

乱流の動力学と対比した統計力学

巽 友正 京都大学(名誉教授)

Dynamical Mechanics versus Statistical Mechanics of Fluid Turbulence

Tomomasa Tatsumi Kyoto University (Emeritus Professor)

1. 乱流の動力学と統計力学

一昨年度の数理研究集会において、著者は、『乱流の動力学的記述と統計力学的記述の相補性』という研究会の主題に応じて、年来取扱っている「速度確率分布関数」を用いた『統計力学的記述』について、従来の「平均速度積」を用いた『動力学的記述』と対比した形で考察を行なった(巽(2010)を参照)。

この問題は、昨年9月にフランスで開催された Turbulence Colloquium Marseille (TCM) 2011 において、半世紀前の TCM 1961 で取り上げられた Proudman & Reid (1954) と Tatsumi (1955,1957) による「準正規近似理論」、および Kraichnan (1959) による「直接相互作用近似理論」などの「動力学的理論」の再評価が行われたので、本研究会においても改めて考察を試みる。ここでは記述の重複を避けるため、前論文(巽(2010))を随時に参照したい。

2. 動力学的理論の非完結性

前論文で概観したように、乱流の理論的研究は、歴史的には平均流、そして一様等方性乱流においては、速度相関およびその Fourier 変換であるエネルギー・スペクトルなどの統計平均量、を対象として進められてきた。具体的には、これらの統計平均量を支配する方程式を、Navier-Stokes 方程式と非発散条件、

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \partial / \partial \mathbf{x}) \mathbf{u} - \nu |\partial / \partial \mathbf{x}|^2 \mathbf{u} = -\partial / \partial \mathbf{x}(p/\rho), \quad (1)$$

$$(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

から導き、その解として統計的平均量を決定することになる。

ところがこの場合、Navier-Stokes 方程式 (1) の非線形性のために、ある次数の平均量の方程式に、それより高次の平均量が現れ、このままでは方程式が解けないという問題が起こる。これが、前論文の 3.1 節で述べた「完結問題」である。

この問題の解決のため、さまざまな完結仮説が提案されたが、その中で前記の TCM 1961 で取り上げられたのが、Proudman & Reid (1954) および Tatsumi (1955, 1957) による「準正規近似理論」と、Kraichnan (1959) による「直接相互作用近似理論」などの諸理論であった。これらの理論は、会議の「一様乱流」分科において取り上げられ、座長の Batchelor による分科講演のあと、Kraichnan と Proudman の両著者による補足的

な講演として行われた。私はこの会議には出席できなかったが、会議の Proceedings である 'Mécanique de la Turbulence' (1962) で見る限り、かなり激しい議論を伴ったものようである。しかし、議論の激しさにも拘わらず、この二つの講演は内容的に一向に咬み合っていない。それは、今日の常識から見ると、両者は、高 Reynolds 数乱流の「エネルギー保有領域」と「散逸領域」という異なった領域を対象として、自説を論じていたためかと思われる。ここでは、その繰返しを避けて今日の乱流研究の見地から、理論の構成とその限界について概観してみたい。(詳細については、Tatsumi (1980) による「乱流のキュムラント展開理論」の解説を参照されたい。)

3. キュムラント展開

乱流の「準正規近似理論」については、Chou (1940) および Millionshtchikov (1941) による初期の論文があったと伝えられるが、いずれも戦時中の論文で、その内容は不明である。ただ、後発の Proudman と Reid、および Tatsumi は、いずれもこれらの論文の存在を考慮せず、独自に理論の構成を試みたのであるが、それが、結果として当を得ていたことは幸いであった。

3.1 モーメントとキュムラント

一様等方性乱流は、数学的には、その速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ の Fourier 変換、

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-3} \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3)$$

