

### 3次元球面内の平坦トーラスに関する直径予想

宇都宮大学教育学部 北川 義久 (Yoshihisa Kitagawa)  
Faculty of Education,  
Utsunomiya University

#### 1. 序

本稿では、3次元単位球面  $S^3$  内の平坦トーラスに関する次の予想について、東京工業大学の梅原雅顕氏との共同研究で得られた最近の研究成果 [5] を中心に説明する。

**予想 (直径予想).**  $f: M \rightarrow S^3$  を2次元平坦トーラス  $M$  から  $S^3$  への等長はめ込みとすると  $\text{Diam}(f) = \pi$  である。ただし、 $\text{Diam}(f)$  は像  $f(M)$  の直径を表す。

まず、この予想の背景を説明しよう。定数  $\theta$  が  $0 < \theta < \pi/2$  をみたすとき、 $\mathbb{R}^4$  内の曲面  $M_\theta$  を方程式

$$x_1^2 + x_2^2 = \cos^2 \theta, \quad x_3^2 + x_4^2 = \sin^2 \theta$$

により定めると、 $M_\theta$  は  $S^3$  内の平坦トーラスであり  $S^3$  内の **Clifford トーラス** と呼ばれる。Clifford トーラスは、最もよく知られた  $S^3$  内の平坦トーラスであるが、次の問題は、現在、未解決である。

**問題 (Clifford トーラスの剛性に関する問題).** 写像  $i_\theta: M_\theta \rightarrow S^3$  を  $M_\theta$  の包含写像とする。このとき、任意の等長はめ込み  $f: M_\theta \rightarrow S^3$  に対して、 $f = A \circ i_\theta$  をみたす等長変換  $A: S^3 \rightarrow S^3$  は存在するか？

この問題は、 $f$  が埋め込みの場合には Yes であることが知られている ([1])。それは、次の二つの命題から得られる。

**命題 1.1** ([1]). 等長はめ込み  $f: M_\theta \rightarrow S^3$  が  $\text{Diam}(f) = \pi$  をみたせば、 $S^3$  の等長変換  $A$  が存在し  $f = A \circ i_\theta$  が成り立つ。

**命題 1.2** ([3]).  $f: M \rightarrow S^3$  を2次元平坦トーラス  $M$  から  $S^3$  への等長埋め込みとすると、 $\text{Diam}(f) = \pi$  である。

さて、命題 1.2 において、「埋め込み」という仮定を「はめ込み」という仮定に弱めることができれば、命題 1.1 によって、上記の問題は肯定的に解決することが分かる。すなわち、直径予想が証明できれば、Clifford トーラスの剛性に関する問題は完全に解決する。以上が、直径予想を研究する背景である。

次に、直径予想を解決するための戦略を述べよう。筆者は、[2]において、Periodic admissible pair (p.a.p.) と呼ばれる  $S^2$  上の曲線対  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  から平坦トーラス  $M_\Gamma$  および等長はめ込み  $f_\Gamma : M_\Gamma \rightarrow S^3$  が構成できることを示し、さらに、 $S^3$  の中に等長的にはめ込まれた平坦トーラスは、すべてこの構成法により実現できることを示した (§2)。したがって、任意の p.a.p.  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  に対して  $\text{Diam}(f_\Gamma) = \pi$  を示すことができれば直径予想が解決できることになる。一方、 $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  がある種の接触条件（第二種の2重接触条件）をみたすことと  $\text{Diam}(f_\Gamma) = \pi$  が同値であることが証明でき (§3)、直径予想の研究は任意の p.a.p. が第二種の2重接触条件をみたすかどうかを調べることに帰着される。

以上の戦略にしたがって直径予想を研究することにより、以下の結果を得た。

**定理 1.1** ([5]).  $f : M \rightarrow S^3$  を2次元平坦トーラス  $M$  の等長はめ込みとする。もし  $f$  の平均曲率  $H$  が非負または非正ならば、 $\text{Diam}(f) = \pi$  である。

この定理と命題 1.1 から、Clifford トーラスの剛性に関する、次の定理が得られる。

**定理 1.2** ([5]). 等長はめ込み  $f : M_\theta \rightarrow S^3$  の平均曲率  $H$  が非負または非正ならば、 $f = A \circ i_\theta$  をみたす等長変換  $A : S^3 \rightarrow S^3$  が存在する。

本稿では

- $S^3$  内の平坦トーラスの構成法について、四元数を用いて説明し (§2),
- 定理 1.1 の証明の概要を述べる (§3, §4).
- さらに、 $S^3$  内の平坦波面の構成法についても説明し、 $S^3$  内には直径が  $\pi$  より小さいコンパクトな平坦波面が存在することを示す (§5).

