数理解析研究所講究録
第 1821 巻 2013 年 40-47

バナッハ空間における単調作用素に対する近接点法について (On proximal point methods for monotone operators in Banach spaces)

大分大学工学部 高阪 史明 (Kohsaka, Fumiaki)*
Department of Computer Science and Intelligent Systems,
Oita University

概要

バナッハ空間における値域条件を満たす単調作用素に対する二種類の零点近似法に関して得られた存在定理と収束定理を紹介する.

1 はじめに

凸最小化問題, 変分不等式問題, 鞍点問題, 均衡問題などの多くの非線形問題は, バナッハ空間 X で定義された単調作用素 $A\colon X \to 2^{X^*}$ の零点, つまり, 方程式 $0 \in Au$ の解を求める問題に帰着される.

単調作用素の零点を近似する方法の一つに, Martinet [15] によって導入され, Rockafellar [17] によってより一般的に研究された近接点法 (proximal point algorithm) がある. これは, ヒルベルト空間 H における極大単調作用素 $A\colon H \to 2^H$, 正数列 $\{\lambda_n\}$, $x_1 \in H$ に対し, 漸化式

$$x_{n+1} = (I + \lambda_n A)^{-1} x_n \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{1.1}$$

により点列 $\{x_n\}$ を定義する方法である. ここで, I は H 上の恒等写像を表す. 1976 年, Rockafellar [17] は, $\inf_n \lambda_n > 0$ を仮定し, 次を証明した.

(1) A の零点が存在するための必要十分条件は, $\{x_n\}$ が有界となることである.

* 大分大学 工学部 知能情報システム工学科; 〒870-1192 大分市旦野原 700; email: f-kohsaka@oita-u.ac.jp

(2) A の零点が存在するとき, $\{x_n\}$ は A の零点に弱収束する.

近接点法による点列 $\{x_n\}$ は, 一般に強収束するとは限らない (cf. [4,6]). また, 各 $\lambda > 0$ に対して, $(I + \lambda A)^{-1}$ により定まる H 上の一価写像は A のリゾルベントとよばれ, 次の重要な性質を持つ.

(R1) $(I + \lambda A)^{-1}$ の不動点全体の集合と A の零点全体の集合は一致する.
(R2) $\|(I + \lambda A)^{-1}x - (I + \lambda A)^{-1}y\| \leq \|x - y\|$ $(\forall x, y \in H)$ が成り立つ. つまり, $(I + \lambda A)^{-1}$ は非拡大写像である.

2000 年, Kamimura–Takahashi [8] は, 次の二つの漸化式

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)(I + \lambda_n A)^{-1} x_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.2}$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x_1 + (1 - \alpha_n)(I + \lambda_n A)^{-1} x_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.3}$$

によって定義される零点近似列を導入した. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0, 1]$ の数列である. 彼らは, A の零点が存在する場合に, (1.2) に関する弱収束定理と (1.3) に関する強収束定理を証明した. さらに, Kamimura–Takahashi [9, 10] は彼らの結果をバナッハ空間における増大作用素に対して一般化した. 一方, Kamimura–Kohsaka–Takahashi [7] と Kohsaka–Takahashi [12] は, Kamimura–Takahashi [8] の結果をバナッハ空間における極大単調作用素に対して次の様に一般化した. ここで, J は X から X^* への双対写像を表す.

定理 1.1 ([7]). X を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $A \colon X \to 2^{X^*}$ を極大単調作用素とする. $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の数列で $\limsup_n \alpha_n < 1$ を満たすものとし, $\{\lambda_n\}$ を正数列で $\inf_n \lambda_n > 0$ を満たすものとする. 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 \in X; \\ x_{n+1} = J^{-1}\big(\alpha_n J x_n + (1 - \alpha_n) J (J + \lambda_n A)^{-1} J(x_n)\big) \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{cases} \tag{1.4}$$

により定義する. このとき, A の零点が存在し, J が点列的に弱連続であれば, $\{x_n\}$ は $\{\Pi_{A^{-1}0}(x_n)\}$ の強極限に弱収束する.

