

堅非拡大写像の一般化に対する不動点定理について  
(On fixed point theorems for generalizations of firmly  
nonexpansive mappings)

大分大学工学部 高阪 史明 (Kohsaka, Fumiaki)\*  
Department of Computer Science and Intelligent Systems,  
Oita University

概要

バナッハ空間における (P) 型の写像に対する不動点の存在定理と不動点への収束定理を得る. この写像はヒルベルト空間における堅非拡大写像の一般化の一つである. バナッハ空間における極大単調作用素の零点問題への応用も議論する.

1 はじめに

$X$  を滑らかで狭義凸な回帰的実バナッハ空間とし,  $f: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  を proper で下半連続な凸関数とする. このとき, 次の凸最小化問題を考える.

問題 1.1.  $f(u) = \inf f(X)$  となる  $u \in X$  を求めよ.

この問題の解の存在性や近似法の研究において

$$P^{\partial f} x = \left\{ z \in X : f(z) + \frac{1}{2} \|z - x\|^2 = \inf_{y \in X} \left( f(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right) \right\} \quad (\forall x \in X) \quad (1.1)$$

により定義される写像  $P^{\partial f}$  (劣微分  $\partial f$  のリゾルベント) が重要となる. よく知られているように,  $P^{\partial f}: X \rightarrow X$  は一価写像であり

$$f(u) = \inf f(X) \iff P^{\partial f} u = u$$

---

\* 大分大学 工学部 知能情報システム工学科; 〒870-1192 大分市旦野原 700; email: f-kohsaka@oita-u.ac.jp

が成り立つ. 従って, 問題 1.1 は  $P^{\partial f}$  に対する不動点問題に帰着される (cf. [20]).

特に,  $X$  がヒルベルト空間であれば,  $P^{\partial f}$  は堅非拡大写像となる. つまり,

$$\|P^{\partial f}x - P^{\partial f}y\|^2 \leq \langle P^{\partial f}x - P^{\partial f}y, x - y \rangle \quad (\forall x, y \in X) \quad (1.2)$$

が成り立つ. よって,  $P^{\partial f}$  は非拡大でもある. つまり,

$$\|P^{\partial f}x - P^{\partial f}y\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in X)$$

が成り立つ. Martinet の定理 [8] により, 問題 1.1 が解を持つ場合, 任意の  $x \in X$  に対し, 逐次近似列  $\{(P^{\partial f})^n x\}$  は問題 1.1 の解の一つに弱収束する. この反復法は近接点法とよばれるものである. Rockafellar [17] は, ヒルベルト空間における極大単調作用素に対する近接点法をより一般的な形で研究した.

$X$  が上記のバナッハ空間の場合,  $P^{\partial f}$  が堅非拡大であるとは限らない. しかし,  $P^{\partial f}$  は

$$\langle P^{\partial f}x - P^{\partial f}y, J(x - P^{\partial f}x) - J(y - P^{\partial f}y) \rangle \geq 0 \quad (\forall x, y \in X) \quad (1.3)$$

を満たす. ここで,  $J: X \rightarrow X^*$  は双対写像である.  $X$  がヒルベルト空間であれば,  $J = I$  ( $X$  上の恒等写像) となるため, (1.3) は (1.2) と一致する.

最近の論文 [1, 3, 4] において, (1.3) を満たす写像を (P) 型の写像 (cf. (3.1)) とよび, 写像の連続性, 不動点の存在性及び不動点の近似法等の研究を行った. 本稿では, 主に論文 [1] における結果を紹介する.

