

熱方程式の逆問題とバイナリーオプション のキャリブレーションについて

同志社大学文化情報学部 大田 靖

Yasushi Ota

Faculty of Culture and Information Science, Doshisha University

九州産業大学基礎教育センター 鍛冶 俊輔

Basic education center, Kyushu Sangyo University

Abstract

本講究録では、我々はバイナリーオプションを研究対象とし、市場価格からボラティリティを再構成する方法についての結果を報告する。特に、ボラティリティが行使価格（空間変数）のみに依存する場合を考え、非線形の逆問題を解くために用いられている線形化の手法を用いて市場データからボラティリティを再構成する手法を提案し、更にいくつかの数値例を与える。

1 Introduction

株などのリスク資産 X_t の価格は、次のような確率微分方程式でモデル化されている。

$$X_0 = x, \quad dX_t = \sigma(t, X_t)X_t dW_t + (r - \delta)X_t dt$$

ここで、確率過程 $\{W_t\}_{t \in [0, \infty)}$ は $W_0 = 0$ を満たすブラウン運動であり、 $\sigma(t, X_t)$ はボラティリティとよばれる原資産の変動率を表す係数である。また、 r と δ は、非負の定数でありそれぞれ資産の金利及び配当を表している。このとき、ブラック・ショールズ [1] は、リスク資産を原資産とするオプション取引の価格が、以下の方程式を適当な条件の下で解くことによって表されることを示している。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu x \frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0 \quad (t, x) \in [0, T] \times (0, \infty) \quad (1.1)$$

ここで、 σ, r, δ はすべて定数である。

ファイナンスの数理の興味深い研究テーマの一つに、(1.1) の方程式の係数であるボラティリティ σ の推定問題がある。ボラティリティには、ヒストリカル・ボラティリティとインプライド・ボラティリティの 2 種類あり、ヒストリカル・ボラティリティは過去の株価の変動率のデータを用いて計算され、またインプライド・ボラティリティは、将来の株価の変動率であり、現在のオプション価格から推定される。ブラック・ショールズのプライシング理論においては、(1.1) の方程式の係数に用いられているボラティリティは、オプションの満期まで一定という仮定がある。しかし、市場では行使価格によってボラティリティの値が異なり、二次関数に従うように歪む現象が観測される。すなわち、行使価格が市場価格と等しくなるアット・ザ・マネーから離れれば離れるほどボラティリティが高くなる現象がしばしば観測されている。このよう

