

# Navier-Stokes 乱流での大スケール揺らぎについて

高岡 正憲

同志社大学理工学部

平成 24 年 3 月 30 日

## 1 はじめに

ここ数年、大スケールで粗視化した揺らぎを調べている。エネルギー保有領域では、外力や境界条件により様々な種類の乱流が存在する。粗視化スケールを大きくしていくと揺らぎは小さくなり、その確率密度関数は正規分布に近づくことはよく知られている。相関の無い揺らぎの粗視化量については、漸近的振る舞いも数学的に知られている。しかしながら、乱流場の揺らぎは相関を持ち、相関長付近で揺らぎがまだ大きいところでの統計則や、どのように正規分布に漸近するのかなどは、未だ解明されていない。大スケール揺らぎの特性を調べることは、乱流の間欠性や非局所相互作用を考える上で重要である。

毛利ら [1, 2, 3] は、気象研究所の大型風洞において、格子乱流や境界層乱流や噴流乱流といった種々の乱流を作り、熱線流速計により長大な時系列データを取得し Taylor 仮説により空間変動に変換して、大スケールの揺らぎの確率密度関数を調べた。彼らは、粗視化する長さ  $R$  が速度の積分長  $L$  と同程度かそれより長いとき対数正規分布で近似できることを見出した。

この大スケールの対数正規分布の近似の程度や起源および普遍性を調べるために、松本ら [4, 5] は、相関のある単純な確率過程である Ornstein-Uhlenbeck 過程 (OU 過程) を解析した。OU 過程の解は具体的に書き下すことができ、数学的構造を考えるのに適している。粗視化した量  $\zeta_R$  についてもある程度の解析的な表現が得られる。標準偏差  $V$  と歪度  $S$  に対する解析表現から  $R \rightarrow \infty$  の漸近形は、それぞれ、

$$V = \sqrt{\langle (\Delta\zeta_R)^2 \rangle} \rightarrow \frac{cT}{2} \sqrt{\frac{2T}{R}} \quad (1)$$

$$S = \frac{\langle (\Delta\zeta_R)^3 \rangle}{\langle (\Delta\zeta_R)^2 \rangle^{3/2}} \rightarrow 3\sqrt{\frac{2T}{R}} \quad (2)$$

となり、どちらも  $R^{-1/2}$  で 0 (Gauss 分布) に漸近していることが、また、尖度  $F$  に対する解析表現から  $R \rightarrow \infty$  の漸近形は、

$$F = \frac{\langle (\Delta\zeta_R)^4 \rangle}{\langle (\Delta\zeta_R)^2 \rangle^2} - 3 \rightarrow \frac{30T}{R} \quad (3)$$

扁平度は  $R^{-1}$  で 3 (Gauss 分布) に漸近していることが見出された。

上記の風洞実験や OU 過程における大スケール揺らぎの解析は 1 次元の時系列データを基にしていた。乱流の間欠性を含む理論では空間的な粗視化が用いられている。本研究では、3 次元 Navier-Stokes 方程式を数値シミュレーションすることにより、乱流の空間的な大スケール揺らぎについて調べる。将来的には 2 次元及び 3 次元で粗視化した揺らぎを調べる予定であるが、現在の計算機的能力では直接数値計算を行うことは無理がある。今回は上記研究結果との比較も考えて、1 次元的な粗視化をした揺らぎの振る舞いについて、直接数値シミュレーションのデータを用いて得られた結果について報告する。

## 2 計算方法と初期条件

3 次元非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式を、空間的には擬スペクトル法、時間的には線形項を繰り込んだ Runge-Kutta-Gill 法という標準的な離散方法を用いて数値計算した。格子点数は、乱流の計算には少なくとも 2 桁程度、大スケール揺らぎを調べるのにはさらに 2 桁程度必要となることと、現有計算機的能力を考慮して、格子点数を  $(N_x, N, N) = (8192, 256, 256)$  とした。これを周期境界条件の下で解くのであるが、最小格子が立方体となるように、計算領域を  $2\pi \frac{N_x}{N} \times 2\pi \times 2\pi$  と設定した。以下では、 $x$  方向の粗視化のみ考える。

今回は自由減衰する一様等方乱流のシミュレーション結果を報告する。初期条件は、エネルギースペクトルが  $E(k) = Ck^2 \exp(-k^2/k_0^2)$  となるようにとった。ここで  $k_0 = 5$  とした。これは、 $k_0$  を大きくすると Reynolds 数は小さくなってしまいが、周期境界条件の影響を受けないようにするために、エネルギースペクトルのピークのスケールが短い方の計算領域よりも 1 桁程度小さくなることを考えてのことである。