を用いて表わすのが便利である。

Fourier 変換速度 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ に対する方程式は、(1)、(2) 式の Fourier 変換から直ちに次のように与えられる。

$$(\partial/\partial t + \nu |\mathbf{k}|^2) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = -i \int (\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}-\mathbf{k}', t)) \{ \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}-\mathbf{k}', t) - (\mathbf{k}/k^2)(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}-\mathbf{k}', t)) \}, \quad (4)$$

$$(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)) = 0, \quad (5)$$

ここに、圧力 p は(5)式を用いて消去されている。

乱流の速度場は、Fourier 変換速度 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ の分布の特性汎関数、

$$\Phi[\mathbf{z}, t] = \langle \exp[i \int \mathbf{z}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}] \rangle, \quad (6)$$

によって完全に表現される。この特性汎関数 $\Phi[\mathbf{z}, t]$ に対する方程式は、Hopf (1952) によって、方程式(4)、(5)から出発して、確率保存則を用いて導かれている。しかし、この方程式は汎関数方程式であるために、一般的に解くことが出来ない。

このため、特性汎関数(6)を、変数 $\mathbf{z}(\mathbf{k})$ について Taylor 展開、または対数 Taylor 展開する方法が行われる。前者をモーメント(moment)展開、後者をキュムラント(cumulant)展開といい、それぞれ次のように表わされる。

モーメント展開:

$$\Phi[\mathbf{z}, t] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (i^n/n!) \int \cdots \int M^{(n)}_{l_1 \dots l_n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t) \delta(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n) \times z_{l_1}(\mathbf{k}_1) \cdots z_{l_n}(\mathbf{k}_n) d\mathbf{k}_1 \cdots d\mathbf{k}_n, \quad (7)$$

ここに、展開係数であるモーメント $M^{(n)}_{l_1 \dots l_n}$ は、特性汎関数 $\Phi[\mathbf{z}, t]$ の汎関数微分として、次のように表わされる。

$$M^{(n)}_{l_1 \dots l_n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t) \delta(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n) = i^{-n} [\delta^n \Phi / \delta z_{l_1}(\mathbf{k}_1) \cdots \delta z_{l_n}(\mathbf{k}_n)]_{\mathbf{z}=0} = \langle \tilde{u}_{l_1}(-\mathbf{k}_1, t) \cdots \tilde{u}_{l_n}(-\mathbf{k}_n, t) \rangle. \quad (8)$$

キュムラント展開:

$$\Phi[\mathbf{z}, t] = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} (i^n/n!) \int \cdots \int C^{(n)}_{1\dots 1n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t) \delta(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n) \times z_{11}(\mathbf{k}_1) \cdots z_{1n}(\mathbf{k}_n) d\mathbf{k}_1 \cdots d\mathbf{k}_n\right], \quad (9)$$

ここに、展開係数であるキュムラント $C^{(n)}_{1\dots 1n}$ は、汎関数 $\log\Phi$ の汎関数微分として、次のように表わされる。

$$C^{(n)}_{1\dots 1n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t) \delta(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n) = i^{-n} [\delta^n \log\Phi / \delta z_{11}(\mathbf{k}_1) \cdots \delta z_{1n}(\mathbf{k}_n)]_{z=0}. \quad (10)$$

3.2 0-4次キュムラント近似

モーメント展開(7)、(8) にせよ、キュムラント展開(9)、(10) にせよ、完全な取り扱いとしては、無限級数全体を考慮しなければならないが、それは困難で、実際には低次の有限項によって全体を近似する方法を執らなければならない。その際、問題となるのが展開の非完結性である。

いま、ある次数のモーメント $C^{(n)}$ ($n \geq 1$) に対する方程式を (4)、(5) 式から導けば、そこには、(4) 式の非線形性のために、より高次の $C^{(n+1)}$ が現れる。このため、方程式系は、常に方程式の数より1個だけ多い未知数を含み、完結しないから、これを完結させるためには、何らかの完結仮説を導入しなければならない。これが、乱流理論における本質的な課題である「完結問題」である。

この問題に対して、Proudman & Reid (1954) と Tatsumi (1955, 1957) が、さらに、先行する Chou (1940) と Millionshtchikov (1941) が、それぞれ独自に追求したのが、実質的には「キュムラント打ち切り近似」と同等の「完結」であったように思われる。