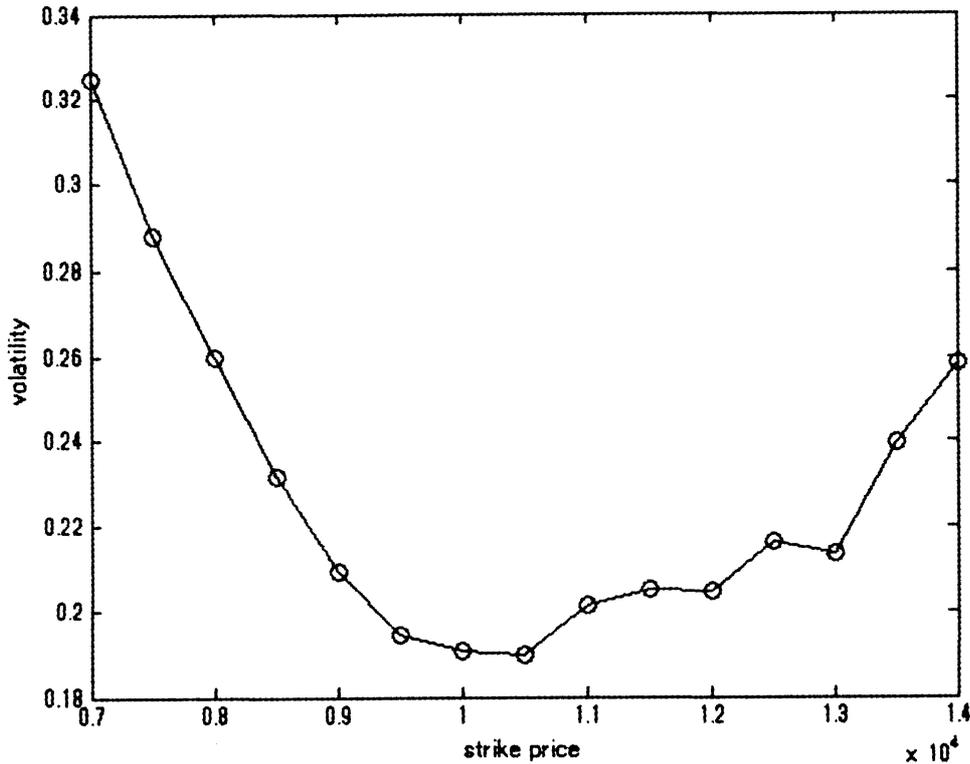


Figure 1: volatility smile

な現象は、市場ではボラティリティ・スマイルとよばれており、実際の市場がブラック・ショールズが想定したものと異なる1例である(図1)。従って市場から決められるインプライド・ボラティリティは、この状況を考慮する必要がある。

この現象を理解するために、Dupire [5] は、適当な初期条件の下で次の方程式を解くことによってコールオプションの市場価格を、満期日 T と満期日での行使価格 K の関数として表した。

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma(T, K)^2 K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial K^2} - (r - \delta) K \frac{\partial u}{\partial K} - \delta u, \quad (T, K) \in (t, \infty) \times (0, \infty)$$

この方法によって、市場のオプション価格(観測データ) $U^*(T, K)$ から T, K に関するボラティリティ $\sigma(T, K)$ は次の形で求めることができる。

$$\sigma(T, K)^2 = \frac{\frac{\partial u_*}{\partial T} (r - \delta) K \frac{\partial u_*}{\partial K} \delta u_*}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 u_*}{\partial K^2}}$$

しかしながら、この方法を用いてボラティリティの再構成を行う際に、2つの問題点が挙げられる。一つは、全ての K, T に関するオプション価格の情報(観測データ)を得ることが困難なことであり、もう一つはオプション価格の2階微分の値が得られにくいという点である。そこで、Bouchouev and Isakov [3] は、観測データとしてある T^* を決め(single maturity)、その点でのオプション価格を用いて、ボラティリティを推定するファイナンスの逆問題を定式化した。ここでファイナンスの逆問題とは、時刻 t^* でのオプションの市場価格 $u(t^*, x)$ からボラティリティ σ を推定する方法である。

本講究録では, Bouchouev and Isakov [3] で提案されたオプションに関する逆問題を, 特にバイナリーオプションを考察の対象として考えることにする. 特に, ボラティリティは K (行使価格) のみに依存すると考え, $\sigma(K)$ の形とし, 更に配当がない, すなわち $\delta = 0$ を仮定する. このとき, 我々が考える問題は次の形である.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial K} (\sigma(K)^2 K^2 \frac{\partial u}{\partial K}) - rK \frac{\partial u}{\partial K} - ru, & (T, K) \in (t, \infty) \times (0, \infty) \\ u(T, K)|_{T=t} = H(x - K), & K \in (0, \infty) \end{cases} \quad (1.2)$$

ここで, $H(\cdot)$ はヘビサイド関数である. このように, 満期日 T での状態 (終端条件) をヘビサイド関数で表し, ブラックショールズ方程式を解くことによって得られるオプション価格を, 我々はバイナリーオプション価格とよんでいる. 更に, 次の変数変換

$$\begin{aligned} y &= \log \frac{K}{x}, & \tau &= T - t, \\ a(y) &= \sigma(K), & U(\tau, y) &= u(T, K), \end{aligned}$$

を行うと, (1.2) は次の問題に変わる.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \{a(y)^2 \frac{\partial U}{\partial y}\} + \{\frac{1}{2} a(y)^2 - r\} \frac{\partial U}{\partial y} - rU & (\tau, y) \in (0, \tau_*) \times \mathbf{R} \\ U(\tau, y)|_{\tau=0} = H(-y) & y \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (1.3)$$

ここで, $\tau_* = T - t^*$ である. 我々が考えるバイナリーオプションの逆問題は, (1.3) の問題の解と観測データ

$$U(\tau, y)|_{\tau=\tau_*} = U_*(y) \quad y \in \Omega \subset \mathbf{R} \quad (1.4)$$

を用いて, 何らかの方法で $a(y)$ を推定することである. ただし, Ω は \mathbf{R} のある区間である.