## 3 時間発展と対象場

図 1(a) にエンストロフィ及び Reynolds 数の時間発展の様子を示す。以下で調べる対象となる場は、エンストロフィが最大値をとる時刻の 2 倍程度の時刻 ( $t = 1$ ) の場であり、図中の ■ はその時のそれぞれの値を示す。先行研究により、この時までに乱流の微細構造あるいは普遍領域が最もよく発達していることが知られている。

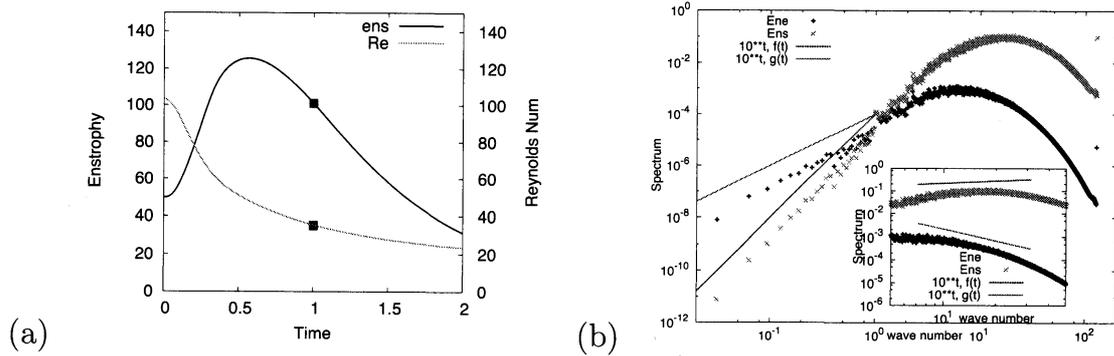


図 1: (a) エンストロフィと Reynolds 数の時間発展, (b) エネルギーとエンストロフィのスペクトル

この時刻の Kolmogorov マイクロスケールが 0.012, Taylor マイクロスケールが 0.14 で Taylor マイクロ Reynolds 数  $Re_\lambda$  は 40 程度である. また, 縦速度と横速度の相関長はそれぞれ  $L_u = 0.26$ ,  $L_v = 0.13$ , 積分長は 0.33 である.

図 1(b) には, この場のエネルギー (赤色) およびエンストロフィ (緑色) のスペクトルが描かれてある. 慣性領域はほとんどないが, 大スケール側に Birkhoff 型の中領域が見て取れる. また, 両スペクトルの関係から等方性もかなりよいことが分かる.

## 4 粗視化量のモーメント及び確率密度関数

風洞実験や OU 過程の結果との比較のために, まずは速度成分の 2 乗を粗視化した大スケール揺らぎ

$$v_R^2(x) = \frac{1}{R} \int_{x-R/2}^{x+R/2} v^2(x') dx' \quad (4)$$

を調べた.

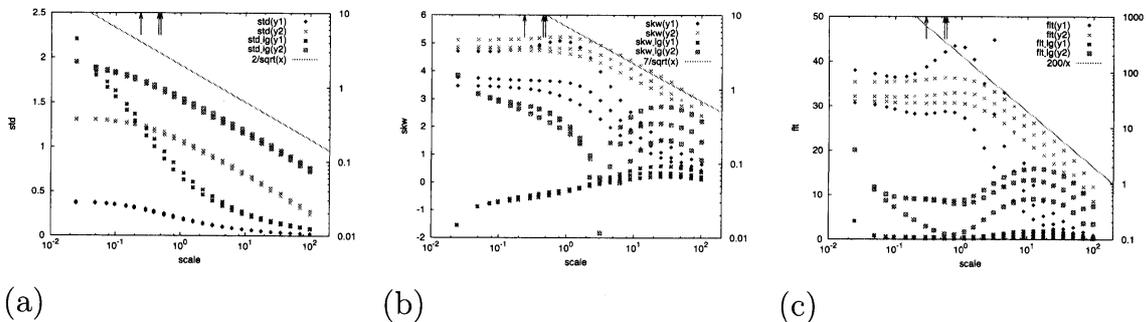


図 2: 速度の 2 乗の粗視化量のモーメントとスケール依存性 (a) 標準偏差, (b) 歪度, (c) 尖度

図 2(a)-(c)には、それぞれ、標準偏差、歪度、尖度の粗視化スケール依存性が示されている。標準偏差では等方性がかなり良いが、歪度や尖度になってくると非等方性が目立ってくる。グラフの横軸は粗視化スケールを対数目盛でとっており、縦軸はそれぞれのモーメントの値を線形と対数の目盛でとっている。図中の+は  $v_R^2$  を線形目盛 (y1), ×は対数目盛 (y2), ※は  $|\ln v_R^2|$  を線形目盛 (y1), □は対数目盛 (y2) でそれぞれ描いてある。

