数理解析研究所講究録
第1821巻 2013年 239-244

準凸関数に対する平均値の定理とその適用例

島根大学総合理工学部　鈴木　聡 (Satoshi Suzuki)
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University
島根大学総合理工学部　黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa)
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

概要

微分可能な関数に対する平均値の定理は, 主に微分積分学においてしばしば利用される大変有用なものである. 凸関数に対しても, 微分の拡張である劣微分を用いた平均値の定理が示されており, 凸解析の分野においても様々な拡張がなされている. 本論文では, [12] において示した準凸関数に対する平均値の定理を紹介し, 定理が適用できるような具体的な関数の例について考察する.

1 導入

微分可能な関数に対する平均値の定理とは次のような定理である; f, g をそれぞれ実数 $\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数であり, $a, b \in \mathbb{R}$ を $a < b$ が成り立つようなものとすると, ある $c \in (a, b)$ が存在して $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ が成り立つ. この平均値の定理を用いてテイラーの定理や微分積分学の基本定理が示される等, 微積分学において非常に有用な定理である.

凸関数に対する平均値の定理として次のようなものがある; f, g をそれぞれ実数 $\mathbb{R}^n$ 上の実数値凸関数であり, $a, b \in \mathbb{R}^n$ を $a \neq b$ が成り立つようなものとすると, ある $t \in (0, 1)$ と $v \in \partial f((1-t)x + ty)$ が存在して $f(y) - f(x) = \langle v, y - x \rangle$ が成り立つ. また, クラークの劣微分を用いた平均値の定理等, 凸解析の分野においても様々な拡張がなされている.

我々は [11] において, 準凸関数に対する生成集合を用いた劣微分 (Q-subdifferential) を定義し, それを用いた最適性条件について考察した. 本論文では, [12] において示した, Q-subdifferential を用いた準凸関数に対する平均値の定理を紹介し, 定理が適用できるような具体的な関数の例について考察する.

2 準備

本論文を通じて, X は局所凸ハウスドルフ線形位相空間, X^* をその双対空間, f は X から $\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,\infty]$ への関数とする. f が準凸関数であるとは, 任意の x_1, $x_2 \in X$, $\alpha \in (0,1)$ に対して,

$$f((1-\alpha)x_1+\alpha x_2) \le \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

が成り立つときをいう. 次に, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と $\overline{\mathbb{R}}$ 上の二項関係 $\diamond$ に対して関数 f のレベル集合を次のように定義する:

$$L(f,\diamond,\alpha)=\{x\in X \mid f(x)\diamond\alpha\}.$$

このとき, f が準凸関数であることと, 任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して $L(f,\le,\alpha)$ が凸集合であることは同値である. また, f が準凹関数であるとは, $-f$ が準凸関数であるときをいい, 関数 f が準アフィン関数であるとは, f が準凸かつ準凹であるときをいう. 重要な事実として, f が下半連続準アフィン関数であることと, $f=k\circ w$ となるような $k\in Q$ および $w\in X^*$ が存在することが同値であることが知られている. ここで, $Q=\{h:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}};$ 下半連続非減少$\}$ である. この事実は, 準アフィン関数とはある種の単調性を持った関数である, ということを示している. 次に, 準凸関数に関する次の定理を紹介する.

定理 1. [5] f が下半連続準凸関数であることと, $f=\sup_{i\in I} k_i\circ w_i$ となるような I : 添字集合, $\{k_i\}_{i\in I}\subset Q$ および $\{w_i\}_{i\in I}\subset X^*$ が存在することは同値である.

定理 1 は, 下半連続準凸関数はある下半連続準アフィン関数の族の上限に等しいということを示している. このことは, 下半連続凸関数が, アフィン関数の上限に等しいということと非常に良く対応している. [10] において我々は, この定理を用いて準凸関数の生成集合を次のように定義した.

定義 1. [10] $\{(k_i,w_i)\mid i\in I\}\subset Q\times X^*$ が準凸関数 f の生成集合であるとは $f=\sup_{i\in I}k_i\circ w_i$ が成り立つときをいう.

定理 1 より, 任意の下半連続準凸関数は少なくとも一つの生成集合を持つ. 中でも代表的な例として, f が下半連続真凸関数であるとき, $\{(k_v,v)\mid v\in \mathrm{dom}f^*, k_v(t)=t-f^*(v), \forall t\in\mathbb{R}\}\subset Q\times X^*$ は f の生成集合である. 実際, 任意の $x\in X$ に対して,

$$f(x)=f^{**}(x)=\sup\{\langle v,x\rangle - f^*(v)\mid v\in\mathrm{dom}f^*\}=\sup_{v\in\mathrm{dom}f^*}k_v(\langle v,x\rangle),$$

が成り立つことよりわかる.