定理 1.2 ([12]). X を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $A \colon X \to 2^{X^*}$ を極大単調作用素とする. $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の数列で $\lim_n \alpha_n = 0$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を満たすものとし, $\{\lambda_n\}$ を正数列で $\lim_n \lambda_n = \infty$ を満たすものとする. 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 \in X; \\ x_{n+1} = J^{-1}\big(\alpha_n J x_1 + (1 - \alpha_n) J (J + \lambda_n A)^{-1} J(x_n)\big) \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{cases} \tag{1.5}$$

により定義する．このとき，A の零点が存在すれば，$\{x_n\}$ は $\Pi_{A^{-1}0}(x_1)$ に強収束する．

文献 [7,12] においては，極大単調作用素の零点の存在性を仮定した上で，それぞれの収束定理が得られたが，以下の事柄については研究がなされていなかった．

- 零点が存在しない状況下での近似列の漸近挙動の研究
- 値域条件を満たす単調作用素に対する零点近似法の研究

最近になり，Aoyama–Kohsaka–Takahashi [3] により，これらの課題について幾つかの成果が得られた．本稿では，文献 [3] で得られた成果を報告する．

2 準備

本稿で取り扱う線形空間は実線形空間とする．X をバナッハ空間とし，X^* でその双対空間を表す．$\|\cdot\|$ で X と X^* のノルムを表す．また，S_X で X の単位球面を表す．X の点列 $\{x_n\}$ が x に強収束すること及び弱収束することを，それぞれ，$x_n \to x$ 及び $x_n \rightharpoonup x$ で表す．$x^* \in X^*$ の $x \in X$ における値 $x^*(x)$ を $\langle x, x^* \rangle$ で表す．X から X^* への双対写像 J は

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\} \quad (\forall x \in X)$$

で定義される．X が滑らかであるとは，

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

が任意の $x, y \in S_X$ について存在することを言う．このとき，J は一価写像となる．X が一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つとは，任意の $y \in S_X$ に対して，(2.1) が $x \in S_X$ に関して一様収束することを言う．さらに，X が一様に滑らかであるとは，(2.1) が $x, y \in S_X$ に関して一様収束することを言う．X が滑らかであるとき，J が点列的に弱連続であるとは，$\{x_n\}$ が X の点列で $x \in X$ に弱収束するとき，$\{J(x_n)\}$ が $J(x)$ に汎弱収束することを言う．X が狭義凸であるとは，$\|(x+y)/2\| < 1$ が任意の相異なる $x, y \in S_X$ について成立することを言う．さらに，X が一様凸であるとは，任意の $\varepsilon \in (0, 2]$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$x, y \in S_X$ かつ $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ならば，$\|(x+y)/2\| \leq 1 - \delta$ が成り立つことを言う．X が滑らかで，狭義凸な回帰的バナッハ空間であれば，J は X から X^* への一価の全単射となり，X^* から X への双対写像は J^{-1} と一致する．

X をバナッハ空間とし，$A\colon X \to 2^{X^*}$ とする．集合値写像 A の定義域，値域，グラフはそれぞれ，$D(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}$，$R(A) = \bigcup_{x \in X} Ax$，$G(A) = \{(x, x^*) \in X \times X^* :$

$x^* \in Ax\}$ により定まる. $u \in X$ とするとき, u が A の零点であるとは, $0 \in Au$ が成り立つことを言い, A の零点全体の集合を $A^{-1}0$ で表す. A が単調作用素であるとは, $\langle x-y, x^*-y^* \rangle \geq 0$ が任意の $(x,x^*),(y,y^*) \in G(A)$ について成り立つことを言う. また, A が極大単調作用素であるとは, A が単調作用素であり, さらに, $G(A) \subset G(B)$ かつ $A \neq B$ となる単調作用素 $B\colon X \to 2^{X^*}$ が存在しないことを言う. A が極大単調であれば, $A^{-1}0$ は閉凸集合となる. 特に, proper で下半連続な凸関数 $f\colon X \to (-\infty,\infty]$ の劣微分 $\partial f\colon X \to 2^{X^*}$ は極大単調作用素であり, ∂f の零点全体の集合は, f の X における最小点全体の集合と一致する. 非線形解析学と凸解析学に関しては, 文献 [5,19–21] を参照すると良い.

