

バナッハ空間における堅非拡大写像の不動点について  
(On fixed points of firmly nonexpansive-type mappings  
in Banach spaces)

大分大学工学部 高阪 史明 (Kohsaka, Fumiaki)\*  
Department of Computer Science and Intelligent Systems,  
Oita University

概要

ヒルベルト空間における堅非拡大写像のバナッハ空間における一般化の一つである P 型の写像からなる列について, その共通不動点への二種類の強収束定理とそれらの応用について議論する.

## 1 はじめに

バナッハ空間における P 型の写像からなる列に対して, 共通不動点への収束定理とその応用について研究する. 本稿で考察する不動点近似法は, 距離射影を用いて定義される二種類の反復法であり, それぞれの手法により定まる点列は, 最初に固定された点に最も近い共通不動点へと強収束する.

ヒルベルト空間における堅非拡大写像のバナッハ空間における一般化の一つに, 文献 [2] において導入された P 型の写像 (cf. (2.5)) がある. ヒルベルト空間  $H$  における次の写像は P 型の写像の例である.

- $H$  の閉部分空間  $M$  の上への直交射影  $P_M$
- $H$  の空でない閉凸集合  $C$  の上への距離射影  $P_C$
- 極大単調作用素  $A: H \rightarrow 2^H$  のリゾルベント  $(I + A)^{-1}$
- 恒等写像  $I$  と非拡大写像  $S$  の平均  $(I + S)/2$

---

\* 大分大学 工学部 知能情報システム工学科; 〒870-1192 大分市旦野原 700; email: f-kohsaka@oita-u.ac.jp

実際、ヒルベルト空間におけるこれらの写像は全て堅非拡大写像である。また、ヒルベルト空間において、P型の写像と堅非拡大写像は同じ概念となる。

$C$  をヒルベルト空間  $H$  の空でない閉凸集合とし、 $T: C \rightarrow H$  とする。このとき、 $T$  が非拡大 (nonexpansive) であるとは、

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in C) \quad (1.1)$$

が成り立つことをいう。また、 $T$  が堅非拡大 (firmly nonexpansive) [7, 8] であるとは、

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle Tx - Ty, x - y \rangle \quad (\forall x, y \in C) \quad (1.2)$$

が成り立つことをいう。明らかに、堅非拡大写像は非拡大写像となる。また、

$$T \text{ が堅非拡大} \iff 2T - I \text{ が非拡大}$$

が成り立つことを容易に示すことができる。よって、 $T$  が堅非拡大であることは、 $T = (I + S)/2$  となる非拡大写像  $S: C \rightarrow H$  が存在することと同値である。この場合、 $F(T) = F(S)$  が成り立つことも分かる。従って、非拡大写像に対する不動点問題は、より性質の良い堅非拡大写像に対する不動点問題に帰着される (cf. [10, 11])。

次の非拡大写像の不動点定理は有名である。

**定理 1.1** ([5, 6, 18, 19]). ヒルベルト空間  $H$  の空でない有界閉凸集合  $C$  からそれ自身への非拡大写像  $T$  は不動点をもつ。

$\mathbb{R}^2$  における回転変換を考えれば分かるように、定理 1.1 の仮定の下で、各  $x \in C$  につき定まる点列  $\{T^n x\}$  が  $T$  の不動点に収束するとは限らない。しかし、 $T$  に対し堅非拡大性を仮定すれば、この点列は  $T$  の不動点に弱収束する。

**定理 1.2** ([12, 15]). ヒルベルト空間  $H$  の空でない有界閉凸集合  $C$  からそれ自身への堅非拡大写像  $T$  と  $x \in C$  について、点列  $\{T^n x\}$  は  $T$  の不動点の一つに弱収束する。

**補足 1.3.** 定理 1.2 において、 $\{T^n x\}$  が強収束しない例がある [9]。

このように、ヒルベルト空間における堅非拡大写像は完備距離空間における縮小写像と類似した好ましい性質をもつ。応用面においても、凸制約可能性問題、凸最小化問題、変分不等式問題、鞍点問題、均衡問題等の多くの非線形問題が堅非拡大写像に対する不動点問題に帰着され、不動点定理や不動点近似定理を用いた非線形問題の解明がなされる。

本稿では、ヒルベルト空間における堅非拡大写像のパナッハ空間における一般化の一つである P 型の写像からなる列に対する共通不動点問題について研究する。ここでは、極

大単調作用素に対する射影法の研究 [13, 14, 17] と非拡大写像に対する収縮射影法の研究 [20] に動機付けられ, 距離射影を用いた二種類の不動点近似定理を得る. さらに, それらの応用について考察する. 本稿で述べる結果は, 文献 [3] において得られたものである.