4. 準正規近似理論

一様等方性乱流においては、恒等的に $C^{(1)} = 0$ であるから、最低次の二つのキュムラント $C^{(2)}$ 、 $C^{(3)}$ に対する方程式をとり、後者に含まれる $C^{(4)}$ を仮定によって 0 とおけば、 $C^{(2)}$ と縮退した $C^{(3)}$ だけを含む完結した方程式系が得られる。これを **0-4 次キュムラント近似理論**、または、**準正規近似理論 (Quasi-Normal Approximation (QN))** と言う。

一様等方性乱流においては、 $C^{(2)}$ と縮退した $C^{(3)}$ は、いずれも等方テンソルで、

$$C^{(2)}_{ij}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, t) = \varphi(k, t) \Delta_{ij}(\mathbf{k}), \quad \Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2, \\ \int C^{(3)}_{pq}(\mathbf{k}-\mathbf{h}, -\mathbf{k}, \mathbf{h}; t) d\mathbf{h} = -(i/2k^2) \psi(k, t) [k_p \Delta_{jq}(\mathbf{k}) + k_q \Delta_{pj}(\mathbf{k})], \quad (11)$$

で表わされる。ここに、 $\Delta_{ij}(\mathbf{k})$ は、ベクトル \mathbf{k} に直交する等方テンソルを表わす。

また、乱流のエネルギーは、

$$E(t) = (1/2) \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) |^2 \rangle = (1/2) \int C^{(2)}_{ii}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, t) = 4\pi \int_0^\infty k^2 \varphi(k, t) dk = \int_0^\infty E(k, t) dk, \quad (12)$$

$$E(k, t) = 4\pi k^2 \varphi(k, t), \quad (13)$$

のように表わされるから、 $\varphi(k, t)$ は、波数空間における点 \mathbf{k} におけるエネルギー密度を表わし、 $E(k, t)$ は、半径 $k = |\mathbf{k}|$ の球面上のエネルギー密度を表わすことが分かる。この $\varphi(k, t)$ をエネルギー・スペクトル密度、 $E(k, t)$ をエネルギー・スペクトル関数という。

このとき、キュムラント $C^{(2)}$ と $C^{(3)}$ に対する方程式は、次のようなスカラー形に書ける。

$$(\partial/\partial t + 2\nu k^2) \varphi(k, t) = \psi(k, t), \quad (14)$$

$$\psi(k, t) = 4\pi \int_0^t dt' \int_0^\infty \int_{-1}^1 \exp[-\nu(k^2 + k'^2 + k''^2)(t-t')] \times \\ \times [\varphi(k', t') - \varphi(k, t')] \varphi(k'', t') (k^2 k'^2 / k''^2 + \mu k k') k'^2 (1 - \mu^2) dk' d\mu, \quad (15)$$

ここに、 $k'^2 = k^2 + k'^2 + \mu k k'$ 、かつ初期条件として、 $\psi(k, 0) = 0$ 、としている。

この(14)、(15)式は、 $\psi(k, t)$ を消去すれば明らかなように、 $\varphi(k, t)$ 、したがって、 $E(k, t)$ の時間的変化を、与えられた初期条件の下で一意的に決定するものである。

4.1 準正規近似理論の破綻

(14)、(15)式は、一様等方性乱流におけるエネルギースペクトル $\varphi(k, t)$ または $E(k, t)$ に対して、初めて完結した決定論的な方程式を与えたもので、この結果は、Karman-Howarth 方程式 (1938) 以来の乱流の「完結問題」に、一つの明確な解答を与えたものとして一般に評価された。

ところが、この評価は、Ogura (1963) による両式の数値計算によって、高 Reynolds 数の場合に、エネルギースペクトル $E(k, t)$ が負の値をとるという非物理的な結果を生ずることが示されるに及んで、一朝にして失われた。

