数理解析研究所講究録
第1821巻 2013年 251-256

w-distanceを用いた最良巡回近接点

島根大学大学院総合理工学研究科 歴舎 朋矢 (Tomoya Rekisha)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Endineering, Shimane University

島根大学総合理工学部 黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa)
Interdisciplinary Faculty of Science and Endineering, Shimane University

概要

完備距離空間において，縮小写像に不動点が存在することが知られている。本論文では，w-distanceを用い，縮小型の写像における最良巡回近接点の存在定理を紹介する。また，最良巡回近接点の存在と距離空間の完備性が同値であることを紹介する。

1 導入

(X,d) を距離空間とする。このとき，$T:X\to X$ が縮小写像であるとは，$r\in(0,1)$ が存在し，任意の $x,y\in X$ に対して $d(Tx,Ty)\leq rd(x,y)$ となることを言う。X が完備であるとき，X 上の全ての縮小写像が X に不動点を持つことが知られている。A,B を空でない X の部分集合とする。このとき，$T:A\cup B\to A\cup B$ が cyclic contraction map であるとは，次の (1), (2) が成り立つことを言う。

(1) $T(A)\subseteq B, T(B)\subseteq A$

(2) $r\in(0,1)$ が存在し，全ての $x\in A,y\in B$ に対して $d(Tx,Ty)\leq rd(x,y)+(1-r)d(A,B)$ となる。

ただし，$d(A,B)=\inf\{d(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$ である。また，$d(x,Tx)=d(A,B)$ となる点 x を最良近接点と言う。[1] では，次の定理が Eldred によって証明された。

定理 1. (X,d) を距離空間，A,B を空でない X の閉集合，T を $A\cup B$ 上の cyclic contraction map とする。このとき，A または B がコンパクトならば，最良近接点が存在する。

[2] において，Vetro は q-cyclic contraction map と呼ばれる写像を定義した。(X,d) を距離空間，$A_1,\dots A_q$ を空でない X の部分集合とする。このとき，$T:\cup_{i=1}^{q}A_i\to\cup_{i=1}^{q}A_i$ が q-cyclic contraction map であるとは，次の (1), (2) が成り立つことを言う。

(1) 全ての $i \in \{1, \ldots, q\}$ に対して，$T(A_i) \subseteq A_{i+1}$ が成り立つ。

(2) ある $r \in (0,1)$ が存在し，全ての $i \in \{1, \ldots, q\}, x \in A_i, y \in A_{i+1}$ に対して，$d(Tx, Ty) \leq rd(x,y) + (1-r)d(A_i, A_{i+1})$ が成り立つ。

ただし，$A_{q+1} = A_1$ とする。また，q-cyclic map T において，ある $i \in \{1, \ldots, q\}$ に対して，$d(x, Tx) = d(A_i, A_{i+1})$ となる $x \in A_i$ を最良近接点と言う。

[2] では，次の定理が証明された。

定理 2. (X,d) を距離空間，$A_1, \ldots, A_q$ を空でない X の閉集合，T を $\cup_{i=1}^q A_i$ 上の q-cyclic contraction map とする。このとき，ある $i \in \{1, \ldots, q\}$ と $x_0 \in A_i$ に対して，点列 $\{T^{qn}x_0\}$ が $x \in A_i$ に収束する部分列 $\{T^{qn_k}x_0\}$ をもつならば，T は最良近接点を持つ。

本論文では，距離空間 (X,d) の部分集合 $A_1, \ldots, A_q$ 上の q-cyclic map T において，$A_1, \ldots, A_q$ の全てを巡回する最短の経路を考える。すなわち，

$$\sum_{i=0}^{q-2} d(T^i x, T^{i+1}x) + d(T^{q-1}x, x) = \inf_{(a_1,\ldots,a_q)\in\prod_{i=1}^q A_i} \left(\sum_{i=1}^{q-1} d(a_i, a_{i+1}) + d(a_q, a_1) \right)$$

となる点 $x \in \cup_{i=1}^q A_i$ について考える。このような x を最良巡回近接点と呼ぶ。次に，w-distance を用い，最良巡回近接点の存在と距離空間の完備性が同値であることを紹介する。