2 Linearization and Inverse problem of Option Pricing

この節では, 本講究録で用いられる記号とについて述べる.

(1.3) と (1.4) から $a(y)$ を推定する問題は, 逆問題としては非線形の問題となる. そこで, ここでは逆問題の線形化を考えることにする.

始めに, (1.3) の U を

$$U = U_0 + V \quad (2.1)$$

の形で考え, 更に, ボラティリティに関しては,

$$\frac{1}{2} a(y)^2 = a_0^2 + f(y) \quad (2.2)$$

と置いて考える. ここで $f(y)$ は次を満たすような small perturbation とする.

$$f = 0 \quad \text{on } \mathbf{R} \setminus \bar{\Omega}$$

(2.1) と (2.2) を (1.3) の方程式に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(U_0 + V)}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (a_0^2 + f(y)) \frac{\partial(U_0 + V)}{\partial y} \right\} \\ &+ \{ (a_0^2 + f(y)) - r \} \frac{\partial(U_0 + V)}{\partial y} - r(U_0 + V) \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。ここで U_0 は、(1.3) において、 $\frac{1}{2}a(y)^2$ を a_0^2 にした以下の問題の解である。

$$\begin{cases} \frac{\partial U_0}{\partial \tau} = a_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + (a_0^2 - r) \frac{\partial U_0}{\partial y} - rU_0 & (\tau, y) \in (0, \tau_*) \times \mathbf{R} \\ U_0(\tau, y)|_{\tau=0} = H(-y), & y \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (2.4)$$

更に、(2.4) を (2.3) に代入し、 f に関して 2 次項を無視すると、最終的に (1.3) の主要項 V は次の問題の解として得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \tau} = a_0^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (a_0^2 - r) \frac{\partial V}{\partial y} - rV + F_0(\tau, y), & (\tau, y) \in (0, \tau_*) \times \mathbf{R} \\ V(\tau, y)|_{\tau=0} = 0, & y \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (2.5)$$

ここで、 $F_0(\tau, y)$ は次の形である。

$$F_0(\tau, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_0}{\partial y}(\tau, y) f(y) \right) + \frac{\partial U_0}{\partial y}(\tau, y) f(y)$$

このとき、我々が考える問題は次の形のオプションの逆問題である。

オプションの逆問題

パラメータ τ_*, a_0^2, r は知ることができるとする。このとき $V_*(y) = U_*(y) - U_0(\tau_*, y)$ ($y \in \Omega$) から、次の問題を満たす $f(y)$ を同定する問題を考える。

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = a_0^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (a_0^2 - r) \frac{\partial V}{\partial y} - rV + F_0(\tau, y), \quad (\tau, y) \in (0, \tau_*) \times \mathbf{R}, \quad (2.6)$$

$$V(\tau, y)|_{\tau=0} = 0, \quad y \in \mathbf{R} \quad (2.7)$$

3 Reconstruction of volatility

この節では、前節で定義したオプションの逆問題の線形化問題を考え、観測データ $U(\tau^*, y)$ からボラティリティ $a(y)$ を再構成する方法についての結果を与える。

3.1 Algorithm for reconstruction

$W(\tau, y)$ は次のコーシー問題の解とする。

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \tau} = a_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + (a_0^2 - r) \frac{\partial W}{\partial y} - rW + G_0(\tau, y) & (\tau, y) \in (0, \tau_*) \times \mathbf{R} \\ W(\tau, y)|_{\tau=0} = 0 & y \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (3.1)$$