図1A、1B は、いずれも初期条件が、 $E(k, 0) = E_0(k/k_0)^4 \exp[-(k/k_0)^2]$ で、初期 Reynolds 数 $R_\lambda(0) = (\pi^{1/4}/2^{1/2})(E_0 k_0)^{1/2}/\nu$ が、それぞれ、 $R_\lambda(0) = 7.2, 14.4$ 、で与えられた場合の、エネルギースペクトル $E(k, t)$ の時間的変化の計算結果を示す。

低 Reynolds 数 7.2 の図1A の場合、 $E(k, t)$ の時間的変化は、単なる粘性減衰とあまり変わらない。しかし、やや高い Reynolds 数 14.4 の図 1B の場合には、 $E(k, t)$ の低波数から高波数へのエネルギーの移動が顕著となり、ついに、低波数部分の一部が負の値をとるに至る。この非物理的な結果は、理論の有効性を疑わせるに十分である。

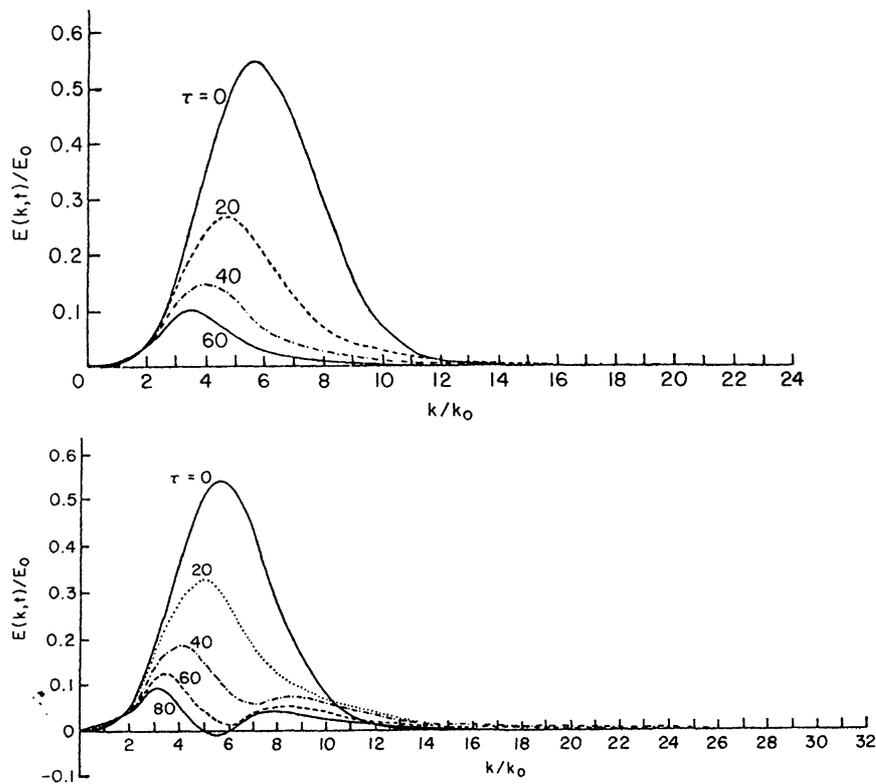


図 1. $E(k, t)$ の時間的変化 (Ogura (1963) による)。A: $R_\lambda(0) = 7.2$ 、B: $R_\lambda(0) = 14.4$ 。

5. 準正規-局所平衡近似理論

「準正規近似理論」の下での負エネルギー・スペクトルの発生は、この理論にとって致命的な破綻であって、それに対する有効な対策は、提唱者の側では直ちには思い付かなかった。

5.1 準正規近似理論の修正

しかし、理論の再検討が進むに連れて、その破綻の原因が、方程式(14)、(15)が実質的に t の2階微分を含む振動方程式であることに起因することが分った。それなら、それを避けるには、 t の2階微分を除けばよい。では、それを正当化する理由は何か？