2 準備

(X,d) を距離空間とする。このとき，$\rho : X \times X \to [0,\infty)$ が X の w-distance であるとは，次が成り立つことを言う。

(1) 任意の $x, y, z \in X$ に対して，$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ が成り立つ。

(2) 任意の $x \in X$ に対して,$\rho(x,\cdot) : X \to [0,\infty)$ が下半連続である。

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し，$\rho(z,x) \leq \delta$ かつ $\rho(z,y) \leq \delta$ ならば $d(x,y) \leq \varepsilon$ となる。

距離 d は X の w-distance である。[3], [4] において，w-distance に関連する以下の補題が紹介されている。

補題 1. ([3]) (X,d) を距離空間，ρ を w-distance，$\{x_n\}, \{y_n\}$ を X の点列，$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subseteq [0,\infty)$ を 0 に収束する数列，$x, y, z \in X$ とする。このとき，次が成り立つ。

(1) 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\rho(x_n, y) \leq \alpha_n$ かつ $\rho(x_n, z) \leq \beta_n$ ならば，$y = z$。特に，$\rho(x,y) = 0$ かつ $\rho(x,z) = 0$ ならば $y = z$ となる。

(2) 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\rho(x_n, y_n) \leq \alpha_n$ かつ $\rho(x_n, z) \leq \beta_n$ ならば $\{y_n\}$ は z に収束する。

(3) 全ての $m > n$ となる $n, m \in \mathbb{N}$ に対して，$\rho(x_n, x_m) \leq \alpha_n$ となるならば，$\{x_n\}$ はコーシー列である。

(4) 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\rho(y, x_n) \leq \alpha_n$ となるならば，$\{x_n\}$ はコーシー列である。

補題 2. ([4]) (X, d) を距離空間，F を X の2点以上を含む有界閉集合，c を $c \geq \delta(F)$ となる定数とする。ただし，$\delta(F)$ は F の直径である。このとき，次のように定められた $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ は X の w-distance である。

$$\rho(x, y) = \begin{cases} d(x, y) \ (x, y \in F) \\ c \ (x \notin F \text{ または } y \notin F) \end{cases}$$

(X, d) を距離空間，$A_1, \ldots, A_q$ を空でない X の部分集合とする。このとき，$T : \cup_{i=1}^q A_i \to \cup_{i=1}^q A_i$ が q-cyclic ρ-contraction map であるとは，次が成り立つときを言う。

(1) 全ての $i \in \{1, \ldots, q\}$ に対して，$T(A_i) \subseteq A_{i+1}$ が成り立つ。

(2) X の w-distance ρ と $r \in (0, 1)$ が存在し，全ての $i \in \{1, \ldots, q\}$ と $x \in A_i, y \in A_{i+1}$ に対して，

$$\rho(Tx, Ty) \leq r\rho(x, y) + (1 - r)\rho(A_i, A_{i+1})$$

となる。

ただし，$A_{q+1} = A_1$ とする。特に，$\rho = d$ のとき，T は q-cyclic contraction map であると言う。

本論文で用いる記号について，次のように定義する。

$$\rho(A_i, A_{i+1}) = \inf\{\rho(x, y) \mid x \in A_i, y \in A_{i+1}\} \ (i \in \{1, \ldots, q\})$$
$$s_\rho(x_1, \ldots, x_q) = \sum_{i=1}^{q-1} \rho(x_i, x_{i+1}) + \rho(x_q, x_1)$$
$$s_\rho(A_1, \ldots, A_q) = \inf\{s_\rho(x_1, \ldots, x_q) \mid x_1 \in A_1, \ldots, x_q \in A_q\}$$

$T : \cup_{i=1}^q A_i \to \cup_{i=1}^q A_i$ が q-cyclic s_ρ-contraction map であるとは，次が成り立つことを言う。

(1) 任意の $i \in \{1, \ldots, q\}$ に対して，$T(A_i) \subseteq A_{i+1}$ となる。

(2) X の w-distance ρ と $r \in (0,1)$ が存在し，全ての $x_1 \in A_1, \ldots, x_q \in A_q$ に対して，

$$s_\rho(Tx_1, \ldots, Tx_q) \leq rs_\rho(x_1, \ldots, x_q) + (1-r)s_\rho(A_1, \ldots, A_q)$$