## 2 準備

本稿では,  $\mathbb{R}$  上のバナッハ空間を取り扱う.  $\mathbb{R}$  と  $\mathbb{N}$  により, それぞれ, 実数全体の集合及び正の整数全体の集合を表す.  $(-\infty, +\infty]$  で集合  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  を表す.  $X$  をバナッハ空間とすると,  $X^*$  でその双対空間を表す. 有界線形汎関数  $x^* \in X^*$  の点  $x \in X$  での値  $x^*(x)$  を  $\langle x, x^* \rangle$  と書くこともある.  $X$  の点列  $\{x_n\}$  が  $x \in X$  に強収束すること及び弱収束することを, それぞれ  $x_n \rightarrow x$  及び  $x_n \rightharpoonup x$  で表す.  $C$  を  $X$  の空でない部分集合とし,  $T: C \rightarrow X$  とするとき,  $F(T)$  で  $T$  の不動点集合  $\{u \in C : Tu = u\}$  を表す. また,  $z \in C$  が  $T$  の漸近的不動点であるとは, ある  $C$  の点列  $\{z_n\}$  が存在し,  $z_n \rightarrow z$  と  $z_n - Tz_n \rightarrow 0$  が成り立つことを言う.  $\hat{F}(T)$  により,  $T$  の漸近的不動点全体の集合を表す (cf. [13]).  $I$  により恒等写像を表す.

$X$  をバナッハ空間とする.  $X$  から  $X^*$  への双対写像  $J: X \rightarrow 2^{X^*}$  は

$$Jx = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\} \quad (\forall x \in X)$$

で定義される.  $S_X$  で  $X$  の単位球面  $\{x \in X : \|x\| = 1\}$  を表す.  $X$  が滑らかであるとは, 任意の  $x, y \in S_X$  に対して極限  $\lim_{t \rightarrow 0} (\|x + ty\| - \|x\|)/t$  が存在することを言う. これは, 任意の  $x \in X$  に対して  $Jx$  が一点集合となることと同値であるので, この場合,  $J$  を  $X$  から  $X^*$  への一価写像とみなす.  $X$  が狭義凸であるとは,  $\|(x+y)/2\| < 1$  が任意の相異なる 2 点  $x, y \in S_X$  について成り立つことを言う.  $X$  が一様凸であるとは, 任意の  $\varepsilon \in (0, 2]$  に対し, ある  $\delta > 0$  が存在して

$$x, y \in S_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

が成り立つことを言う. また,  $X$  が Kadec-Klee 条件を満たすとは,  $X$  の点列  $\{x_n\}$  が  $x_n \rightarrow x \in X$  かつ  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  を満たすときに,  $x_n \rightarrow x$  となることを言う.  $X$  が一様凸なバナッハ空間であれば,  $X$  は狭義凸かつ回帰的なバナッハ空間であり, Kadec-Klee 条件を満たす. また,  $X$  が滑らかで狭義凸な回帰的なバナッハ空間であれば,  $J: X \rightarrow X^*$  は全単射であり,  $J^{-1}$  は  $X^*$  から  $X$  への双対写像と一致する. 詳しくは文献 [5, 11, 19, 20] を参照すると良い.

$X$  を狭義凸で回帰的なバナッハ空間とし,  $C$  を  $X$  の空でない閉凸集合とすると, 任意の  $x \in X$  に対して,  $z_x \in C$  が一意的に存在して

$$\|z_x - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|$$

が成り立つ.  $P_C x = z_x$  ( $\forall x \in X$ ) により定まる写像  $P_C: X \rightarrow C$  を  $X$  から  $C$  上への距離射影と言う. よく知られているように,  $X$  がさらに滑らかであり,  $(x, z) \in X \times C$  とするとき,

$$z = P_C x \iff \langle y - z, J(x - z) \rangle \leq 0 \quad (\forall y \in C) \quad (2.1)$$

が成り立つ.