まず、(15)式の非線形項 $[\varphi(k',t) - \varphi(k,t)]\varphi(k'',t)$ は、乱流の小規模成分が優越する局所領域からの寄与が大きいため、特性時間が線形項に比べて極めて短く、局所平衡の状態にあると考えられる。したがって、この項は、各時刻 t において瞬間的に現在の値に追従して、 $[\varphi(k',t) - \varphi(k,t)]\varphi(k'',t)$ となる。このとき、(15)式は次のように書ける。

$$\psi(k,t) = 4\pi \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{1 - \exp(-\nu(k^2 + k'^2 + k''^2)t)\} / \nu(k^2 + k'^2 + k''^2) \times \\ \times [\varphi(k',t) - \varphi(k,t)]\varphi(k'',t) (k^2 k'^2 / k''^2 + \mu k k') k'^2 (1 - \mu^2) dk' d\mu, \quad (16)$$

この局所平衡 (*Local equilibrium* (LE)) を考慮した(16)式と、準正規近似 (QN) を表わす(14)式を組み合わせれば、準正規-局所平衡近似理論(QN-LE)が構成される。図2は、図1と同じ初期条件の下での、 $E(k,t)$ の、(14)、(16)式による数値解を示す (Tatsumi *et al.* (1978) による)。

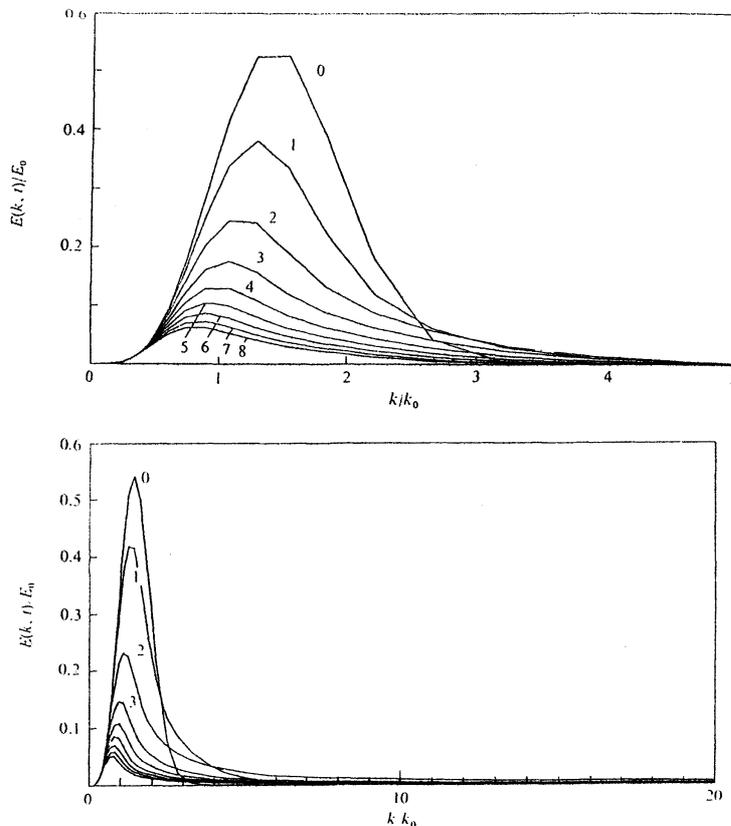


図2. $E(k,t)$ の時間的变化 (Tatsumi *et al.* (1978) による)。A: $R=20$, B: $R=800$.

図2では $R=1.063R_{\lambda(0)}$ としているから、図2Aは、図1Bと Reynolds 数領域はほぼ同じである。しかし、 $E(k,t)$ は明らかに正定的で、負スペクトルの発生は見えない。しかも、その傾向は、Reynolds 数の高い図2Bでも保たれている。このことは、(14)、(15)式の非線形項の局所平衡性を考慮したことが如何に効果的であったかを示している。

留意すべきことは、以上と同じ結果をもたらす修正が、Orszag (1970) その他によって「Markov 化」の名の下に行なわれていることである。言うまでもなく、Markov 過程は確率過程の一つで、「乱雑系」のある時刻における変化が、系の過去の状態には依らず、現在の状態のみに依存することをいう。いまの場合、乱流は、個々の系の時間的变化が一意的に決定される「力学系」であり、系の集団としての乱雑性は、初期速度分布によってのみ与えられる。この意味で、「Markov 化」の表現は筋違いの感がある。