我々は [11] において, 準凸関数に対する生成集合を用いた次のような劣微分を定義した.

定義 2. [11] $f: X \to [-\infty, \infty]$ を下半連続準凸関数で $G = \{(k_i, w_i) \mid i \in I\} \subset Q \times X^*$ を生成集合として持つものとし, k_i をそれぞれ lower left-hand Dini 微分可能とする. このとき, f の x_0 における G に対する Q-subdifferential を次のように定義する:

$$\partial_G f(x_0) = \mathrm{clco}\{D_- k_i(\langle w_i, x_0\rangle) w_i \mid i \in I(x_0)\},$$

ただし, $I(x_0) = \{i \in I \mid f(x_0) = k_i \circ w_i(x_0)\}$, $D_- h(t) = \liminf_{\varepsilon \to 0-} \dfrac{h(t+\varepsilon) - h(t)}{\varepsilon}$ とする.

3 平均値の定理

[12] において, 我々は準凸関数に対する次のような平均値の定理を示した.

定理 2. f : X 上の連続な準凸関数, $G = \{(k_i, w_i) \mid i \in I\} \subset Q \times X^*$: f の生成集合, k_i : 微分可能, $x, y \in X$, $x \neq y$ とする.

次の条件のどちらか一つは成り立つと仮定する:

(i) I : 有限集合,

(ii) X : ノルム空間, I : コンパクト位相空間, $(i, x) \mapsto k_i \circ w_i(x)$: $I \times X$ 上で上半連続, $(i, x) \mapsto k_i'(\langle w_i, x\rangle) w_i$: $I \times X$ 上で汎弱位相により連続.

このとき, ある $t \in (0, 1)$ と $v \in \partial_G f((1-t)x + ty)$ が存在して,

$$f(y) - f(x) = \langle v, y - x\rangle .$$

が成り立つ.

次の集合について考える.

$$L = \{k_{(\alpha,\beta,\gamma,p)} \mid (\alpha, \beta, \gamma, p) \in \mathbb{R}^4, \alpha \geq 0, p > 0\},$$

ここで, $k_{(\alpha,\beta,\gamma,p)}$ は次のような $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数とする; $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$k_{(\alpha,\beta,\gamma,p)}(t) = \mathrm{sgn}(t - \beta)\ \alpha\ |t - \beta|^p + \gamma.$$

また, $\mathrm{sgn}(t) = \frac{t}{|t|}$ $(t \neq 0)$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$ とする. 明らかに, $k_{(\alpha,\beta,\gamma,p)}$ は連続非減少関数であるので, $L \subset Q$ が成り立つ. この章では L によって表される下半連続準凸関数の族, すなわち,

$$\mathcal{F}_L = \{\sup_{i \in I} k_i(\langle w_i, \cdot\rangle) \mid I : \text{添字集合}, \{k_i\}_{i \in I} \subset L, \{w_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^n\}$$

に属する関数について考える. ここで, この関数の族 $\mathcal{F}_L$ は, 十分に広いクラスであるということが言える. まず, 明らかに, 全ての凸関数は $\mathcal{F}_L$ に含まれている. さらに, 下半連続準凸関数 f が, 次の条件

$$\liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} > 0 \text{ かつ 下に有界},$$

を満たすとき, $\mathcal{F}_L$ に属すことがわかる ([9]).

系 1. $f \in \mathcal{F}_L$, $G = \{(k_{(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,p_i)}, w_i) \mid i \in I\} \subset L \times \mathbb{R}^n$: f の生成集合, 任意の $i \in I$ に対して $p_i \geq 1$, x, $y \in X$, $x \neq y$ とする.

また, 次の条件のどちらか一つは成り立つと仮定する:

(i) I : 有限集合,

(ii) I : コンパクト位相空間, $(i,x) \mapsto k_{(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,p_i)} \circ w_i(x) : I \times \mathbb{R}^n$ 上で上半連続, $(i,x) \mapsto k'_{(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,p_i)}(\langle w_i, x\rangle)w_i : I \times \mathbb{R}^n$ 上で連続.