なお、 $S^3$  内の平坦トーラスの構成法の応用として、定理 1.1 や定理 1.2 以外にも興味深い結果が得られている。それらについては [4] を参照されたい。

## 2. $S^3$ 内の平坦トーラスの構成法

本節では、 $S^2$  上の曲線対から  $S^3$  内の平坦トーラスを構成する方法を四元数を用いて説明する。

2.1. **準備.**  $\mathbb{H}$  を四元数全体の集合とし、 $\mathbb{H}$  と4次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^4$  を同一視する。

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longleftrightarrow x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}.$$

このとき単位球面  $S^2$  と  $S^3$  は次のように与えられる。

$$S^2 = \{x \in \text{Im } \mathbb{H} : |x| = 1\}, \quad S^3 = \{x \in \mathbb{H} : |x| = 1\},$$

ただし  $\text{Im } \mathbb{H}$  は  $\mathbb{H}$  の虚部であり,  $|x|^2 = x\bar{x}$  である.  $S^3$  は四元数の積によって群になることが分かる.  $S^2$  の単位接束  $US^2$  を  $S^2 \times S^2$  の部分集合と同一視する. すなわち

$$US^2 = \{(x, v) \in S^2 \times S^2 : x \perp v\}.$$

さらに, 写像  $p_2 : S^3 \rightarrow US^2$  を

$$(2.1) \quad p_2(g) = (\text{Ad}(g)\mathbf{i}, \text{Ad}(g)\mathbf{j}) = (\mathbf{gig}^{-1}, \mathbf{gig}^{-1})$$

と定めると,  $p_2$  は 2 重被覆であり

$$(2.2) \quad p_2(g) = p_2(-g) \quad \forall g \in S^3$$

をみたす.

## 2.2. 構成法.

**定義 2.1.**  $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow S^2$  ( $i = 1, 2$ ) を  $S^2$  上の周期的正則曲線でその測地的曲率  $\kappa_i$  が

$$\kappa_1(s_1) > \kappa_2(s_2) \quad \forall (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$$

をみたすとする. このとき, 組  $(\gamma_1, \gamma_2)$  を **periodic admissible pair** (以下, **p.a.p.** と略記) と呼ぶ.

任意の p.a.p.  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  に対して, 曲線  $\hat{\gamma}_i : \mathbb{R} \rightarrow US^2$  を

$$\hat{\gamma}_i = (\gamma_i, \gamma_i' / |\gamma_i'|)$$

と定め, 曲線  $c_i : \mathbb{R} \rightarrow S^3$  を  $p_2$  による  $\hat{\gamma}_i$  のリフトとする. 四元数の積から得られる  $S^3$  の群構造を用いて, 写像  $F_\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$  を

$$(2.3) \quad F_\Gamma(s_1, s_2) = c_1(s_1) \cdot c_2(s_2)^{-1}$$

と定める. このとき, 次の定理が成り立つ.

**定理 2.1** ([2]). 任意の p.a.p.  $\Gamma$  に対して, 写像  $F_\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$  は平坦はめ込みであり, 像  $F_\Gamma(\mathbb{R}^2)$  は  $S^3$  内の平坦トーラスである.

さらに,  $S^3$  内の平坦トーラスは, すべてこの方法で構成できることが分かる. すなわち, 次の定理が成り立つ.

**定理 2.2** ([2]).  $f : M \rightarrow S^3$  を 2 次元平坦トーラス  $M$  の等長はめ込みとすると, p.a.p.  $\Gamma$  が存在して  $f(M)$  と  $F_\Gamma(\mathbb{R}^2)$  は合同である.