## 2 準備

本稿で取り扱う線形空間は全て実線形空間とする.  $\mathbb{R}$  と  $\mathbb{N}$  で, それぞれ実数全体の集合と正の整数全体の集合を表す.  $X$  をバナッハ空間とし,  $X^*$  をその双対空間とする.  $X$  と  $X^*$  のノルムを  $\|\cdot\|$  で表す.  $I$  で恒等写像を表す.  $S_X$  で  $X$  の単位球面  $\{x \in X : \|x\| = 1\}$  を表す.  $X$  の点列  $\{x_n\}$  が点  $x \in X$  に強収束することを  $x_n \rightarrow x$  で表し, 弱収束することを  $x_n \rightharpoonup x$  で表す. 線形連続汎関数  $x^* \in X^*$  の点  $x \in X$  における値  $x^*(x)$  を  $\langle x, x^* \rangle$  で表すこともある.  $X$  から  $X^*$  への双対写像  $J$  は

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\} \quad (\forall x \in X)$$

で定義される  $X$  から  $X^*$  への集合値写像である. Hahn-Banach の定理により, 任意の  $x \in X$  について  $J(x)$  は空でない. また, 任意の  $x \in X$  について  $J(x)$  が一点集合となるとき,  $X$  は滑らかであるといい, この場合には  $J: X \rightarrow X^*$  とみなす. 特に,  $X$  がヒルベルト空間であれば,  $J = I$  となる.  $X$  が狭義凸であるとは,  $\|(x+y)/2\| < 1$  が任意の相異なる  $x, y \in S_X$  について成り立つことをいう. また,  $X$  が一様凸であるとは, 任意の  $\varepsilon \in (0, 2]$  に対して, ある  $\delta > 0$  が存在して,

$$x, y \in S_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta \quad (2.1)$$

が成り立つことをいう.  $X$  が一様凸であれば,  $X$  は狭義凸かつ回帰的である.  $X$  が滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間であるとき,  $J: X \rightarrow X^*$  は  $X$  のノルム位相と  $X^*$  の弱位相に関して連続な一価の全単射となる. このとき,  $X^*$  から  $X$  への双対写像  $J_*$  は  $J^{-1}$  と一致する. 詳しくは文献 [18, 19] を参照すると良い.

以下において, 本稿を通して特に断らない限り,  $C$  と  $X$  に次の条件を仮定する.

- $X$  は滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間である.
- $C$  は  $X$  の空でない閉凸集合である.

このとき, 各  $x \in X$  に対し, ただ一つの  $\hat{x} \in C$  が存在し,  $\|\hat{x} - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|$  が成り立つ. このことから,

$$P_C(x) = \hat{x} \quad (\forall x \in X) \quad (2.2)$$

によって写像  $P_C: X \rightarrow C$  を定義することができる. この写像  $P_C$  を  $X$  から  $C$  の上への距離射影という. 言い換えると, 各  $x \in X$  について,  $P_C(x)$  は  $C$  の中で  $x$  に最も近い点である. また, 任意の  $x \in X$  と  $z \in C$  について,

$$z = P_C(x) \iff \sup_{y \in C} \langle y - z, J(x - z) \rangle \leq 0 \quad (2.3)$$

が成り立つ.

写像  $T: C \rightarrow X$  の不動点全体の集合を  $F(T)$  で表す. つまり,

$$F(T) = \{u \in C : Tu = u\} \quad (2.4)$$

である. また,  $p \in C$  が  $T$  の漸近的不動点 [16] であるとは,  $C$  の点列  $\{z_n\}$  で  $z_n \rightarrow p$  かつ  $z_n - Tz_n \rightarrow 0$  を満たすものが存在することをいい,  $T$  の漸近的不動点全体の集合を  $\hat{F}(T)$  で表す. 明らかに,  $F(T) \subset \hat{F}(T)$  が成り立つが, この逆の包含関係が成り立つとは限らない.