となる。

ただし，$A_{q+1} = A_1$ とする。特に，$\rho = d$ のとき，T は q-cyclic s_d-contraction map であると言う。以下の補題は，最良近接点および最良巡回近接点の存在定理に関連する。

補題 3. ([5])(X,d) を距離空間 $A_1, \ldots, A_q$ を空でない X の部分集合，T を $\cup_{i=1}^q A$ 上の q-cyclic ρ-contraction map とする。このとき，次が成立する。

$$\rho(A_1, A_2) = \rho(A_2, A_3) = \ldots = \rho(A_{q-1}, A_q) = \rho(A_q, A_1)$$

補題 4. ([5])(X,d) を距離空間，$A_1, \ldots, A_q$ を空でない X の部分集合，T を $\cup_{i=1}^q A_i$ 上の q-cyclic ρ-contraction map とする。このとき，$x_0 \in \cup_{i=1}^q A_i$ とし，点列 $\{x_n\}$ を $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $x_{n+1} = Tx_n$ と定めると，

$$\rho(x_n, Tx_n) \to \rho(A_i, A_{i+1})$$

が得られる。

補題 5. ([5])(X,d) を距離空間，$A_1, \ldots, A_q$ を空でない X の部分集合，T を $\cup_{i=1}^q A_i$ 上の q-cyclic s_ρ-contraction map とする。このとき，$x_0 \in \cup_{i=1}^q A_i$ とし，点列 $\{x_n\}$ を $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $x_{n+1} = Tx_n$ と定めると，

$$s_\rho(x_n, Tx_n, \ldots, T^{q-1}x_n) \to s_\rho(A_1, \ldots, A_q)$$

が得られる。

3 存在定理

最初に，w-distance を用いた最良近接点の結果を紹介する。

定理 3. ([5])(X,d) を距離空間，$A_1, \ldots, A_q$ を空でない X の閉集合，T を $\cup_{i=1}^q A_i$ 上の q-cyclic ρ-contraction map とする。$i \in \{1, \ldots, q\}, x_0 \in A_i$ とし，点列 $\{x_n\}$ を $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $x_{n+1} = Tx_n$ と定める。また，点列 $\{y_n\} \subseteq X$ が $y \in X$ に収束するならば，$\rho(y, y_n)$ は 0 に収束するとする。このとき，$\{x_{qn}\}$ は A_i に収束部分列を持つなら，T は最良近接点を持つ。

系 1. (X,d) を距離空間，$A_1,\dots,A_q$ を空でない X の閉集合，T を $\cup_{i=1}^q A_i$ 上の q-cyclic ρ-contraction map とする。$i\in\{1,\dots,q\}, x_0\in A_i$ とし，点列 $\{x_n\}$ を $n=0,1,2,\dots$ に対して $x_{n+1}=Tx_n$ と定める。また，点列 $\{y_n\}\subseteq X$ が $y\in X$ に収束するならば，$\rho(y,y_n)$ は 0 に収束するとする。このとき，ある $i\in\{1,\dots,q\}$ にたいして A_i がコンパクトなら，T は最良近接点を持つ。

次に，w-distance を用いた，最良巡回近接点の結果を紹介する。

定理 4. ([5])(X,d) を距離空間，$A_1,\dots,A_q$ 空でない X の閉集合，T を $\cup_{i=1}^q A_i$ 上の連続な q-cyclic s_ρ-contraction map とする。とする。$i\in\{1,\dots,q\}, x_0\in A_i$ とし，点列 $\{x_n\}$ を $n=0,1,2,\dots$ に対して $x_{n+1}=Tx_n$ と定める。また，点列 $\{y_n\}\subseteq X$ が $y\in X$ に収束するならば，$\rho(y,y_n)$ は 0 に収束するとする。このとき，$\{x_{qn}\}$ は A_i に収束部分列を持つなら，T は最良巡回近接点を持つ。