**注 2.1.**  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  を p.a.p. とし,  $\gamma_i$  の測地的曲率を  $\kappa_i$  とすると

- (1) もし  $\kappa_1$  と  $\kappa_2$  がそれぞれ定数であれば,  $F_\Gamma$  の像は Clifford トーラスと合同である. 逆も成り立つ.

(2)  $\omega(s_1, s_2) = \cot^{-1}(\kappa_1(s_1)) + \cot^{-1}(-\kappa_2(s_2))$  と定めると, 曲面  $F_\Gamma(s_1, s_2)$  の第一および第二基本形式は

$$I = ds_1^2 + 2 \cos \omega ds_1 ds_2 + ds_2^2, \quad II = 2 \sin \omega ds_1 ds_2$$

をみます.

(3) 曲面  $F_\Gamma(s_1, s_2)$  の平均曲率は

$$H_\Gamma(s_1, s_2) = \frac{1 + \kappa_1(s_1)\kappa_2(s_2)}{\kappa_1(s_1) - \kappa_2(s_2)}$$

をみます.

(4) 曲線  $s_1 \mapsto F_\Gamma(s_1, *)$  と曲線  $s_2 \mapsto F_\Gamma(*, s_2)$  は, 曲面  $F_\Gamma(s_1, s_2)$  の漸近曲線である.

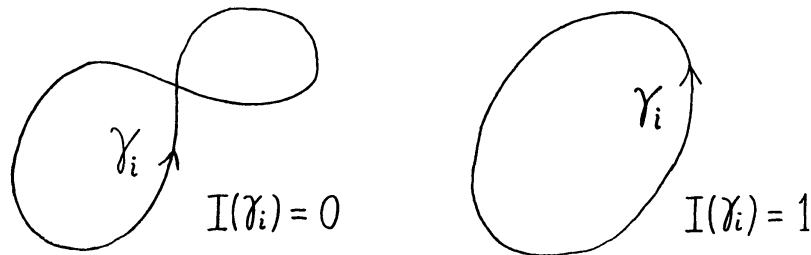
さて, 任意の p.a.p.  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  に対して,  $\ell_i > 0$  を曲線  $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow S^2$  の基本周期とし

$$I(\gamma_i) \in H_1(US^2)$$

を閉曲線  $\hat{\gamma}_i : [0, \ell_i] \rightarrow US^2$  が属するホモロジー類とする.  $US^2$  は実射影空間と位相同型だから,  $H_1(US^2) \cong \mathbb{Z}_2$  であり,  $I(\gamma_i) = 0$  または  $1$  である. このとき, (2.2) より

$$(2.4) \quad c_i(s + \ell_i) = \begin{cases} c_i(s) & \cdots & I(\gamma_i) = 0, \\ -c_i(s) & \cdots & I(\gamma_i) = 1 \end{cases}$$

であることが分かる.  $I(\gamma_i)$  を球面閉曲線  $\gamma_i$  の  $\mathbb{Z}_2$ -rotation index という.



$S^3$  の対蹠写像  $\sigma : S^3 \rightarrow S^3$  を  $\sigma(x) = -x$  により定義すると, 次の命題が成り立つ.

**命題 2.1.** もし  $I(\gamma_1) = 1$  または  $I(\gamma_2) = 1$  ならば,  $F_\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$  の像は対蹠写像  $\sigma$  により不変である.

**証明.** (2.3) と (2.4) による. □

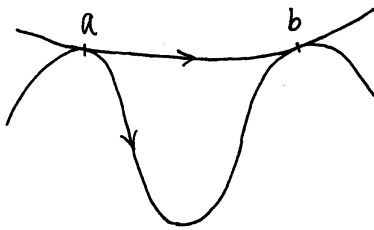
## 3. 2重接触予想

本節では、直径予想と同値な予想である2重接触予想について説明し、ある条件の下で、2重接触予想を証明する。

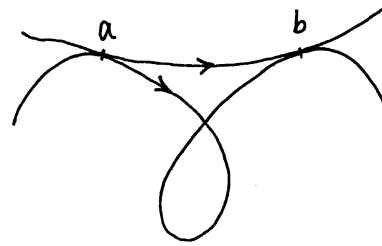
## 3.1. 直径予想と2重接触予想.