以下, 本稿を通して, 特に断らなければ次を仮定する.

- X は滑らかで狭義凸な回帰的実バナッハ空間とし, C は X の空でない閉凸集合とする.
- J で X から X^* への双対写像を表し, ϕ で $\phi(y,x) = \|y\|^2 - 2\langle y, Jx \rangle + \|x\|^2$ $(\forall y,x \in X)$ により定まる $X \times X$ から $[0,\infty)$ への関数を表す.
- $A\colon X \to 2^{X^*}$ は単調作用素で, $D(A) \subset C \subset \bigcap_{\lambda>0} J^{-1}R(J+\lambda A)$ を満たすものとする.

$S\colon C \to X$ とする. S の不動点全体の集合を $F(S)$ で表す. S が (r) 型であるとは, $F(S) \neq \emptyset$ であり, $\phi(u,Sx) \leq \phi(u,x)$ $(\forall (u,x) \in F(S) \times C)$ が成り立つことを言う. このとき, $F(S)$ は閉凸集合となる (cf. [16]). S が (Q) 型であるとは,

$$\phi(Sx,Sy) + \phi(Sy,Sx) + \phi(Sx,x) + \phi(Sy,y) \leq \phi(Sx,y) + \phi(Sy,x) \quad (\forall x,y \in C)$$

が成り立つことを言う (cf. [2,14]). 定義から明らかに, S が不動点を持つ (Q) 型の写像であれば, S は (r) 型となる. 各 $\lambda > 0$ に対し, $Q_\lambda^A(x) = (J+\lambda A)^{-1}Jx$ $(\forall x \in C)$ で定義される写像 Q_λ^A を A のリゾルベントと言う. この写像は次の性質を持つ.

(a) $Q_\lambda^A\colon C \to C$ は一価写像であり, $F(Q_\lambda^A) = A^{-1}0$ が成り立つ.
(b) Q_λ^A は (Q) 型である (cf. [2,14]).
(c) $A^{-1}0$ が空でない場合, Q_λ^A は (r) 型である. これより, $A^{-1}0$ は閉凸集合となる.

性質 (a) は第 1 節の (R1) を一般化するものである.

各 $x \in X$ に対し, $\phi(z_x,x) = \min_{y \in C} \phi(y,x)$ を満たす $z_x \in C$ がただ一つ存在する. このことから, $\Pi_C(x) = z_x$ $(\forall x \in X)$ によって, 一価の全射 $\Pi_C\colon X \to C$ が定まる. これを, X から C の上への generalized projection と言う (cf. [1,11]). $A^{-1}0$ が空でない場

合, 性質 (c) より, X から $A^{-1}0$ の上への generalized projection が定まる.

3 単調作用素の零点に関する存在定理と収束定理

次の補題は A の単調性から証明されるものである. これは, ヒルベルト空間におけるリゾルベントの非拡大性 (第 1 節の (R2)) と同様に重要である.

補題 3.1 ([3]). $\lambda, \mu > 0$ とするとき,

$$\begin{aligned}\lambda\phi(Q_\lambda^A x, Q_\mu^A y) + \mu\phi(Q_\mu^A y, Q_\lambda^A x) + \mu\phi(Q_\lambda^A x, x) + \lambda\phi(Q_\mu^A y, y) \\ \le \lambda\phi(Q_\lambda^A x, y) + \mu\phi(Q_\mu^A y, x) \quad (\forall x, y \in C)\end{aligned} \tag{3.1}$$

が成り立つ.

補題 3.1 の系として, ヒルベルト空間において次が成り立つことが分かる.