図 2(a)-(c) の×に着目すると、風洞実験やOU過程の結果と同じく大スケールの領域で巾則が見られ、それぞれの巾指数もOU過程での解析結果と一致する。図中の矢印のうち左のものはTaylorマイクロスケールを示し、右のものはそれぞれの速度成分の2乗の相関長を示す。標準偏差では相関長付近から巾則が見られるが、歪度や尖度では相関長よりも少し大きいスケールから巾則が見られる。

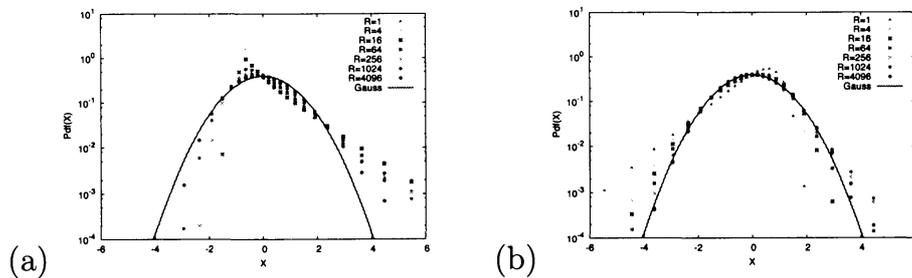


図 3: 速度の2乗の粗視化量の確率密度関数 (a)  $u_R^2$  の確率密度関数, (b)  $\ln(u_R^2)$  の確率密度関数

全体の様子を見るために、確率密度関数のスケール依存性を図 3(a)(b) に示してある。グラフは平均値と分散がそれぞれ0と1となるように規格化してあり、図中の放物線は正規分布を表す。速度の2乗を粗視化した量は正定値であり大きく右に歪んでいる (図 3(a)) が、対数をとると (図 3(b)), 粗視化スケール  $R$  が小さいときには少し左に歪みんでいるが大きくなるに連れて正規分布に漸近している。 $R$  が大きい極限で両分布は正規分布に漸近するが、その漸近の仕方は対数をとった量の方がはやい。

次に、速度場の微分を2乗したものを粗視化した量を調べた。風洞実験などでは計測できるものが限られているので、エネルギー散逸率  $\epsilon$  を縦速度微分を用いた  $15\nu(\partial_x u)^2$  や横速度微分を用いた  $15\nu(\partial_x v)^2/2$  などで見積もられている。

縦速度微分の2乗と横速度微分の2乗をそれぞれ粗視化した量のモーメントのスケール依存性を図 4(a)-(c) と図 5(a)-(c) に示す。図中の矢印は図 2 中のそれらと同じく Taylor マイクロスケールとそれぞれの量の相関長を示す。両者のグラフは、横速度微分の方が少し非等方性が大きいこと以外は、ほぼ同じスケール依存性を示している。確率密度関数のスケール依存性の図も描いたがここでは省略する。

