルは、G から定まる unipotent hull と呼ばれるあるユニポテント代数群 U_G（コメント (1) 参照）のリー環 $\mathfrak{u}_G$ の DGA$\bigwedge \mathfrak{u}_G^*$ と同型である。

Halperin や Grivel の結果を冪零ではないファイバー束上の Hain の DGA に関して拡張する事で次の予想を証明したい。

予想: 可解多様体 G/Γ 上の単連結なコンパクト多様体をファイバーに持つファイバー束

$$M \to E \to G/\Gamma$$

を考える。このとき、Γのダイアゴナルな表現ρをうまくとるとHainのDGA $A(E, \mathcal{O}_\rho)$ の Sullivan 極小モデルは $\bigwedge \mathfrak{u}_G^* \otimes \mathcal{M}_M$ となるだろう。

4 コメント、リマーク

(1) 単連結可解リー群Gに対して、次の条件を満たすような代数群H_Gが一意に存在する。([11])：

• 単射$i : G \to H_G(\mathbb{R})$で像$i(G)$がZariski-位相に関して$H_G$内で稠密になる者が存在する。

• U_GをH_Gの極大ユニポテント正規部分群とする。$dim U_G = \dim G$が成り立つ。

• U_Gに関するH_Gの中心化群はU_Gに含まれる。

このような代数群H_Gをalgebraic hullと呼び、U_Gをunipotent hullと呼ぶ。

(2) ドラームホモトピー理論において、Sullivanの極小モデルと並んで重要な手法として、Chenの反復積分がある。U_Gは格子ΓのAd_sに関するMalcev完備化と見る事ができ、Chenの反復積分の拡張であるExponential反復積分で記述する事が出来る([7])。

(3) 複素可解多様体のDolbeault理論へのアナロジーが得られる。([9])。

参考文献

[1] Y. Félix, J. Oprea and D. Tanré, Algebraic Models in Geometry, Oxford Graduate Texts in Mathematics 17, Oxford University Press 2008.

[2] M. Fernandez, and A. Gray, Compact symplectic solvmanifolds not admitting complex structures. Geom. Dedicata **34** (1990), no. 3, 295–299.

[3] P. P. Grivel, Formes différentielles et suites spectrales, Ann. Inst. Fourier **29** (1979), 17–37.

[4] R. M. Hain, The Hodge de Rham theory of relative Malcev completion. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **31** (1998), no. 1, 47–92.

[5] S. Halperin, Lectures on minimal models, Soc. Math. France **9–10** (1983).

[6] K. Hasegawa, Minimal models of nilmanifolds. Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 1, 65–71.

[7] H. Kasuya, Algebraic hulls of solvable groups and exponential iterated integrals on solvmanifolds. Geom. Dedicata DOI: 10.1007/s10711-012-9725-1.

[8] H. Kasuya, Minimal models, formality and hard Lefschetz properties of solvmanifolds with local systems. To appear in J. Differential Geometry. http://arxiv.org/abs/1009.1940.

[9] H. Kasuya, Dolbeault Cohomology of complex parallelizable solvmanifolds. http://arxiv.org/abs/1207.3988

[10] K. Nomizu, On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups.

[11] M.S. Raghnathan, Discrete subgroups of Lie Groups, Springer-verlag, New York, 1972.

[12] J. Oprea, and A. Tralle, Symplectic manifolds with no Kähler structure. Lecture Notes in Math. 1661, Springer (1997).

[13] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **47** (1977), 269–331 (1978).