系 3.2 ([3]). X をヒルベルト空間とし, $\lambda, \mu > 0$ とするとき,

$$\begin{aligned}\lambda\left\|Q_\lambda^A x - Q_\mu^A y\right\|^2 + \mu\left\|Q_\mu^A y - Q_\lambda^A x\right\|^2 + \mu\left\|Q_\lambda^A x - x\right\|^2 + \lambda\left\|Q_\mu^A y - y\right\|^2 \\ \le \lambda\left\|Q_\lambda^A x - y\right\|^2 + \mu\left\|Q_\mu^A y - x\right\|^2 \quad (\forall x, y \in C)\end{aligned}$$

が成り立つ.

補題 3.1 を用いると, 単調作用素のリゾルベントが持つ次の重要な性質を証明することができる. この補題は, 定理 3.5, 定理 3.6, 定理 3.7 の証明で用いた.

補題 3.3 ([3]). $\{\lambda_n\}$ を正数列とし, $u \in X$ とする. また, $\{x_n\}$ を C の点列とし, 次のどちらかを仮定する.

(1) X のノルムは一様に Gâteaux 微分可能であり, $\inf_n \lambda_n > 0$, $x_n \rightharpoonup u$, $x_n - Q_{\lambda_n}^A(x_n) \to 0$ が成り立つ.
(2) $\{x_n\}$ は有界であり, $\lim_n \lambda_n = \infty$ と $Q_{\lambda_n}^A(x_n) \rightharpoonup u$ が成り立つ.

このとき, u は A の零点である.

補題 3.1 と文献 [13, 14, 18] における手法を用いることにより, 次の零点の存在定理を証明することができる.

定理 3.4 ([3]). $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列で $\limsup_n \alpha_n < 1$ を満たすものとし, $\{\lambda_n\}$ を正数

列で $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\infty$ を満たすものとする. 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 \in C; \\ x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}\bigl(\alpha_n J x_n + (1-\alpha_n) J Q_{\lambda_n}^A(x_n)\bigr) \quad (n=1,2,\dots) \end{cases} \tag{3.2}$$

により定義する. このとき, A の零点が存在するための必要十分条件は, $\{Q_{\lambda_n}^A(x_n)\}$ が有界となることである.

次の存在定理は, 補題 3.3 を用いて証明することができる.

定理 3.5 ([3]). $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列とし, $\{\lambda_n\}$ を正数列で $\lim_n \lambda_n=\infty$ を満たすものとする. 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 \in C; \\ x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}\bigl(\alpha_n J x_1 + (1-\alpha_n) J Q_{\lambda_n}^A(x_n)\bigr) \quad (n=1,2,\dots) \end{cases} \tag{3.3}$$

により定義する. このとき, A の零点が存在するための必要十分条件は, $\{Q_{\lambda_n}^A(x_n)\}$ が有界となることである.

補題 3.3 を用いることにより, 次の二つの収束定理を証明することができる.

定理 3.6 ([3]). $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列で $\limsup_n \alpha_n<1$ を満たすものとし, $\{\lambda_n\}$ を正数列で $\inf_n \lambda_n>0$ を満たすものとする. 点列 $\{x_n\}$ を (3.2) により定義する. また, X は一様凸であり, そのノルムは一様に Gâteaux 微分可能であるとし, A の零点の存在を仮定する. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\{x_n\}$ は有界であり, その任意の弱収束部分列の極限は $A^{-1}0$ に属する.
(2) J が点列的に弱連続であれば, $\{x_n\}$ と $\{Q_{\lambda_n}^A(x_n)\}$ は $\{\Pi_{A^{-1}0}(x_n)\}$ の強極限に弱収束する.

定理 3.7 ([3]). $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列で $\lim_n \alpha_n=0$ と $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ を満たすものとし, $\{\lambda_n\}$ を正数列で $\lim_n \lambda_n=\infty$ を満たすものとする. 点列 $\{x_n\}$ を (3.3) により定義する. また, X は一様凸であるとし, A の零点の存在を仮定する. このとき, $\{x_n\}$ と $\{Q_{\lambda_n}^A(x_n)\}$ は $\Pi_{A^{-1}0}(x_1)$ に強収束する.