$T: C \rightarrow X$  とする. このとき,  $T$  が P 型の写像である [2] とは,

$$\langle Tx - Ty, J(x - Tx) - J(y - Ty) \rangle \geq 0 \quad (\forall x, y \in C) \quad (2.5)$$

が成り立つことをいう. 次は P 型の写像に関する基本事項である (cf. [1-3]).

- $X$  がヒルベルト空間であるとき,  $T$  が P 型であることは,  $T$  が堅非拡大であることと同値である.
- 距離射影  $P_C$  は  $X$  からそれ自身への P 型の写像であり,  $F(P_C) = C$  が成り立つ.
- $f: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  を proper で下半連続な凸関数とし,  $\lambda > 0$  とするとき,

$$J_\lambda(x) = \operatorname{argmin}_{y \in X} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 \right\} \quad (\forall x \in X) \quad (2.6)$$

により定まる写像  $J_\lambda$  は  $X$  からそれ自身への P 型の写像であり,  $F(J_\lambda)$  は  $f$  の最小点全体の集合  $\operatorname{argmin}_{y \in X} f(y)$  と一致する.

- $A: X \rightarrow 2^{X^*}$  を極大単調作用素とし,  $\lambda > 0$  とするとき,

$$J_\lambda(x) = (I + \lambda J^{-1}A)^{-1}(x) \quad (\forall x \in X) \quad (2.7)$$

により定まる写像  $J_\lambda$  は  $X$  からそれ自身への P 型の写像であり,  $F(J_\lambda)$  は  $A$  の零点全体の集合  $A^{-1}(0) (= \{u \in X : 0 \in Au\})$  と一致する.

次は P 型の写像に対する不動点定理である.

**定理 2.1** ([2]). 滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間の空でない有界閉凸集合からそれ自身への P 型の写像は不動点をもつ.

### 3 補題

P 型の写像は次の基本的な性質をもつ.

**補題 3.1** ([3]).  $T: C \rightarrow X$  を P 型の写像とすると、次が成り立つ.

- (1)  $F(T)$  は閉凸集合である.
- (2)  $F(T) = \widehat{F}(T)$  が成り立つ.
- (3)  $\lambda \in [0, 1]$  とするとき,  $U = \lambda I + (1 - \lambda)T$  で定義される写像  $U: C \rightarrow X$  も P 型の写像である.

次に, 写像列に対する二つの条件を定義する.  $\{T_n\}$  を  $C$  から  $X$  への写像の列とし,  $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$  が空でないとする.

- $\{T_n\}$  が条件 (Z1) を満たすとは,  $\{z_n\}$  が  $C$  の有界点列で

$$z_n - T_n z_n \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

を満たすとき,  $\{z_n\}$  の任意の弱収束部分列の極限が  $F$  の要素となることをいう.

- $\{T_n\}$  が条件 (Z2) を満たすとは,  $\{z_n\}$  が  $C$  の有界点列で

$$z_n - T_n z_n \rightarrow 0 \quad \text{かつ} \quad z_n - z_{n+1} \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

を満たすとき,  $\{z_n\}$  の任意の弱収束部分列の極限が  $F$  の要素となることをいう.

明らかに, 条件 (Z1) を満たす  $\{T_n\}$  は条件 (Z2) も満たす. また,  $\{T_n\}$  が一つの写像  $T: C \rightarrow X$  を用いて  $T_n = T$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) で与えられるとき,  $\{T_n\}$  が条件 (Z1) を満たすことは  $F(T) = \widehat{F}(T)$  と同値である. 従って, 補題 3.1 の (2) から次が従う.

**補題 3.2** ([3]).  $T: C \rightarrow X$  を P 型の写像とし,  $F(T)$  が空でないとする. このとき,  $T_n = T$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) で定まる写像列  $\{T_n\}$  は条件 (Z1) を満たす.

写像列  $\{T_n\}$  が条件 (Z1) や条件 (Z2) を満たすという性質は,  $T_n$  と恒等写像  $I$  とのアフィン結合によって新たに定まる写像列に引き継がれる.