ここで、 $G_0(\tau, y) = \frac{\partial U_0}{\partial y}(\tau, y) f(y)$ である。更に、簡単な計算により、

$$\frac{\partial U_0}{\partial y}(\tau, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau a_0^2}} \exp\left\{-\frac{1}{4\tau a_0^2}(y + (a_0^2 - r)\tau)^2 - r\tau\right\}$$

を示すことができるので、 $G_0(\tau, y)$ は次の形となる。

$$G_0(\tau, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau a_0^2}} e^{-\frac{y^2}{4\tau a_0^2}} e^{-\alpha y - \beta\tau} f(y)$$

このとき、次の変換

$$w = e^{\alpha y + \beta \tau} W$$

を考えると、(3.1) は次の問題になる。

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial \tau} = a_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi \tau a_0^2}} e^{-\frac{y^2}{4\tau a_0^2}} f(y), & (\tau, y) \in (0, \tau_*) \times \mathbf{R} \\ w(\tau, y)|_{\tau=0} = 0, & y \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (3.2)$$

一方、次の変換

$$v = e^{\alpha y + \beta \tau} V$$

を考えると、(1.3) は次の問題に変換される。

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} = a_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\pi \tau a_0^2}} e^{-\frac{y^2}{4\tau a_0^2}} f(y) - \frac{1}{2\sqrt{\pi \tau a_0^2}} \frac{\partial}{\partial y} (e^{-\frac{y^2}{4\tau a_0^2}} f(y)) \\ v(\tau, y)|_{\tau=0} = 0, & (\tau, y) \in (0, \tau_*) \times \mathbf{R} \\ & y \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (3.3)$$

ここで、(3.3) の解 v は、(3.2) の解 w を用いて次の形で表現されていることに注意する。

$$v = (\alpha - 1)w + \frac{\partial w}{\partial y}$$

このとき、(3.2) の解 $w(\tau, y)$ は次の積分で表される。

$$w(\tau, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi a_0^2}} \int_{\Omega} \left(\int_{\frac{|y-\xi|+|\xi|}{2a_0\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-t^2} dt \right) f(\xi) d\xi$$

(see Lemma 2.1 in Bouchouev, Isakov, and Valdivia [4]).

したがって、オプションの逆問題は次の積分方程式を逆問題として解く問題に帰着される。

$$I_*(y) = \int_{\Omega} k(\xi, y) f(\xi) d\xi, \quad y \in \Omega \quad (3.4)$$

ここで、 $I_*(y)$ は次の形の観測データである。

$$I_*(y) = e^{\alpha y + \beta \tau_*} \{U_*(y) - U_0(\tau_*, y)\}$$

更に、 $k(\xi, y)$ は、次の形で表される積分方程式 (3.4) の積分核である。

$$k(\xi, y) = -\frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\pi a_0^2}} \int_{\frac{|y-\xi|+|\xi|}{2a_0\sqrt{\tau_*}}}^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{1}{4\sqrt{\pi \tau_* a_0^3}} e^{-\frac{(|y-\xi|+|\xi|)^2}{4\tau_* a_0^2}} \text{sign}(y - \xi). \quad (3.5)$$

ここで、簡単な計算により次も示すことができる。

$$U_0(\tau, y) = \sqrt{2} e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{-\alpha\sqrt{\tau} - \frac{y}{2\sqrt{\tau a_0^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

3.2 Discret of Integral Equation

オプションの逆問題は、(3.4) の積分方程式の問題に帰着された。従って、この第一種 Fredholm 積分方程式を解けば、観測データ $I_*(y)$ から $f(y)$ を求めることができる。そこで以下ではこの積分を離散化して観測データ $I_*(y)$ から $f(y)$ を再構成する方法を述べる。