**定義 3.1.** 二つの正則曲線  $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow S^2$  ( $i = 1, 2$ ) の組  $(\gamma_1, \gamma_2)$  が第一種 (第二種) の2重接触を持つとは、実数  $a_1, b_1, a_2, b_2$  と2点  $A, B \in US^2$  が存在して次の条件 (1) と (2) をみたすことである。

- (1)  $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \hat{\gamma}_1(a_1) = \hat{\gamma}_2(a_2) = A, \hat{\gamma}_1(b_1) = \hat{\gamma}_2(b_2) = B,$
- (2)  $A$  から  $B$  に至る  $US^2$  内の二つの道  $\hat{\gamma}_1|[a_1, b_1]$  と  $\hat{\gamma}_2|[a_2, b_2]$  はホモトピー同値である (ホモトピー同値でない)。



第一種



第二種

**補題 3.1** ([5]).  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  を p.a.p. とすると、次の (1) と (2) は同値である。

- (1)  $S^2$  の等長変換  $\alpha \in SO(3)$  が存在して、 $(\alpha\gamma_1, \gamma_2)$  は第二種の2重接触を持つ。
- (2)  $\text{Diam}(F_\Gamma) = \pi$ .

**証明.** ここでは (1)  $\Rightarrow$  (2) のみを示す。(1) より、実数  $a_i < b_i$  ( $i = 1, 2$ ) と2点  $A, B \in US^2$  が存在し、次の条件をみたす。

- (イ)  $\widehat{\alpha\gamma_1}(a_1) = \hat{\gamma}_2(a_2) = A, \widehat{\alpha\gamma_1}(b_1) = \hat{\gamma}_2(b_2) = B,$
- (ロ)  $US^2$  内の二つの道  $\widehat{\alpha\gamma_1}|[a_1, b_1]$  と  $\hat{\gamma}_2|[a_2, b_2]$  はホモトピー同値でない。

ところで、 $\alpha \in SO(3)$  だから、 $\text{Ad}(g) = \alpha$  をみたす  $g \in S^3$  が存在する。ここで、 $c_i : \mathbb{R} \rightarrow S^3$  を二重被覆  $p_2 : S^3 \rightarrow US^2$  による  $\hat{\gamma}_i$  のリフトとすると、 $gc_1$  は  $p_2$  による  $\widehat{\alpha\gamma_1}$  のリフトである。このとき、 $\widehat{\alpha\gamma_1}(a_1) = \hat{\gamma}_2(a_2) = A$  より  $gc_1(a_1) = c_2(a_2)$  としてよいことが分かる。また、 $\widehat{\alpha\gamma_1}(b_1) = \hat{\gamma}_2(b_2) = B$  より  $gc_1(b_1) = \pm c_2(b_2)$  であるが、(ロ) より  $gc_1(b_1) = -c_2(b_2)$  である。よって、 $F_\Gamma(a_1, a_2) = g^{-1} = -F_\Gamma(b_1, b_2)$  であり、 $\text{Diam}(F_\Gamma) = \pi$  が成り立つ。  $\square$

定理 2.2 と 補題 3.1 により、直径予想は次の予想と同値であることが分かる。

**予想 (2重接触予想).** 任意の p.a.p.  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  に対して,  $S^2$  の等長変換  $\alpha \in SO(3)$  が存在して,  $(\alpha\gamma_1, \gamma_2)$  は第二種の2重接触を持つ.

**注 3.1.**  $I(\gamma_1) = 1$  または  $I(\gamma_2) = 1$  であれば, 命題 2.1 と補題 3.1 から, 2重接触予想は正しいことが分かる.

**定理 3.1.** もし  $\gamma_1$  と  $\gamma_2$  が generic であり,  $\gamma_1$  と  $\gamma_2$  の測地的曲率が

$$\kappa_1(s_1)\kappa_2(s_2) < -1 \quad \forall (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$$

をみたせば, 2重接触予想は正しい. ただし,  $\gamma_i$  が generic であるとは,  $\gamma_i$  の基本周期を  $\ell_i$  とするとき, 閉曲線  $\gamma_i[0, \ell_i]$  が自己接触や3重点を持たないことをいう.