**補題 3.3** ([3]).  $\{T_n\}$  を  $C$  から  $X$  への写像の列で,  $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$  が空でないものとする.  $\{\alpha_n\}$  を  $\sup_n \alpha_n < 1$  を満たす実数列とし,  $U_n = \alpha_n I + (1 - \alpha_n)T_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) で  $C$  から  $X$  への写像の列  $\{U_n\}$  を定義する. このとき, 次が成り立つ.

- (1)  $\{T_n\}$  が条件 (Z1) を満たすとき,  $\{U_n\}$  も条件 (Z1) を満たす.  
 (2)  $\{T_n\}$  が条件 (Z2) を満たすとき,  $\{U_n\}$  も条件 (Z2) を満たす.

次の二つの補題は, 条件 (Z1) や条件 (Z2) を満たす写像列の例を与えるものである.

**補題 3.4** ([3]).  $A: X \rightarrow 2^{X^*}$  を極大単調作用素で,  $A^{-1}(0)$  が空でないものとし,  $\{\lambda_n\}$  を正数列で  $\inf_n \lambda_n > 0$  を満たすものとする. このとき,  $J_{\lambda_n} = (I + \lambda_n J^{-1}A)^{-1}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) により定まる  $X$  からそれ自身への写像の列  $\{J_{\lambda_n}\}$  は条件 (Z1) を満たす.

**補題 3.5** ([3]).  $C_1, C_2, \dots, C_N$  を  $X$  の閉凸集合で,  $\bigcap_{k=1}^N C_k$  が空でないものとし,  $I = \{1, 2, \dots, N\}$  とおく. 各  $k \in I$  に対し,  $P_k$  で  $X$  から  $C_k$  の上への距離射影を表すものとし,  $r: \mathbb{N} \rightarrow I$  を次の条件を満たす写像とする.

$$\forall k \in I, \exists p_k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{r(n), r(n+1), \dots, r(n+p_k-1)\}. \quad (3.3)$$

このとき,  $\{P_{r(n)}\}$  は条件 (Z2) を満たす.

**補足 3.6.** 補題 3.5 の証明においては, 文献 [4] における手法を参考にした.

## 4 結果

次の補題は, 閉凸集合列と空間の点列に関するやや抽象的な結果である.

**補題 4.1** ([3]).  $X$  を滑らかな一様凸バナッハ空間とし,  $\{M_n\}$  と  $\{N_n\}$  を  $X$  の空でない閉凸集合列とする.  $x \in X$  とし,  $\{x_n\}$  を  $X$  の点列とする. 次を仮定する.

- (1) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  について,  $x_n = P_{N_n}(x)$ ,  $x_{n+1} = P_{M_n}(x)$ ,  $x_{n+1} \in N_n$  が成り立つ.  
 (2)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$  は空でない.

このとき,  $\{\|x_n - x\|\}$  は収束列であり,  $\lim_n \|x_n - x_{n+1}\| = 0$  が成り立つ. また,  $X$  の空でない閉凸集合  $F$  で次を満たすものが存在するとする.

- (3)  $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ .  
 (4)  $\{x_n\}$  の任意の弱収束部分列の極限は  $F$  の要素である.

このとき,  $\{x_n\}$  は  $P_F(x)$  に強収束する.

補題 4.1 を用いることにより, 次の二つの強収束定理を得る. まず, 文献 [13, 14, 17] の

手法を参考にして得られた次の結果を述べる.

**定理 4.2** ([3]).  $X$  を滑らかな一様凸バナッハ空間とし,  $C$  を  $X$  の空でない閉凸集合とする.  $\{T_n\}$  を  $C$  からそれ自身への P 型の写像からなる列で  $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$  が空でないものとし,  $\{T_n\}$  は条件 (Z2) を満たすとする.  $C$  の点列  $\{x_n\}$  を  $x_1 = x \in C$ ,

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C : \langle z - T_n x_n, J(x_n - T_n x_n) \rangle \leq 0\}; \\ D_n = \{z \in C : \langle z - x_n, J(x - x_n) \rangle \leq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.1)$$

により定義する. このとき,  $\{x_n\}$  は  $P_F(x)$  に強収束する.