$X$  をバナッハ空間とし,  $A: X \rightarrow 2^{X^*}$  とする. このとき,  $A$  の定義域  $D(A)$ , 値域  $R(A)$  及びグラフ  $G(A)$  は

$$D(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}, \quad R(A) = \bigcup_{x \in X} Ax, \quad G(A) = \{(x, x^*) : x^* \in Ax\}$$

で定義される. 作用素  $A$  が単調であるとは,

$$(x, x^*), (y, y^*) \in G(A) \implies \langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

が成り立つことを言う。また、単調作用素  $A$  が極大であるとは、 $B: X \rightarrow 2^{X^*}$  が単調作用素で  $G(A) \subset G(B)$  を満たすとき、 $A = B$  が成り立つことを言う。点  $z \in X$  が作用素  $A$  の零点であるとは  $0 \in Az$  が成り立つことを言う。  $A$  の零点全体の集合を  $A^{-1}0$  で表す。

$X$  が滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし、 $C$  を  $X$  の空でない閉凸集合とする。また、 $A: X \rightarrow 2^{X^*}$  を単調作用素で

$$D(A) \subset C \subset R(I + J^{-1}A) \quad (2.2)$$

を満たすものとする。このとき、任意の  $x \in C$  に対して、ある  $z_x \in D(A)$  が存在し

$$x \in z_x + J^{-1}Az_x \quad (\iff 0 \in J(z_x - x) + Az_x)$$

が成り立つことが分かる。また、 $X$  の狭義凸性からそのような  $z_x$  の一意性が従う。よって、 $P^A x = z_x$  ( $\forall x \in X$ ) により一価写像  $P^A: C \rightarrow C$  が定まる。この写像を、 $A$  のリゾルベントとよぶ。言い換えれば、 $P^A x = (I + J^{-1}A)^{-1}x$  ( $\forall x \in C$ ) となる。このとき、 $F(P^A) = A^{-1}0$  が成り立つ。特に、 $X$  がさらに回帰的であり、 $A: X \rightarrow 2^{X^*}$  が極大単調作用素であるとき、 $R(J + A) = X^*$  となる (cf. [16, 20])。このことを用いると、 $C = X$  の下で (2.2) が成り立つことが分かる (cf. [20])。

次の変分不等式の解の存在定理はよく知られている。

**定理 2.1** ([19]).  $C$  を回帰的なバナッハ空間  $X$  の空でない有界閉凸集合とし、 $A: C \rightarrow X^*$  を単調作用素とする。また、 $A$  は  $X$  のノルム位相及び  $X^*$  の弱位相について連続であるとする。このとき、ある  $z \in C$  が存在し、任意の  $y \in C$  に対して  $\langle y - z, Az \rangle \geq 0$  が成り立つ。

### 3 基本性質

本節では、まず、バナッハ空間における (P) 型の写像の基本性質を述べる。 $C$  を滑らかなバナッハ空間  $X$  の空でない部分集合とするとき、 $T: C \rightarrow X$  が (P) 型であるとは

$$\langle Tx - Ty, J(x - Tx) - J(y - Ty) \rangle \geq 0 \quad (\forall x, y \in C) \quad (3.1)$$

が成り立つことを言う (cf. [4])。特に、 $X$  がヒルベルト空間であるとき、 $J = I$  となるのでこれは  $T$  が堅非拡大写像であること、つまり、

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle Tx - Ty, x - y \rangle \quad (\forall x, y \in C) \quad (3.2)$$

が成り立つことと同値である.

距離射影は (P) 型の写像である. 距離射影の記号からの類推により, (P) 型という用語を用いた. なお, 文献 [4] では (Q) 型や (R) 型の写像も取り扱った.

**補題 3.1.**  $C$  を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間  $X$  の空でない閉凸集合とするとき,  $P_C$  は (P) 型であり,  $F(P_C) = C$  が成り立つ.

(P) 型の写像は単調作用素のリゾルベントと関係する.

**補題 3.2** ([4]).  $C$  を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間  $X$  の空でない部分集合とし,  $T: C \rightarrow X$  とする. また,  $A: X \rightarrow 2^{X^*}$  を  $A = J(T^{-1} - I)$  により定義する. このとき,  $T$  が (P) 型であることは  $A$  が単調作用素であることと同値である. このとき,  $T = (I + J^{-1}A)^{-1}$  及び  $F(T) = A^{-1}0$  が成り立つ.