**3.2. 定理 3.1 の証明.** 測地的曲率についての仮定により

$$\kappa_1(s_1) > \mu, \quad \kappa_2(s_2) < -1/\mu$$

をみたす定数  $\mu > 0$  が存在する. また, 注 3.1 により,  $I(\gamma_1) = I(\gamma_2) = 0$  としてよい. すると,  $\gamma_i$  が generic であることから, 閉曲線  $\gamma_i[0, \ell_i]$  の自己交点数は奇数である. ただし,  $\ell_i$  は曲線  $\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow S^2$  の基本周期である. さて,  $\kappa_1(s_1) > \mu$  であることから, 次の命題が成り立つ.

**命題 3.1.** 曲線  $\gamma_1$  に含まれる単純ループ  $\gamma_1^*$  が存在し, 任意の点  $x \in \gamma_1^*$  に対し, 集合  $\gamma_1^* \setminus \{x\}$  は  $C_x$  の内部に含まれる. ただし,  $C_x$  は測地的曲率が  $\mu$  であり, 点  $x$  で  $\gamma_1^*$  と同方向接触する有向円を表す (図 1).

一方,  $\kappa_2(s_2) < -1/\mu$  であることから, 次の命題が成り立つ.

**命題 3.2.**  $S^2$  上の有向円  $C$  が存在し, (1)–(4) が成り立つ (図 2).

- (1)  $C$  の測地的曲率は  $\mu$ ,
- (2)  $C$  は 2点  $A, B$  において  $\gamma_2$  と同方向接触する,
- (3) 曲線  $\gamma_2[A, B]$  の自己交点は  $P$  だけである,
- (4) 三つの曲線  $\gamma_2[A, P]$ ,  $\gamma_2[P, B]$  および  $C[B, A]$  をつなげると単純閉曲線になる.

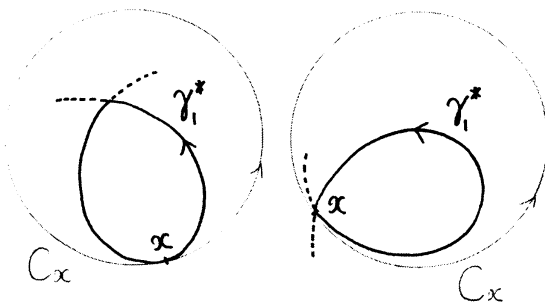


図 1

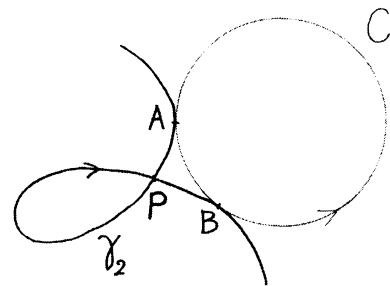


図 2

ここで、 $SO(3)$  内の連続曲線  $\alpha_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$  を次のように選ぶ.

- 単純ループ  $\alpha_t \gamma_1^*$  の始点を  $A_t$  とすると,  $A_t$  は曲線  $\gamma_2[A, P]$  上にあり,  $\alpha_t \gamma_1^*$  は  $A_t$  において曲線  $\gamma_2$  と同方向接触する,
- $A_0 = A$ ,  $A_1 = P$  である.

このとき, 三つの曲線  $\gamma_2[A, P]$ ,  $\gamma_2[P, B]$  および  $C[B, A]$  をつなげて得られる単純閉曲線を  $\bar{C}$  とすると, 命題 3.1 により,  $t=0$  のとき集合  $\alpha_t \gamma_1^* \setminus \{A_t\}$  は  $\bar{C}$  の内部に含まれる (図 3 参照).

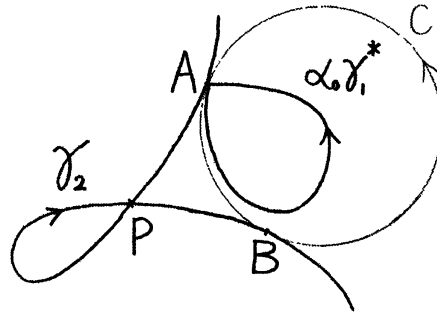


図 3

一方,  $t=1$  のとき, 集合  $\alpha_t \gamma_1^* \setminus \{A_t\}$  は  $\bar{C}$  の外部と交わる. よって, 集合  $\alpha_t \gamma_1^* \setminus \{A_t\}$  が初めて  $\bar{C}$  と接触する  $t$  が存在する. このときの接点は, 命題 3.1 により, 曲線  $\gamma_2[P, B]$  上にあることが分かる. よって, この  $t$  について,  $(\alpha_t \gamma_1, \gamma_2)$  は第二種の 2 重接触を持つ. したがって, 定理 3.1 が成り立つ.