系 2. ([5])(X,d) を距離空間，$A_1,\dots,A_q$ 空でない X の閉集合，T を $\cup_{i=1}^q A_i$ 上の連続な q-cyclic s_ρ-contraction map とする。とする。$i\in\{1,\dots,q\}, x_0\in A_i$ とし，点列 $\{x_n\}$ を $n=0,1,2,\dots$ に対して $x_{n+1}=Tx_n$ と定める。また，点列 $\{y_n\}\subseteq X$ が $y\in X$ に収束するならば，$\rho(y,y_n)$ は 0 に収束するとする。このとき，ある $i\in\{1,\dots,q\}$ にたいして A_i がコンパクトなら，T は最良巡回近接点を持つ。

特に，$\rho=d$ のとき，次のようになる。

定理 5. ([5])(X,d) を距離空間，$A_1,\dots,A_q$ 空でない X の閉集合，T を $\cup_{i=1}^q A_i$ 上の連続な q-cyclic s_d-contraction map とする。とする。$i\in\{1,\dots,q\}, x_0\in A_i$ とし，点列 $\{x_n\}$ を $n=0,1,2,\dots$ に対して $x_{n+1}=Tx_n$ と定める。このとき，$\{x_{qn}\}$ は A_i に収束部分列を持つなら，T は最良巡回近接点を持つ。

系 3. ([5])(X,d) を距離空間，$A_1,\dots,A_q$ 空でない X の閉集合，T を $\cup_{i=1}^q A_i$ 上の連続な q-cyclic s_d-contraction map とする。とする。$i\in\{1,\dots,q\}, x_0\in A_i$ とし，点列 $\{x_n\}$ を $n=0,1,2,\dots$ に対して $x_{n+1}=Tx_n$ と定める。このとき，ある $i\in\{1,\dots,q\}$ にたいして A_i がコンパクトなら，T は最良巡回近接点を持つ。

4 完備性と最良巡回近接点の存在

ここでは，最良巡回近接点の存在と距離空間の完備性が同値であることを紹介する。最初に，最良近接点の存在について，次が成立する。

定理 6. ([5])(X,d) を距離空間とする。このとき，次は同値である。

(i) X が完備である。

(ii) 任意の空でない互いに素な X の閉集合 $A_1,\ldots,A_q$ と，任意の $i\in\{1,\ldots,q\}, x,y\in A_i$, に対して $\rho(Tx,Ty)\leq r\rho(x,y)$ と $\{z_n\}\subset\cup_{i=1}^q A_i$ が $z\in\cup_{i=1}^q A_i$ に収束するならば $\rho(z,z_n)\to 0$ を満たす $\cup_{i=1}^q A_i$ 上の q-cyclic ρ-contraction map T が最良近接点を持つ。

また，最良巡回近接点について，次の結果が得られる。

定理 7. ([5])(X,d) を距離空間とする。このとき，次は同値である。

(i) X が完備である。

(ii) 任意の空でない互いに素な X の閉集合 $A_1,\ldots,A_q$ と，任意の $i\in\{1,\ldots,q\}, x,y\in A_i$, に対して $\rho(Tx,Ty)\leq r\rho(x,y)$ と $\{z_n\}\subset\cup_{i=1}^q A_i$ が $z\in\cup_{i=1}^q A_i$ に収束するならば $\rho(z,z_n)\to 0$ を満たす $\cup_{i=1}^q A_i$ 上の q-cyclic s_ρ-contraction map T が最良巡回近接点を持つ。

参考文献

[1] A. A. Eldred, P. Veeramani, *Existence and convergence of best proximity points*, J. Math. Anal. Appl **323** (2006), 1001–1006.

[2] C. Vetro, *Best proximity points:Convergence and existence theorems for p-cyclic mappings*, Nonlinear. Anal. **73** (2010), 2283–2291.

[3] O. Kada, T. Suzuki, W. Takahashi, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japon. **44** (1996), 381–391.

[4] T. Suzuki, W. Takahashi, *Fixed point theorems and characterizations of metric completeness*, Journal of the Juliusz Schauder Center **8** (1996), 371–382.

[5] T. Rekisha, D. Kuroiwa, *Existence theorems of best cyclic proximity point and characterizations of metric completeness*, preprint.