**補足 3.3.** 補題 3.2 において,  $T^{-1}: X \rightarrow 2^X$  は

$$T^{-1}y = \{x \in C : Tx = y\} \quad (\forall y \in X)$$

により定義される集合値写像である.

次の補題は不動点近似法を研究する際に必要となる.

**補題 3.4** ([3]).  $C$  を滑らかなバナッハ空間  $X$  の空でない部分集合とし,  $T: C \rightarrow X$  を (P) 型の写像とする. このとき, 次が成り立つ.

- (a)  $C$  が閉凸であれば,  $F(T)$  も閉凸である.
- (b)  $F(T) = \widehat{F}(T)$ .
- (c) 任意の  $\lambda \in [0, 1]$  に対して,  $\lambda I + (1 - \lambda)T: C \rightarrow X$  は (P) 型である.

ヒルベルト空間における (P) 型の写像は堅非拡大写像であるので, 写像の連続性は定義から明らかである. バナッハ空間における (P) 型の写像の連続性に関して次が成り立つ.

**定理 3.5** ([4]).  $C$  を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間  $X$  の空でない部分集合とし,  $T: C \rightarrow X$  を (P) 型の写像とする. このとき, 次が成り立つ.

- (a)  $C$  の任意の空でない有界部分集合  $U$  に対し,  $T(U)$  は有界となる.
- (b)  $C$  の点列  $\{x_n\}$  が  $x_n \rightarrow x \in C$  を満たすとき,  $Tx_n \rightarrow Tx$ ,  $J(x_n - Tx_n) \rightarrow J(x - Tx)$  及び  $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow \|x - Tx\|$  が成り立つ.
- (c)  $X$  が Kadec-Klee 条件を満たすとき,  $T$  はノルムの意味で連続である.

(d)  $X$  が一様凸であれば,  $C$  の任意の空でない有界部分集合  $U$  に対し,  $T$  は  $U$  においてノルムの意味で一様連続である.

定理 2.1 と定理 3.5 を用いると, 次の不動点定理を示すことができる.

**定理 3.6** ([4]).  $C$  を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間  $X$  の空でない有界閉凸集合とし,  $T: C \rightarrow X$  を (P) 型の写像とする. このとき,  $P_C T$  は不動点を持つ. 特に,  $T(C) \subset C$  の場合,  $T$  は不動点を持つ.

**証明.**  $A = J(I - T)$  により写像  $A: C \rightarrow X^*$  を定義する.  $T$  は (P) 型であり,  $J$  は単調であるので, 任意の  $x, y \in C$  について

$$\begin{aligned} \langle x - y, Ax - Ay \rangle &= \langle x - y, J(x - Tx) - J(y - Ty) \rangle \\ &= \langle x - Tx - (y - Ty), J(x - Tx) - J(y - Ty) \rangle \\ &\quad + \langle Tx - Ty, J(x - Tx) - J(y - Ty) \rangle \\ &\geq \langle Tx - Ty, J(x - Tx) - J(y - Ty) \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. よって,  $A$  は単調である. また, 定理 3.5 によって,  $A$  は  $X$  のノルム位相及び  $X^*$  の弱位相に関して連続である. 定理 2.1 より, ある  $z \in C$  が存在して, 任意の  $y \in C$  について  $\langle y - z, Az \rangle \geq 0$  が成り立つ. つまり,

$$\langle y - z, J(Tz - z) \rangle \leq 0 \quad (\forall y \in C)$$

が成り立つ. (2.1) により,  $P_C(Tz) = z$  を得る. ゆえに,  $z$  は  $P_C T$  の不動点である. また, 特に  $T(C) \subset C$  の場合,  $P_C T = T$  となるため, 結論を得る.  $\square$

特に,  $X$  がヒルベルト空間であるとするれば, 次の系が得られる.