#### 4. 定理 1.1 の証明

本節では, 2 重接触予想に関する結果である定理 3.1 と平行曲面の性質を用いて, 定理 1.1 を証明する.

**4.1. Case 1.** まず, 平均曲率  $H$  が零点を持たない場合を考えよう.  $\text{Diam}(f) < \pi$  と仮定し, 矛盾を導こう. 定理 2.2 により, p.a.p.  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  が存在し

$$\text{Diam}(F_\Gamma) < \pi \text{ であり, } H_\Gamma < 0 \text{ である.}$$

ただし,  $H_\Gamma$  は  $F_\Gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$  の平均曲率である. さらに, 必要なら  $\Gamma$  を微小変形することにより,  $\gamma_1$  と  $\gamma_2$  は generic であるとしてよい. さて,  $H_\Gamma < 0$  だから,  $\kappa_i$  を  $\gamma_i$  の測地的曲率とすると, 注 2.1(3) より

$$\kappa_1(s_1)\kappa_2(s_2) < -1 \quad \forall (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$$

である. よって, 定理 3.1 により,  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  に関する 2 重接触予想は正しい. したがって, 補題 3.1 により,  $\text{Diam}(F_\Gamma) = \pi$  であり,  $\text{Diam}(F_\Gamma) < \pi$  に反する.  $\square$

4.2. **Case 2.** 次に、一般の場合を考えよう.  $f: M \rightarrow S^3$  の平均曲率は  $H \geq 0$  をみたとすとしてよい.  $n: M \rightarrow S^3$  を  $f$  に沿う単位法ベクトル場とし,  $f_\delta: M \rightarrow S^3$  を  $f$  の平行曲面とする. すなわち

$$f_\delta = (\cos \delta)f + (\sin \delta)n, \quad \delta \in \mathbb{R}$$

とする. このとき, 十分小さな  $\delta > 0$  に対して, 次の (1)–(3) が成り立つ.

- (1)  $f_\delta: M \rightarrow S^3$  ははめ込みである,
- (2)  $f_\delta$  により  $S^3$  から  $M$  に誘導されるリーマン計量は平坦である,
- (3)  $f_\delta$  の平均曲率を  $H_\delta$  とすると,  $M$  上の任意の点で  $H_\delta > H$  である.

したがって,  $f_\delta$  に Case 1 の結果を適用することができ,  $\text{Diam}(f_\delta) = \pi$  であることが分かる. よって,  $\text{Diam}(f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Diam}(f_\delta) = \pi$  である.  $\square$

## 5. $S^3$ 内の平坦波面

本節では, 特異点を許容する平坦曲面である平坦波面について考察する.  $S^3$  内の平坦波面について定理 2.1 と類似の構成法が成り立つことを用いて,  $S^3$  内には直径が  $\pi$  より小さいコンパクトな平坦波面が存在することを示す.

**定義 5.1.** 滑らかな写像  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$  は, 滑らかな写像  $N: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$  が存在して, 次の条件 (1) と (2) が成り立つとき波面と呼ばれる. このとき,  $N$  を波面  $F$  の単位法ベクトル場という. さらに, 条件 (3) が成り立つとき  $F$  は平坦波面と呼ばれる.

- (1)  $F \perp N, \quad \partial_i F \perp N (i = 1, 2),$
- (2)  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3 \times S^3$  を  $L(p) = (F(p), N(p))$  と定めると,  $L$  ははめ込みである,
- (3) 任意の点  $p \in \mathbb{R}^2$  に対し,  $p$  の近傍  $U$  と実数  $\delta$  が存在し,  $F_\delta: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$  を  $U$  に制限した写像は平坦はめ込みである. ただし,  $F_\delta = (\cos \delta)F + (\sin \delta)N$  である.