このとき, ある $t \in (0,1)$ と $v \in \partial_G f((1-t)x+ty)$ が存在して,

$$f(y) - f(x) = \langle v, y-x\rangle .$$

が成り立つ.

Proof. 任意の $i \in I$ に対して $p_i \geq 1$ より, $k_{(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,p_i)}$ は微分可能. また $\mathbb{R}^n$ はノルム空間であるので, 定理 2 より, ある $t \in (0,1)$ と $v \in \partial_G f((1-t)x+ty)$ が存在して,

$$f(y) - f(x) = \langle v, y-x\rangle .$$

が成り立つ. □

最後に系 1 の適用例について述べる.

Example 1. 次のような $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f について考える.

$$f(x) = \begin{cases} 3(t-3)^3 & x \geq 5 \\ 2(t-2)^2+6 & 5 \geq x \geq 2 \\ -2(t-2)^2+6 & 2 \geq x \geq -1 \\ -4t-16 & -1 \geq x \end{cases}$$

このとき $f \in \mathcal{F}_L$ である. 実際 $I = \{1,2,3\}$, $w_1 = 1$, $w_2 = 1$, $w_3 = -1$,

$$\begin{aligned} k_1(t) &= k_{(3,3,2,3)}(t) = \mathrm{sgn}(t-3)3|t-3|^3 \\ k_2(t) &= k_{(2,2,6,2)}(t) = \mathrm{sgn}(t-2)2|t-2|^2+6 \\ k_3(t) &= k_{(4,0,-16,1)}(t) = 4t-16 \end{aligned}$$

とおくと, $f = \sup_{i \in I} k_i(\langle w_i, \cdot \rangle)$ が成り立つことがわかる. このとき, $G = \{(k_i, w_i) \mid i = 1,2,3,4\}$ とおくと G は f の生成集合となり, Q-subdifferential は以下のようになる.

$$\partial_G f(x) = \begin{cases} 9(t-3)^2 & x > 5 \\ [12,36] & x = 5 \\ 4(t-2) & 5 \geq x \geq 2 \\ -4(t-2) & 2 \geq x \geq -1 \\ [-4,12] & x = -1 \\ -4t & -1 > x \end{cases}$$

ここで, $x = -2$, $y = 5$ とおくと, 定理 1 より, $t \in (0,1)$ と $v \in \partial_G f((1-t)x + ty)$ が存在して, $f(y) - f(x) = \langle v, y - x \rangle$ が成り立つ. 実際, $t = \frac{1}{7}$ とおくと,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{24 - (-8)}{5 - (-2)} = \frac{32}{7} \in [-4, 12] = \partial_G f(-1) = \partial_G f((1-t)x + t(y))$$

となり, 確かに平均値の定理が成り立つことが確認できる.

参考文献

[1] F. H. Clarke, and Yu. S. Ledyaev, *Mean value inequalities*, Proceedings of the AMS. 122 (1994), pp. 1075–1083.

[2] D. T. Luc, *Characterizations of quasiconvex functions*, Bull. Austral. Math. Soc. 48 (1993), pp. 393–406.

[3] J. E. Martínez-Legaz, *Quasiconvex duality theory by generalized conjugation methods*, Optimization 19 (1988), pp. 603–652.

[4] J. E. Martínez-Legaz and P. H. Sach, *A New Subdifferential in Quasiconvex Analysis*, J. Convex Anal. 6 (1999), pp. 1–11.

[5] J. P. Penot, and M. Volle, *On quasi-convex duality*, Math. Oper. Res. 15 (1990), pp. 597–625.

[6] J. P. Penot, *Mean-value theorem with small subdifferentials*, J. Optim. Theory Appl. 94 (1997), pp. 209–221.

[7] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[8] M. Studniarski, *Mean value theorems and sufficient optimality conditions for nonsmooth functions*, J. Math. Anal. Appl. 111 (1985), pp. 313–326.

[9] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *Generalized characterizations on set containments for a certain class of quasiconvex functions*, Proceedings of the Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization. (2008), pp. 331–337.

[10] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *On set containment characterization and constraint qualification for quasiconvex programming*, J. Optim. Theory Appl. 149 (2011), pp. 554–563.

[11] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *Optimality conditions and the basic constraint qualification for quasiconvex programming*, Nonlinear Anal. 74 (2011), pp. 1279–1285.

[12] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *Subdifferential calculus for a quasiconvex function with generator*, J. Math. Anal. Appl. 384 (2011), pp. 677–682.