**系 3.7.**  $C$  をヒルベルト空間  $X$  の空でない有界閉凸集合とし,  $T: C \rightarrow X$  を堅非拡大写像とする. このとき,  $P_C T$  は不動点を持つ. 特に,  $T(C) \subset C$  の場合,  $T$  は不動点を持つ.

## 4 二つの射影法

本節では, (P) 型の写像に対する二つの射影法に関する存在定理を得る. 定理 3.6 を用いて証明される次の補題は重要である. その証明において, 文献 [2, 9, 10] における手法を用いた.

**補題 4.1** ([1]).  $C$  を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間  $X$  の空でない部分集合とし,  $T: C \rightarrow C$  を (P) 型の写像とする. また,  $D$  を  $X$  の空でない有界閉凸集合で  $D \subset C$  を満たすものとする. このとき, ある  $z \in C$  が存在して,

$$\sup_{y \in T^{-1}(D)} \langle z - Ty, J(I - T)y \rangle \leq 0$$

が成り立つ.

まず, hybrid 射影法 [18] に関する結果を紹介する. これらの結果は, バナッハ空間における極大単調作用素に対する hybrid 射影法 [9, 12] と関連する.

次の結果は, 不動点近似列が well-defined であることを主張するものである. その証明には補題 4.1 を用いた.

**定理 4.2** ([1]).  $C$  を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間  $X$  の空でない閉凸集合とし,  $T: C \rightarrow C$  を (P) 型の写像とする. また,  $x_1 = x \in C$ ,

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C : \langle z - Tx_n, J(x_n - Tx_n) \rangle \leq 0\} \\ D_n = \{z \in C : \langle z - x_n, J(x - x_n) \rangle \leq 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により  $C$  の点列  $\{x_n\}$  を定義する. このとき, 次が成り立つ.

- (a) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $C_n \cap D_n \supset \bigcap_{k=1}^n C_k \neq \emptyset$  が成り立つ.
- (b)  $\{x_n\}$  は well-defined である.
- (c)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (C_n \cap D_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset F(T)$ .

次は, そのようにして定義された点列の有界性と不動点の存在性が同値であることを主張する.

**定理 4.3** ([1]).  $X$  を滑らかで一様凸なバナッハ空間とし,  $C, T, \{x_n\}, \{C_n\}$  及び  $\{D_n\}$  を定理 4.2 と同じものとする. このとき, 次は同値である.

- (a)  $T$  は不動点を持つ.
- (b)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  は空でない.
- (c)  $\{x_n\}$  は有界である.
- (d)  $\{x_n\}$  は強収束する.

この場合,  $\{x_n\}$  は  $P_{F(T)}(x)$  に強収束する.

次に、収縮射影法 [21] に関する結果を紹介する。それらの証明では、文献 [6, 7] における Mosco 収束性を利用した証明手法を用いた。次は、不動点近似列が well-defined であることを主張する結果である。

**定理 4.4** ([1]).  $C$  を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間  $X$  の空でない閉凸集合とし、 $T: C \rightarrow C$  を (P) 型の写像とする。また、 $x_1 = x \in C = C_0$ ,

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C_{n-1} : \langle z - Tx_n, J(x_n - Tx_n) \rangle \leq 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により  $C$  の点列  $\{x_n\}$  を定義する。このとき、次が成り立つ。

- (a) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $C_n$  は空でない。
- (b)  $\{x_n\}$  は well-defined である。
- (c)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset F(T)$ .

そのようにして定義された点列の有界性と不動点の存在性が同値であることを主張する定理を述べる。

**定理 4.5** ([1]).  $X$  を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間で Kadec-Klee 条件を満たすものとし、 $C$ ,  $T$ ,  $\{x_n\}$  及び  $\{C_n\}$  を定理 4.4 と同じものとする。このとき、次は同値である。

- (a)  $T$  は不動点を持つ。
- (b)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  は空でない。
- (c)  $\{x_n\}$  は強収束する。

この場合、 $\{x_n\}$  は  $P_{F(T)}(x)$  に強収束する。また、 $X$  が一様凸であれば、これらの条件は  $\{x_n\}$  の有界性と同値である。