**注 5.1.** 平坦はめ込みは平坦波面である.

**注 5.2.**  $S^2$  上の波面  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow S^2$  も上と同様に定義できる.

**定理 5.1 ([5]).**  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  を 2 つの波面  $\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow S^2 (i = 1, 2)$  の組とする.  $n_i: \mathbb{R} \rightarrow S^2$  を  $\gamma_i$  の単位法ベクトル場とし,  $v_i: \mathbb{R} \rightarrow S^2 \times S^2$  を  $v_i(s) = (\gamma_i(s), n_i(s))$  と定めると  $v_i(s)$  は  $US^2$  内の正則曲線である. さらに, 曲線  $c_i: \mathbb{R} \rightarrow S^3$  を 2 重被覆  $p_2: S^3 \rightarrow US^2$  による  $v_i$  のリフトとし,  $F_\Gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$  を

$$F_\Gamma(s_1, s_2) = c_1(s_1) \cdot c_2(s_2)^{-1}$$

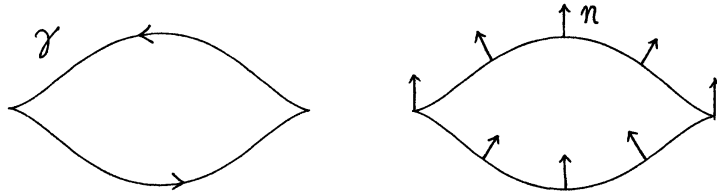
と定めると,  $F_\Gamma$  は 2 重周期を持つ平坦波面である.



この定理の応用として、 $S^3$  内には直径が  $\pi$  より小さいコンパクトな平坦波面が存在することが分かる。すなわち、次の定理が成り立つ。

**定理 5.2** ([5]). 2重周期を持つ平坦波面  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$  が存在し、 $\text{Diam}(F) < \pi$  をみたす。

**証明.** 周期的波面  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow S^2$  と単位法ベクトル場  $n: \mathbb{R} \rightarrow S^2$  を下図のように定める。



曲線  $\nu: \mathbb{R} \rightarrow US^2$  を  $\nu(s) = (\gamma(s), n(s))$  と定め、曲線  $c: \mathbb{R} \rightarrow S^3$  を 2重被覆  $p_2$  による  $\nu$  のリフトとする。写像  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$  を

$$F(s_1, s_2) = c(s_1) \cdot c(s_2)^{-1}$$

と定めると、定理 5.1 より、 $F$  は 2重周期を持つ平坦波面である。さらに、 $\nu: \mathbb{R} \rightarrow US^2$  の像が  $US^2$  の十分小さな領域に含まれるように  $\gamma$  を選んでおけば、 $\text{Diam}(F) < \pi$  が成り立つ。□

さて、定理 5.1 は、 $S^2$  上の周期的波面の組  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  から  $S^3$  内のコンパクト平坦波面が構成できることを主張するものであるが、実は、その逆も成り立つ。

**定理 5.3** ([5]).  $M$  を 2次元コンパクト多様体とし、 $f: M \rightarrow S^3$  を平坦波面とする。このとき、 $M$  はトーラスに位相同型であり、 $S^2$  上の周期的波面の組  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  と被覆写像  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  が存在して、 $f \circ p$  と  $F_\Gamma$  は合同である。すなわち、 $S^3$  の等長変換  $A$  が存在して、 $f \circ p = A \circ F_\Gamma$  が成り立つ。

### 参考文献

- [1] K. Enomoto, Y. Kitagawa and J. L. Weiner, A rigidity theorem for the Clifford tori in  $S^3$ , Proc. A.M.S. **124** (1996), 265–268.
- [2] Y. Kitagawa, Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in  $S^3$ , J. Math. Soc. Japan, **40** (1988), 457–476.
- [3] Y. Kitagawa, Embedded flat tori in the unit 3-sphere, J. Math. Soc. Japan, **47** (1995), 275–296.
- [4] 北川義久, 3次元球面内の平坦トーラス, 数学 **57** (2005), 164–177.
- [5] Y. Kitagawa and M. Umehara, Extrinsic diameter of immersed flat tori in  $S^3$ , Geometriae Dedicata **155** (2011), 105–140.