4 極大単調作用素に対する系

定理 3.4 と定理 3.6 から次を得る. 空間の滑らかさに関する仮定が定理 1.1 より弱い.

系 4.1 ([3]). X を一様凸バナッハ空間とし, そのノルムは一様に Gâteaux 微分可能であるとする. また, $A\colon X \to 2^{X^*}$ を極大単調作用素とする. $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列で $\limsup_n \alpha_n < 1$ を満たすものとし, $\{\lambda_n\}$ を正数列で $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ を満たすものとする. 点列 $\{x_n\}$ を (1.4) により定義する. このとき, 次が成り立つ.

(1) A の零点が存在するための必要十分条件は, $\{Q_{\lambda_n}^A(x_n)\}$ が有界となることである.
(2) A の零点が存在し, J が点列的に弱連続で, $\inf_n \lambda_n > 0$ が成り立つとき, $\{x_n\}$ と $\{Q_{\lambda_n}^A(x_n)\}$ は $\{\Pi_{A^{-1}0}(x_n)\}$ の強極限に弱収束する.

定理 3.5 と定理 3.7 から次の系を得る.

系 4.2 ([3]). X を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $A\colon X \to 2^{X^*}$ を極大単調作用素とする. $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列とし, $\{\lambda_n\}$ を正数列で $\lim_n \lambda_n = \infty$ を満たすものとする. 点列 $\{x_n\}$ を (1.5) により定義する. このとき, 次が成り立つ.

(1) A の零点が存在するための必要十分条件は, $\{Q_{\lambda_n}^A(x_n)\}$ が有界となることである.
(2) A の零点が存在し, $\lim_n \alpha_n = 0$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ が成り立つとき, $\{x_n\}$ と $\{Q_{\lambda_n}^A(x_n)\}$ は $\Pi_{A^{-1}0}(x_1)$ に強収束する.

補足 4.3. 文献 [3] では, 凸最小化問題と非拡大写像に対する不動点問題に関する系も得られた.

5 最後に

文献 [7, 12] では, 極大単調作用素 $A\colon X \to 2^{X^*}$ のリゾルベントが持つ性質

$$\phi(y, Q_\lambda^A x) + \phi(Q_\lambda^A x, x) \le \phi(y, x) \quad (\forall \lambda > 0,\ (y, x) \in A^{-1}0 \times X) \tag{5.1}$$

を用いることで, 零点近似列の漸近挙動を調べた. 性質 (5.1) は, A が零点を持つ場合に意味がある.

一方, 本研究では性質 (3.1) に着目した. これは, 性質 (5.1) を一般化した不等式であり, A の零点が存在しない場合でも有効である. 性質 (3.1) を用いることにより, これまで得られていなかった零点の存在定理や値域条件を満たす単調作用素に対する収束定理を証明することができた.

性質 (3.1) を用いれば, 定理 3.6 における J に対する点列的弱連続性の仮定を弱められるのではないかと考えていたのであるが, その問題を解決するには至っていない.

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[3] ———, *Proximal point methods for monotone operators in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 259–281.

[4] H. H. Bauschke, J. V. Burke, F. R. Deutsch, H. S. Hundal, and J. D. Vanderwerff, *A new proximal point iteration that converges weakly but not in norm*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 1829–1835.

[5] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Springer, New York, 2011.

[6] O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403–419.

[7] S. Kamimura, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.

[8] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[9] ———, *Iterative schemes for approximating solutions of accretive operators in Banach spaces*, Sci. Math. **3** (2000), 107–115.

[10] ———, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

[11] ———, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[12] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. (2004), 239–249.

[13] ———, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.

[14] ———, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[15] B. Martinet, *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives*, Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle **4** (1970), 154–158.

[16] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[17] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.

[18] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253–256.

[19] ———, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[20] ———, *Convex Analysis & Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[21] ———, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.