## 5 単調作用素の零点問題への応用

最後に、§4 で得られた結果を用いて得られた単調作用素の零点問題に関する結果を紹介する。定理 4.3 を用いると、単調作用素に対する次の定理を示すことができる。

**定理 5.1** ([1]).  $C$  を滑らかで一様凸なバナッハ空間  $X$  の空でない閉凸集合とし、 $A: X \rightarrow 2^{X^*}$  を単調作用素で (2.2) を満たすものとする。  $P^A x = (I + J^{-1}A)^{-1}x$  ( $\forall x \in C$ ) とし、



$$x_1 = x \in C,$$

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C : \langle z - P^A x_n, J(x_n - P^A x_n) \rangle \leq 0\} \\ D_n = \{z \in C : \langle z - x_n, J(x - x_n) \rangle \leq 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により  $C$  の点列  $\{x_n\}$  を定義する. このとき, 次は同値である.

- (a)  $A$  は零点を持つ.
- (b)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  は空でない.
- (c)  $\{x_n\}$  は有界である.
- (d)  $\{x_n\}$  は強収束する.

この場合,  $\{x_n\}$  は  $P_{A^{-1}0}(x)$  に強収束する.

証明.  $P^A: C \rightarrow C$  が (P) 型の写像であることを証明する.  $x, y \in C$  とするとき,  $P^A$  の定義より

$$J(x - P^A x) \in AP^A x, \quad J(x - P^A y) \in AP^A y$$

となるので,  $A$  の単調性によって

$$\langle P^A x - P^A y, J(x - P^A x) - J(y - P^A y) \rangle \geq 0$$

が成り立つ. よって,  $P^A$  は (P) 型である. 次に,  $F(P^A) = A^{-1}0$  を示す.  $u \in F(P^A)$  とするとき,  $u = P^A u$  から

$$u \in u + J^{-1}Au \quad (5.1)$$

が成り立つので,  $u \in A^{-1}0$  である. 逆に,  $u \in A^{-1}0$  とするとき,  $u \in D(A) \subset C$  であるので,  $u \in C$  となる. また,  $0 \in Au$  より (5.1) が成り立つので,  $u = P^A u$  となる. 従って,  $F(P^A) = A^{-1}0$  が成り立つ. 以上より, 定理 4.3 から結論を得る.  $\square$

特に, 凸関数の最小点を求める問題に関して次の系を得る.

**系 5.2.**  $X$  を滑らかで一様凸なバナッハ空間とし,  $f: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  を proper で下半連続な凸関数とする. また,  $P^{\partial f}: X \rightarrow X$  を (1.1) で定義する.  $x_1 = x \in X$ ,

$$\begin{cases} C_n = \{z \in X : \langle z - P^{\partial f} x_n, J(x_n - P^{\partial f} x_n) \rangle \leq 0\} \\ D_n = \{z \in X : \langle z - x_n, J(x - x_n) \rangle \leq 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により  $X$  の点列  $\{x_n\}$  を定義する. このとき, 次は同値である.

- (a)  $f$  は最小点を持つ.
- (b)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  は空でない.
- (c)  $\{x_n\}$  は有界である.
- (d)  $\{x_n\}$  は強収束する.

この場合,  $\{x_n\}$  は  $x$  から最も近い  $f$  の最小点に強収束する.

証明. Rockafellar の定理 [14,15] により,

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) \quad (\forall y \in X)\} \quad (\forall x \in X)$$

で定義される  $f$  の劣微分  $\partial f: X \rightarrow 2^{X^*}$  は極大単調である. また,

$$(\partial f)^{-1}(0) = \{z \in X : f(z) = \inf f(X)\}$$

が成り立つ. さらに,  $x \in X$  とするとき,

$$\begin{aligned} z = P^{\partial f} x &\iff z = \operatorname{argmin}_{y \in X} \left\{ f(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right\} \\ &\iff 0 \in \partial \left( f + \frac{1}{2} \|\cdot - x\|^2 \right) (z) \\ &\iff 0 \in \partial f(z) + \partial \left( \frac{1}{2} \|\cdot - x\|^2 \right) (z) \\ &\iff 0 \in \partial f(z) + J(z - x) \\ &\iff x \in (I + J^{-1} \partial f)(z) \end{aligned}$$