さて、「準正規-局所平衡近似理論」は、 $E(k,t)$ の正定性を満たすことによって、理論としての市民権を得たが、その解はどのような $E(k,t)$ を与えるであろうか。前述の Tatsumi *et al.* (1978) によれば、 $R=20$ 程度の低 Reynolds 数では、 $E(k,t)$ は k のベキ領域を持たないが、 $R=200 \sim 800$ の範囲では、局所領域で波数が増加する順に、 $E(k,t) \approx k^{-5/3}$ 、 $E(k,t) \approx k^{-1}$ 、の二つのベキ領域が現れる。前者は、Kolmogorov (1941) の慣性小領域スペクトルと合致し、後者は、(14)、(16)式の高 Reynolds 数における、 $\nu k^2 t \gg 1$ での漸近解と合致している。

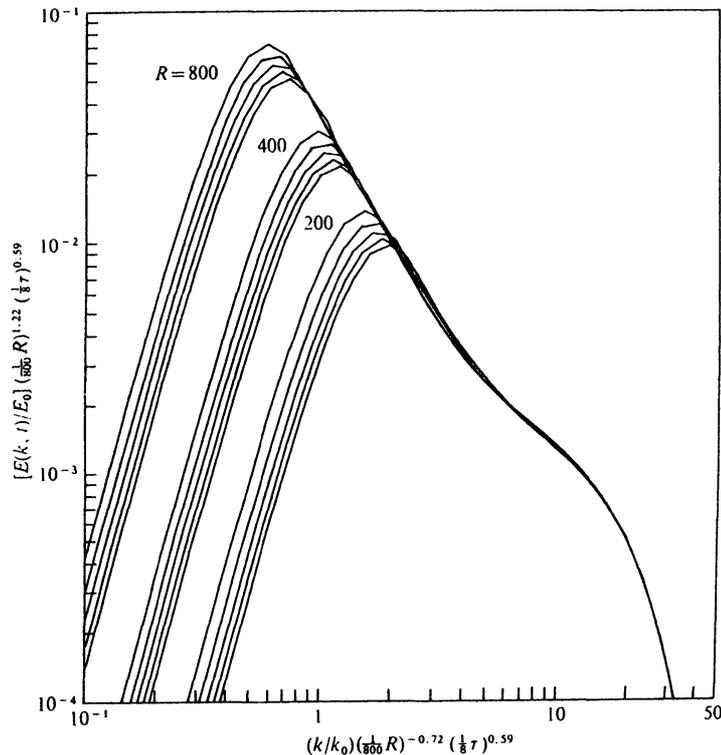


図3. $E(k,t)$ の Kolmogorov 相似性 (Tatsumi *et al.*(1978) による)。 $R=200, 400, 800$ 。

5.2 準正規-局所平衡近似理論の限界

ところが、より高い Reynolds 数領域、 $R=10^4, 10^5, 10^6$ 、において、この Kolmogorov 相似性は維持されることが分かった。