**証明の概略.** まず, 補題 3.1 の (1) と仮定より,  $F$  が  $X$  の空でない閉凸集合であることが分かる.

次に, 数学的帰納法を用いて  $\{x_n\}$  が well-defined であること及び  $F \subset C_n \cap D_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) が成り立つことを示す.

ここで,  $M_n = C_n \cap D_n$  と  $N_n = D_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) により  $X$  の空でない閉凸集合列  $\{M_n\}$  と  $\{N_n\}$  を定義すると, 各  $n \in \mathbb{N}$  について,  $x_{n+1} = P_{M_n}(x) \in N_n$  と  $x_n = P_{N_n}(x)$  が成り立つ. さらに,  $\emptyset \neq F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$  も成り立つ.

これより, 補題 4.1 の前半部分を用いることができ,  $\{\|x_n - x\|\}$  は収束列となり,  $\lim_n \|x_n - x_{n+1}\| = 0$  となる. また,

$$\|x_n - T_n x_n\| \leq \|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

を示すことができる.  $\{T_n\}$  は条件 (Z2) を満たすので,  $\{x_n\}$  の任意の弱収束部分列の極限は  $F$  に属する.

以上より, 補題 4.1 の後半部分から結論を得る. □

次に, 文献 [20] の手法を参考にして得られた次の結果を述べる.

**定理 4.3** ([3]).  $X, C, \{T_n\}, F$  を定理 4.2 と同じものとし,  $C$  の点列  $\{x_n\}$  を  $x_1 = x \in C = C_0$ ,

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C : \langle z - T_n x_n, J(x_n - T_n x_n) \rangle \leq 0\} \cap C_{n-1}; \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

により定義する. このとき,  $\{x_n\}$  は  $P_F(x)$  に強収束する.

**証明の概略.** 定理 4.2 の証明の概略より,  $F$  は  $X$  の空でない閉凸集合である.

次に、数学的帰納法を用いて  $\{x_n\}$  が well-defined であること及び  $F \subset C_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) が成り立つことを示す。

ここで、 $M_n = C_n$  と  $N_n = C_{n-1}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) により  $X$  の空でない閉凸集合列  $\{M_n\}$  と  $\{N_n\}$  を定義する。このとき、各  $n \in \mathbb{N}$  について、 $x_{n+1} = P_{M_n}(x) \in N_n$  と  $x_n = P_{N_n}(x)$  が成り立つ。さらに、 $\emptyset \neq F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$  も成り立つ。

これより、補題 4.1 の前半部分を用いることができ、 $\{\|x_n - x\|\}$  は収束列であり、 $\lim_n \|x_n - x_{n+1}\| = 0$  となる。また、

$$D_n = \{z \in C : \langle z - T_n x_n, J(x_n - T_n x_n) \rangle \leq 0\} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (4.4)$$

により定まる  $X$  の空でない閉凸集合列  $\{D_n\}$  を用いて

$$\|x_n - T_n x_n\| \leq \|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

を示すことができる。 $\{T_n\}$  は条件 (Z2) を満たすので、 $\{x_n\}$  の任意の弱収束部分列の極限は  $F$  に属する。

以上より、補題 4.1 の後半部分から結論を得る。  $\square$

## 5 系

本節では、前節までの結果を用いて四つの系を得る。まず、一つの P 型の写像に対するの次の系を証明する。

**系 5.1** ([3]).  $X$  を滑らかな一様凸バナッハ空間とし、 $C$  を  $X$  の空でない閉凸集合とする。  $T: C \rightarrow C$  を P 型の写像で  $F(T)$  が空でないものとし、 $\{\alpha_n\}$  を  $[0, 1)$  の数列で  $\sup_n \alpha_n < 1$  を満たすものとする。  $C$  の点列  $\{x_n\}$  を  $x_1 = x \in C$ ,

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n; \\ C_n = \{z \in C : \langle z - y_n, J(x_n - y_n) \rangle \leq 0\}; \\ D_n = \{z \in C : \langle z - x_n, J(x - x_n) \rangle \leq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.1)$$

により定義する。このとき、 $\{x_n\}$  は  $P_{F(T)}(x)$  に強収束する。

**証明.**  $C$  からそれ自身への写像の列  $\{T_n\}$  を

$$T_n = \alpha_n I + (1 - \alpha_n) T \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (5.2)$$