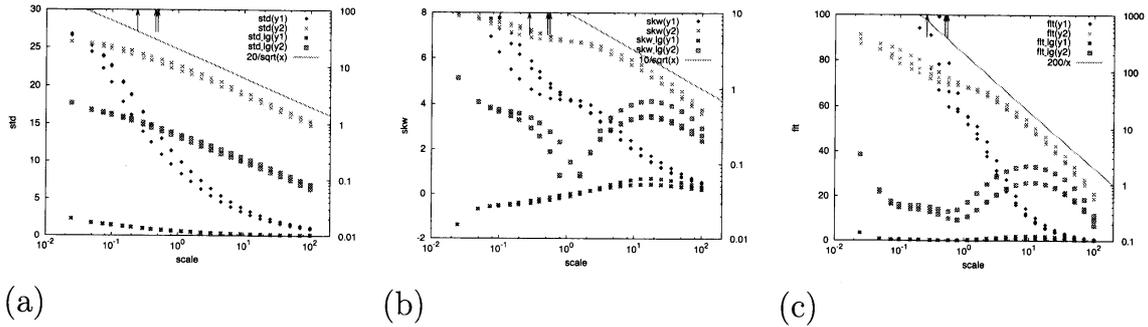


図 4: 縦速度微分の 2 乗の粗視化量のモーメントのスケール依存性 (a) 標準偏差, (b) 歪度, (c) 尖度

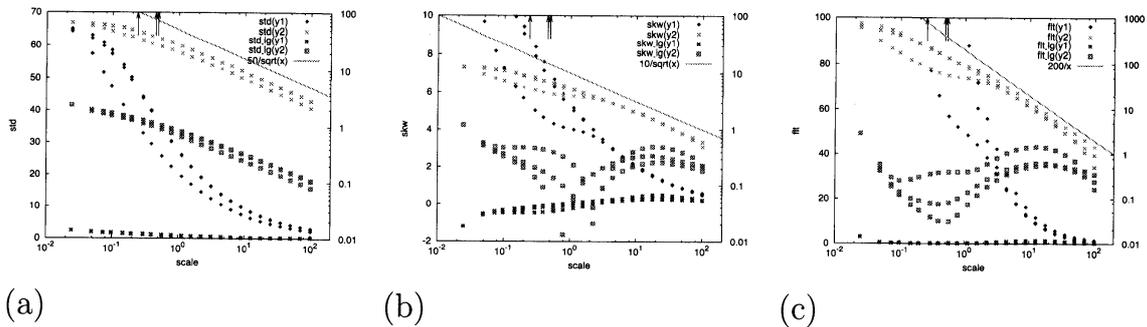


図 5: 横速度微分の 2 乗の粗視化量のモーメントのスケール依存性 (a) 標準偏差, (b) 歪度, (c) 尖度

## 5 まとめ

一様等方性自由減衰乱流の大スケール揺らぎを、計算領域を一方向だけ非常に大きくとることにより、3次元非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式の直接数値シミュレーションをして調べた。Reynolds 数をそれほど高くすることはできなかったが、風洞実験や OU 過程の結果と全体的にによく似た結果が得られた。

粗視化スケールを大きくしていったときの正規分布への収束の際に、粗視化量のモーメントの振る舞いに巾依存性が見られた。また、自己相関長付近で対数正規性が見られた。定性的な振る舞いについては、正定値の分布が一般に右に歪んでいることと対数をとることにより測度が  $1/|x|$  で変換されることから予想できる。速度微分場の粗視化した量は自己相関長が短く、これに対応して粗視化スケールの小さいところから対数正規性が見られた。相関長で整理して振る舞いを考えると理解しやすいことを示唆している。他方で、標準偏差に比べて歪度や尖度の巾依存性が始まる領域が大スケール側にシフトしている。これは OU 過程ではほぼ同じ領域から始まっていたことと異なる。乱流には様々な特徴的スケールがあることによるのかもしれない。

今回の報告は、現有計算機で大スケール揺らぎについてどの程度調べることが可能かをみたものであるが、今後の課題としては

- 2点速度差 (縦&横) や散逸率の粗視化量を調べる
- 大規模運動の不変性 (低波数側スペクトルの巾指数) との関係を調べる
- 外力を加えて定常乱流をつくり統計精度をあげる
- ラージエディシミュレーションなどを利用し Reynolds 数依存性を見る

などを考えている.

## 6 謝辞

示唆に富む議論をしてくれた気象研究所の毛利氏と京都大学大学院理学研究科の松本氏に感謝する. 本研究は科研費 22540402 の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [1] H. Mouri, M. Takaoka, A. Hori, and Y. Kawashima. On landau's prediction for large-scale fluctuation of turbulence energy dissipation. *Phys. Fluids*, 18:015103, 2006.
- [2] H. Mouri, A. Hori, and M. Takaoka. Fluctuation of statistics among subregions of a turbulence velocity field. *Phys. Fluids*, 20:035108, 2008.
- [3] H. Mouri, A. Hori, and M. Takaoka. Large-scale lognormal fluctuations in turbulence velocity fields. *Phys. Fluids*, 21:065107, 2009.
- [4] 松本剛, 高岡正憲. Ornstein-Uhlenbeck 過程での大スケール揺らぎの統計則について. 数理解析研究所講究録, 1721:19–27, 2010.
- [5] 高岡正憲, 松本剛. Ornstein-Uhlenbeck 過程での大スケール揺らぎの統計則について II. 数理解析研究所講究録, 1771: 1–9, 2011.