始めに、積分核 $k(\xi, y)$ を次のように離散化する。

$$k_{j,k} := k(\xi_j, y_k) = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\pi}a_0^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x_j - y_k| + |x_j|}{2a_0\sqrt{\tau^*}} \right) + \frac{1}{4\sqrt{\pi\tau^*}a_0^3} e^{-\frac{(|y_k - \xi_j| + |\xi_j|)^2}{4\tau^*a_0^2}} \operatorname{sign}(y_k - \xi_j) \quad (3.6)$$

ここで、 $\operatorname{erfc}(\cdot)$ は次の形のエラー関数である。

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\theta^2} d\theta$$

次に、第一種 Fredholm 積分方程式全体の離散化を考える。通常は選点法によって離散化するが、数値誤差が著しく増えるため、信頼できるシミュレーションができない。そこで [10] に従って、打ち切り誤差と丸め誤差の両方を排除したスペクトル選点法による離散式を使用する。 k 次の Chebyshev 多項式を $T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$ とし被積分函数 $k(\xi, y)f(\xi)$ 全体に Chebyshev 補間を適用すると、

$$k(\xi, y)f(\xi) \simeq \sum_{k=0}^N \tilde{g}_k(y)T_k(\xi) \quad (3.7)$$

となる。さらに、 $\xi_j = \cos \frac{j\pi}{N}$ ($0 \leq j \leq N$) より、

$$k(\xi_j, y)f(\xi_j) \simeq \sum_{k=0}^N \tilde{g}_k(y)T_k(\xi_j) \quad (3.8)$$

となり、

$$\tilde{g}_k(y) \simeq \frac{2}{Nc_k} \sum_{j=0}^N k(\xi_j, y)f(\xi_j)T_k(\xi_j) \quad (3.9)$$

となる。ただし、

$$c_j = \begin{cases} 2 & (j = 0, N) \\ 1 & (1 \leq j \leq N-1) \end{cases} \quad (3.10)$$

である。よって $k(\xi, y)f(\xi)$ の近似は、

$$k(\xi, y)f(\xi) \simeq \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N \frac{1}{c_k} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} k(\xi_j, y)f(\xi_j)T_k(\xi_j)T_k(y) \quad (3.11)$$

となる。

以上により、次の離散化を得る。

$$I^*(y_k) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^N \frac{1}{c_j} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} k(\xi_j, y_k)f(\xi_j)T_i(\xi_j) \int_{-1}^1 T_i(x)dx \quad (3.12)$$

すなわち、

$$I^*(y_k) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} k(\xi_j, y_k) \sum_{i=2:2:n}^N \frac{1}{c_i} \cos \frac{ij\pi}{N} \frac{2}{1-i^2} f(\xi_j) \quad (3.13)$$

である。

4 Numerical results

この節では、積分方程式 (3.4) を用いて、観測データからボラティリティを再構成する際の精度を確かめた。

始めにボラティリティを1次関数, すなわち

$$\frac{1}{2}a(y)^2 = \frac{1}{2} + y \quad (4.1)$$

とした場合の順問題 (1.4) の数値解を求める。次にその解を用いて作った観測データから、積分方程式 (3.4) を用いて1次関数の形でボラティリティが再構成されるかを確かめる。

Figure2は、離散化方程式の時間発展として、 $\tau_0 = 0, 0.7, 1.1, 1.4$ を考え、区間 $\Omega = (-1, 1)$ の間でグリッドを81点取り、Crank-Nicholson Methodを用いて数値計算を行った結果である。