により定める. 補題 3.1 の (3) により, 各  $T_n$  は P 型の写像である. また,  $\alpha_n \neq 1$  であるので,  $F(T_n) = F(T)$  が成り立つ. よって,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) = F(T) \neq \emptyset$  となる. さらに, 補題 3.2 から  $\{T, T, \dots\}$  が条件 (Z1) を満たすことが分かるので, 補題 3.3 の (1) と  $\sup_n \alpha_n < 1$  によって,  $\{T_n\}$  も条件 (Z1) を満たすことになる. 従って, 定理 4.2 より結論を得る.  $\square$

同様に, 補題 3.1, 3.2, 3.3, 定理 4.3 を用いて, 次の系を示すことができる.

**系 5.2** ([3]).  $X, C, T, \{\alpha_n\}$  を系 5.1 と同じものとし,  $C$  の点列  $\{x_n\}$  を  $x_1 = x \in C = C_0$ ,

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n; \\ C_n = \{z \in C : \langle z - y_n, J(x_n - y_n) \rangle \leq 0\} \cap C_{n-1}; \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.3)$$

により定義する. このとき,  $\{x_n\}$  は  $P_{F(T)}(x)$  に強収束する.

次に, 極大単調作用素の零点問題に関する系を証明する.

**系 5.3** ([13]).  $X$  を滑らかな一様凸バナッハ空間とし,  $A: X \rightarrow 2^{X^*}$  を極大単調作用素で  $A^{-1}(0)$  が空でないものとする.  $\{\lambda_n\}$  を正数列で  $\inf_n \lambda_n > 0$  を満たすものとし,  $\{\alpha_n\}$  を  $[0, 1)$  の数列で  $\sup_n \alpha_n < 1$  を満たすものとする.  $\{J_{\lambda_n}\}$  を

$$J_{\lambda_n} = (I + \lambda_n J^{-1} A)^{-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (5.4)$$

により定まる  $X$  からそれ自身への写像の列とし,  $X$  の点列  $\{x_n\}$  を  $x_1 = x \in X$ ,

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n} x_n; \\ C_n = \{z \in X : \langle z - y_n, J(x_n - y_n) \rangle \leq 0\}; \\ D_n = \{z \in X : \langle z - x_n, J(x - x_n) \rangle \leq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.5)$$

により定義する. このとき,  $\{x_n\}$  は  $P_{A^{-1}(0)}(x)$  に強収束する.

**証明.** 各  $J_{\lambda_n}$  は  $X$  からそれ自身への P 型の写像であり,  $F(J_{\lambda_n}) = A^{-1}(0)$  が成り立つ. そこで,  $X$  からそれ自身への写像の列  $\{T_n\}$  を

$$T_n = \alpha_n I + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (5.6)$$

により定める. 補題 3.1 の (3) により, 各  $T_n$  は P 型の写像である. また,  $\alpha_n \neq 1$  であるので,  $F(T_n) = F(J_{\lambda_n})$  が成り立つ. よって,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) = A^{-1}(0) \neq \emptyset$  となる. さらに,

補題 3.4 と  $\inf_n \lambda_n > 0$  から  $\{J_{\lambda_n}\}$  が条件 (Z1) を満たすことが分かるので、補題 3.3 の (1) と  $\sup_n \alpha_n < 1$  より、 $\{T_n\}$  も条件 (Z1) を満たすことになる。従って、定理 4.2 から結論を得る。  $\square$

同様に、補題 3.1, 3.3, 3.4, 定理 4.3 を用いて次の系を示すことができる。

**系 5.4** ([3]).  $X, A, \{\lambda_n\}, \{\alpha_n\}, \{J_{\lambda_n}\}$  を系 5.3 と同じものとし、 $X$  の点列  $\{x_n\}$  を  $x_1 = x \in X = C_0$ ,

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n} x_n; \\ C_n = \{z \in X : \langle z - y_n, J(x_n - y_n) \rangle \leq 0\} \cap C_{n-1}; \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.7)$$