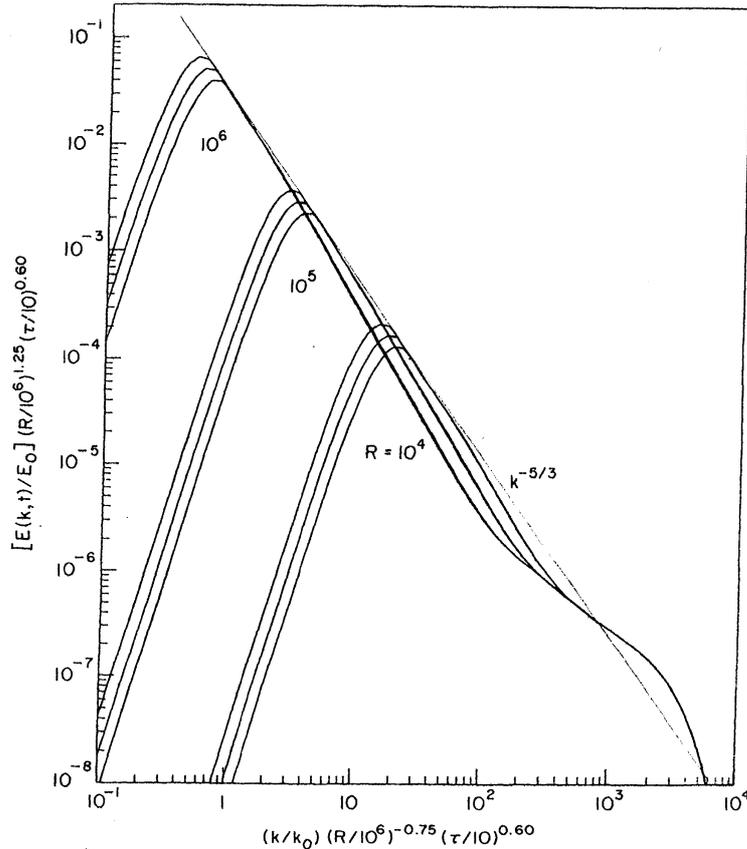


図 4. 高 Reynolds 数における $E(k,t)$ の Kolmogorov 相似則からの偏差 (Tatsumi & Kida (1980) による)。 $R = 10^4, 10^5, 10^6$ 。

図 4 に示すように、この高 Reynolds 数において、図 3 における二つのべき領域の間に、 -2 乗のべき領域が現れ、その範囲は Reynolds 数と共に増大する (Tatsumi & Kida (1980))。この結果も、 $E(k,t) = k^{-2}$ が、(14)、(16) 式の高 Reynolds 数における、 $\nu k^2 t \ll 1$ での漸近解であることと合致している。

では、図 3 の Reynolds 数において明らかになった $-5/3$ 乗の Kolmogorov 相似領域が、図 4 のような高 Reynolds 数においては、 -2 乗と -1 乗の二つの相似領域に分離することは、高 Reynolds 数における漸近則と考えて良いのであろうか。これは、そうとは思われない。何故なら、今の場合、Kolmogorov 相似則が成り立たない原因は、(14)、(16) 式における粘性項が、いずれも $\nu k^2 t$ と同程度の大きさであるため、それらは、有限の k と t に対して、非粘性極限 $\nu \rightarrow 0$ において消失し、Kolmogorov 相似則の前提である「非粘性散逸」が成り立たなくなるからである。

この非粘性極限での Kolmogorov 相似則の不成立は、「準正規近似(QN)」に限らず、すべての有限次での打ち切り近似に共通の本質的限界である。この限界を打開するには、次節に述べるように、「渦散逸」(ED) の導入や、「Markov 化」(M) といった、さまざまな現象論的手法が考えられる。しかし、この問題の根本的な解決は、「動力的理論」が対象とする「平均速度積」の枠を超えて、その母関数である「多点速度分布」を研究対象とすることによって始めて達成される。しかし、これは本論文では取り扱わない。

6. 動力的諸理論の展開

本論文では、動力的諸理論の一例として、著者自身が関与した「準正規近似理論」を選んだが、他の諸理論もまた、それぞれの展開と改善を見せている。

6.1 Kraichnan その他の理論

冒頭に述べた Kraichnan (1959) による「直接相互作用近似理論」(DIA) の、その後の展開は注目に値する。TCM 1961 当時の理論は、非粘性の極限で非 Kolmogorov 的な相似則、 $E(k,t) \approx k^{-3/2}$ を与え、この意味で、同様に $E(k,t) \approx k^{-2}$ を与えた「準正規近似理論」(QN) と同程度の近似理論であった。しかし、その後、非線形物理学の手法を用いたさまざまな改良を加え、最終的には系の Lagrange 的時間変化を考慮することによって、Kolmogorov 極限を達成した。この系統の諸理論については、McComb (1990) による優れた解説がある、