が成り立つので,  $P^{\partial f} x = (I + J^{-1} \partial f)^{-1} x$  となる (cf. [20]). 従って, 定理 5.1 より結論を得る.  $\square$

同様に, 定理 4.5 を用いると, 単調作用素に対する次の定理を示すことができる.

**定理 5.3** ([1]).  $C$  を Kadec-Klee 条件を満たす滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間  $X$  の空でない閉凸集合とし,  $A: X \rightarrow 2^{X^*}$  を単調作用素で (2.2) を満たすものとする.  $P^A x = (I + J^{-1} A)^{-1} x$  ( $\forall x \in C$ ) とし,  $x_1 = x \in C = C_0$ ,

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C_{n-1} : \langle z - P^A x_n, J(x_n - P^A x_n) \rangle \leq 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により  $C$  の点列  $\{x_n\}$  を定義する. このとき, 次は同値である.

- (a)  $A$  は零点を持つ.

- (b)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  は空でない.  
 (c)  $\{x_n\}$  は強収束する.

この場合,  $\{x_n\}$  は  $P_{A^{-1}0}(x)$  に強収束する. また,  $X$  が一様凸であれば, これらの条件は  $\{x_n\}$  の有界性と同値である.

特に, 凸関数の最小点を求める問題に関して次の系を得る.

**系 5.4.**  $X$  を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間で Kadec–Klee 条件を満たすものとし,  $f: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  を proper で下半連続な凸関数とする. また,  $P^{\partial f}: X \rightarrow X$  を (1.1) で定義する. また,  $x_1 = x \in X = C_0$ ,

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C_{n-1} : \langle z - P^A x_n, J(x_n - P^A x_n) \rangle \leq 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により  $X$  の点列  $\{x_n\}$  を定義する. このとき, 次は同値である.

- (a)  $f$  は最小点を持つ.  
 (b)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  は空でない.  
 (c)  $\{x_n\}$  は強収束する.

この場合,  $\{x_n\}$  は  $x$  から最も近い  $f$  の最小点に強収束する. また,  $X$  が一様凸であれば, これらの条件は  $\{x_n\}$  の有界性と同値である.

## 参考文献

- [1] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Existence of fixed points of firmly nonexpansive-like mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2010), Art. ID 512751, 1–15.
- [2] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e1626–e1632.
- [3] ———, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Nonlinear analysis and optimization, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, pp. 1–17.
- [4] ———, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: Their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.
- [5] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems*, Mathematics and its Applications, vol. 62, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.
- [6] Y. Kimura, K. Nakajo, and W. Takahashi, *Strongly convergent iterative schemes for a sequence of nonlinear mappings*, J. Nonlinear Convex Anal. **9** (2008), 407–416.
- [7] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 356–363.

- [8] B. Martinet, *Détermination approchée d'un point fixe d'une application pseudo-contractante. Cas de l'application prox*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **274** (1972), A163–A165 (French).
- [9] S. Matsushita and W. Takahashi, *A proximal-type algorithm by the hybrid method for maximal monotone operators in a Banach space*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2007, pp. 355–365.
- [10] S. Matsushita, *The sequences by the hybrid method and the existence of fixed points of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Fixed point theory and its applications, Yokohama Publishers, Yokohama, 2008, pp. 109–113.
- [11] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [12] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), 439–445.
- [13] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.
- [14] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497–510.
- [15] ———, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. **33** (1970), 209–216.
- [16] ———, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.
- [17] ———, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.
- [18] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.
- [19] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [20] ———, *Convex analysis & approximation of fixed points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).
- [21] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.