により定義する。このとき、 $\{x_n\}$  は  $P_{A^{-1}(0)}(x)$  に強収束する。

## 6 応用

本節では、凸最小化問題と凸制約可能性問題の解への収束定理を得る。まず、凸最小化問題について考察する。

**問題 6.1** (凸最小化問題).  $C$  を滑らかな一様凸バナッハ空間  $X$  の空でない閉凸集合とし、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  を連続な凸関数で

$$F = \{u \in C : f(u) = \inf f(C)\} \quad (6.1)$$

が空でないものとする。このとき、 $F$  の要素を求めよ。

系 5.4 を用いると、問題 6.1 の解への収束定理を得ることができる。

**系 6.2** ([3]).  $X, C, f, F$  を問題 6.1 と同じものとする。 $\{\lambda_n\}$  を正数列で  $\inf_n \lambda_n > 0$  を満たすものとし、 $\{\alpha_n\}$  を  $[0, 1)$  の数列で  $\sup_n \alpha_n < 1$  を満たすものとする。 $\{J_{\lambda_n}\}$  を

$$J_{\lambda_n}(x) = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda_n} \|y - x\|^2 \right\} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, x \in X) \quad (6.2)$$

により定義される  $X$  からそれ自身への写像の列とし、 $X$  の点列  $\{x_n\}$  を  $x_1 = x \in X = C_0$ ,

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n} x_n; \\ C_n = \{z \in X : \langle z - y_n, J(x_n - y_n) \rangle \leq 0\} \cap C_{n-1}; \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.3)$$

により定義する. このとき,  $\{x_n\}$  は  $P_F(x)$  に強収束する.

最後に, 凸制約可能性問題について考察する.

**問題 6.3** (凸制約可能性問題).  $X$  を滑らかな一様凸バナッハ空間とし,  $C_1, C_2, \dots, C_N$  を  $X$  の閉凸集合で

$$F = \bigcap_{k=1}^N C_k \quad (6.4)$$

が空でないものとする. このとき,  $F$  の要素を求めよ.

補題 3.5 と定理 4.2 を用いると, 問題 6.3 の解への収束定理を得ることができる.

**系 6.4** ([3]).  $X, C_1, C_2, \dots, C_N, F$  を問題 6.3 と同じものとし,  $I = \{1, 2, \dots, N\}$  とおく. 各  $k \in I$  について,  $P_k$  で  $X$  から  $C_k$  の上への距離射影を表すものとし,  $r: \mathbb{N} \rightarrow I$  を (3.3) を満たす写像とする.  $X$  の点列  $\{x_n\}$  を  $x_1 = x \in X$ ,

$$\begin{cases} C_n = \{z \in X : \langle z - P_{r(n)}x_n, J(x_n - P_{r(n)}x_n) \rangle \leq 0\}; \\ D_n = \{z \in X : \langle z - x_n, J(x - x_n) \rangle \leq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.5)$$

により定義する. このとき,  $\{x_n\}$  は  $P_F(x)$  に強収束する.

## 参考文献

- [1] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Existence of fixed points of firmly nonexpansive-like mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2010), Art. ID 512751, 15.
- [2] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.
- [3] ———, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Nonlinear analysis and optimization, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 1–17.
- [4] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Construction of best Bregman approximations in reflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 3757–3766 (electronic).
- [5] F. E. Browder, *Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **53** (1965), 1272–1276.
- [6] ———, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965), 1041–1044.
- [7] ———, *Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces*, Math. Z. **100** (1967), 201–225.
- [8] R. E. Bruck Jr., *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

- [9] A. Genel and J. Lindenstrauss, *An example concerning fixed points*, Israel J. Math. **22** (1975), 81–86.
- [10] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [11] K. Goebel and S. Reich, *Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 83, Marcel Dekker Inc., New York, 1984.
- [12] B. Martinet, *Détermination approchée d'un point fixe d'une application pseudo-contractante. Cas de l'application prox*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **274** (1972), A163–A165 (French).
- [13] S. Matsushita and W. Takahashi, *A proximal-type algorithm by the hybrid method for maximal monotone operators in a Banach space*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2007, pp. 355–365.
- [14] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), 439–445.
- [15] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.
- [16] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.
- [17] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.
- [18] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [19] ———, *Convex analysis & approximation of fixed points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).
- [20] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.