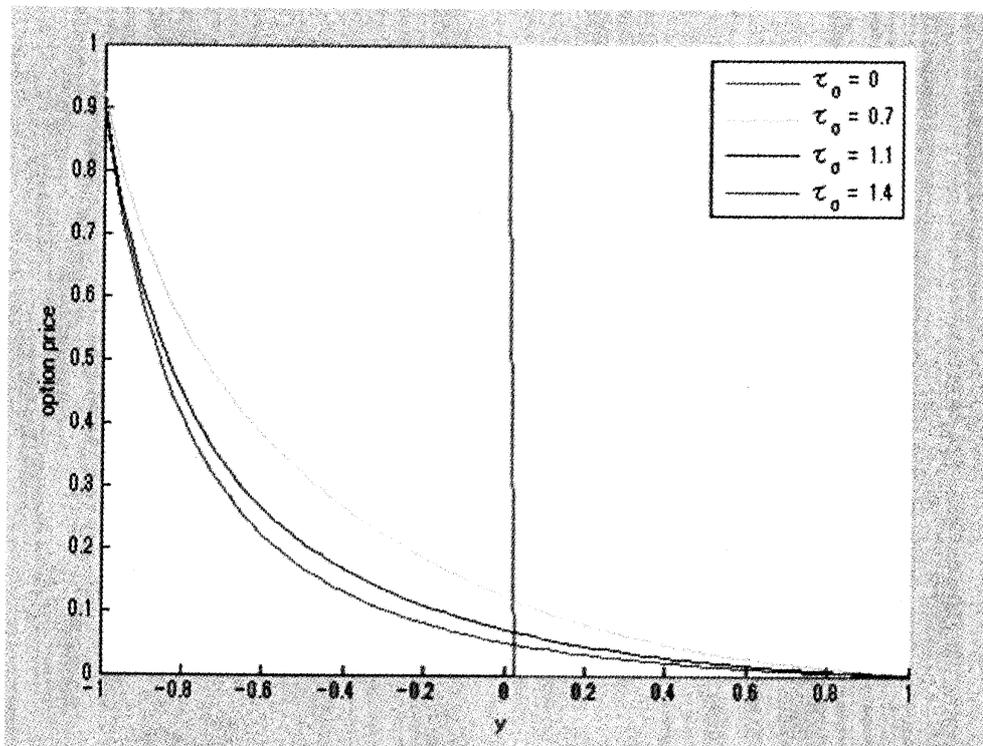


Figure 2: 順問題の数値解

次に、ボラティリティを $\frac{1}{2}a(y)^2 = \frac{1}{2} + y$ とした場合に得られた順問題の数値解を用いて、積分方程式 (3.4) の離散化を (3.13) とし、更に適当な正則化を行い、観測データ $I_*(y) = e^{\alpha y + \beta \tau_*} \{U_*(y) - U_0(\tau_*, y)\}$ から $f(y)$ の再構成を行った。ただし、 $r = 0$ とし、 $\Omega = (-0.3, 0.3)$, and $U_*(y) = U(\tau_*, y)$ としている。Figure3を見ると、特に $\tau_0 = 1.4$ の場合に、アット・ザ・マネー付近で、かなり高い制度で1次関数のボラティリティが再現されていることがわかる。

5 Concluding Remarks

本講究録では、これまでに Bouchouev and Isakov [3] で提案され、多くの研究者によって研究されているオプションの逆問題についての手法をバイナリーオプションについて適用したもの