6.2 Lesieur その他の理論

前節にのべた「準正規近似理論」の破綻に対して、これを、Orszag (1970) 流の Markov 化理論 (QNM) ではなく、「渦散逸」を導入した「渦散逸 Markov 化-準正規近似理論」(EDQNM) によって解決する試みが、Lesieur (1973) によってなされた。前節までの考察から見て、この EDQNM 理論は、高 Reynolds 数乱流の諸特性を、現象論的に満たすだけの自由度を具えていると思われる。

この理論の詳細については、Lesieur (1993) による解説書の一読をお勧めしたい。本書の注目すべき特徴は、175 頁の VII-1 図で、現在行われている乱流の「解析的統計理論」と「確率モデル」の各理論を地図の形に表示したもので、これに前後約 6 頁の解説が付いている。こういった主観性を免れない図式が専門書に現れることは珍しいが、本図の場合、現在の乱流理論のように一つの体系を成さない対象について、その全体像を把握するのに有用な図式であると考えられる。

7. 結語

以上に述べた乱流の「動力的理論」の特性とその限界に関する議論に続いて、それに対応する「統計力学的理論」のそれとの比較的検討に入るべきであるが、後者の理論はまだ一般論なので、各論にまで立ち入ることは出来ない。

ただ、いまの段階でも明らかなことは、後者の理論における各次の完結した速度分布方程式は、すべて散逸項の係数に乱流散逸率 $\varepsilon > 0$ を含むため、動力的諸理論を悩ませた「非粘性散逸」の問題は、すでに解決済みということである。

なお、後者の一般論については、すでに、一昨年と昨年の本研究集会において発表しているので、その詳細については、巽 (2010,2011) を参照して頂きたい。

引用文献

- Chou, P.Y. (1940) *Chin. J. Phys.* **4**, 1-33.
- Favre, A. (1962) ed. *Mécanique de la Turbulence* 1961. Paris.
- Hopf, E. (1952) *J. Rat. Mech. Anal.* **1**, 87-123.
- Kolmogorov, A.N. (1941) *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **30**, 301-305.
- Kraichnan, R.H. (1959) *J. Fluid Mech.* **5**, 497-543.
- Kraichnan, R.H. (1962) In Favre ed. *Mécanique de la Turbulence* 1961. Paris. pp.99-106.
- Lesieur, M. (1993) *Turbulence in Fluids*. Kluwer, Dordrecht.
- Lundgren, T.S. (1967) *Phys. Fluids*, **10**, 969-975.
- McComb, W.D. (1990) *The Physics of Fluid Turbulence*. Clarendon Press. Oxford.
- Millionshtchikov, M. (1941) *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **32**, 615-618.
- Monin, A.S. (1967) *PMM J. Appl. Math. Mech.* **31**, 1057-1068.
- Ogura, Y. (1963) *J. Fluid Mech.* **16**, 38-41.
- Proudman, I. and Reid, W.H. (1954) *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A 247, 163-189.
- Proudman, I. (1962) In Favre ed. *Mécanique de la Turbulence* 1961. Paris. pp.107-112..
- Tatsumi, T. (1955) *Proc. 4th Japan Nat. Cong. Appl. Mech. 1954*, pp.307-311.
- Tatsumi, T. (1957) *Proc. Roy. Soc. London*, A 239, 16-45.
- Tatsumi, T. , Kida, S. and Mizushima, J. (1978) *J. Fluid. Mech.* **85**, 97-142.
- Tatsumi, T. and Kida, S. (1980) *Private Communication*.
- Tatsumi, T. (2001) In Kambe, T. *et al.* eds. *Geometry and Statistics of Turbulence*. Kluwer, Dordrecht. pp.3-12.
- Tatsumi, T. (2007) *RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ.* Bessatu B1, pp.238-406.
- Tatsumi, T. (2008) *RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ.* 1601, pp.1-6.
- Tatsumi, T. (2010) *RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ.* 1673, pp.67-74.
- 巽、T. (2010) *RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ.* 1721, pp.1-11.
- 巽、T. (2011) *RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ.* 1771, pp.124-134.
- Tatsumi, T. (2011) *J. Fluid Mech.* **670**, 365-403.