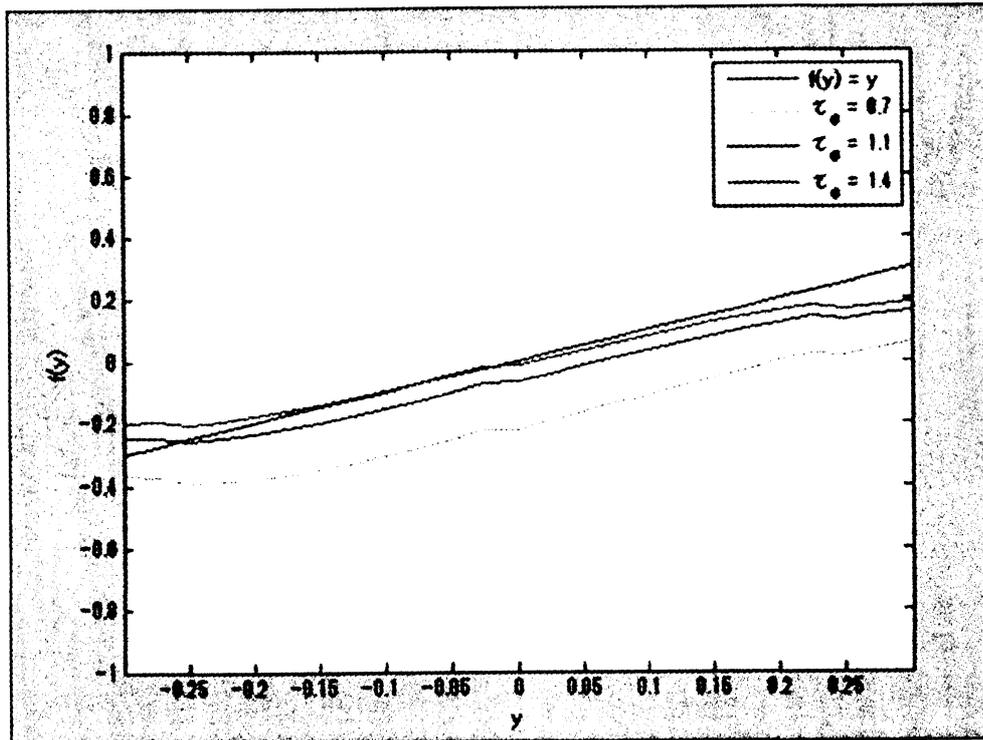


Figure 3: 逆問題の数値解（ボラティリティの再構成）

である。Figure3の結果を見る限り、アットザマネー付近でのボラティリティの再現率はかなり良いのではないかと考えられる。今後は、実データを観測データとし、この積分方程式を用いて市場のボラティリティの形を再現することを目標とする。一方、本講究録で用いた数値計算では、解の安定性の問題に関してあまり触れることができなかった。今後は、既に Ota and Kaji [11] で得られている安定性の L^2 評価を用いて、より安定的に数値計算の精度をあげることを目標としていきたい。また、バイナリーオプションの他の様々なオプション、特に空間変数の多次元版に対応しているバスケットオプションの問題に関して、本講究録で用いたような線形化の手法を用いてボラティリティの再構成を行うこと目標とする。

References

- [1] F. Black, M. Scholes 1973 The pricing of options and corporate liabilities, J. Political Econ., 81, 637-659.
- [2] Bouchouev, I. and Isakov, V. : The inverse problem of option pricing. Inverse Problems 13(1997). L11-L17
- [3] Bouchouev, I. and Isakov, V. : Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets. Inverse Problems 15(1999). R95-R116
- [4] Bouchouev, I., Isakov, V., and Valdivia, N. : Recovery of volatility coefficient by linearization. Quantitative Finance 2(2002). pp.257-263
- [5] Dupire, B. : Pricing with a smile. Risk 7(1994). pp.18-20
- [6] Egger, H. and Engl, W. : Tikhonov regularization applied to the inverse problem of option pricing:convergence analysis and rates. Inverse Problems 21(2005). pp.1027-1045

- [7] Egger, H., Hein, T., and Hofmann, B. : On decoupling of volatility smile and term structure in inverse option pricing. *Inverse Problems* 22(2006). pp.1247-1259
- [8] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A., and Ural'ceva, N.N. : *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Providence, RI:AMS(2002).
- [9] Lavrentiev, M.A. and Shabat, B.A. : *Methods of Theory of Functions of One Complex Variable*. (1965).
- [10] H.Fujiwara, H.Imai, T.Takeuchi and Y.Iso, : High-precision numerical computation of integral equations of the first kind. *The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics* 15-3(2005) pp.419-434
- [11] Y. Ota and S kaji : Linearized inverse problem of parabolic equations with the Heaviside function as financial model. Preprint.

Faculty of Culture and Information Science
Doshisha University, Kyoto 610-0394, Japan
E-mail address: yota@mail.doshisha.ac.jp

同志社大学・文化情報学部 大田 靖

Basic Education Center
Kyushusangyou University, Fukuoka 813-8503, Japan
E-mail address: kaji.s@ip.kyusan-u.ac.jp

九州産業・基礎教育センター 鍛冶 俊輔