数理解析研究所講究録
第 1825 巻 2013 年 35-55



# 可約概均質ベクトル空間の $b$-関数と一般 Verma 加群

北海道教育大学・教育学部　和地 輝仁 (Akihito Wachi)
Faculty of Education, Hokkaido University of Education

**概要**

Capelli 恒等式が与える微分作用素は、リー代数の普遍包絡環の中心の像になっている。本稿では、Capelli 恒等式ほどには表現との関係が明確ではない、奇数個の行列式の積が現れるような類似の恒等式のいくつかの例を示し、リー代数の表現との関係や、$b$-関数の計算について紹介する。

## 1 序

まず 2009 年 6 月の数理解析研究所研究集会での結果 [4] を復習する。$T_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ を変数とし、$\det(A) = |A| = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(n)n}$ を列行列式とすると、Capelli による Capelli 恒等式は、

$$\det({}^tT)\det\left(\frac{\partial}{\partial T}\right) = \det\left({}^tT\frac{\partial}{\partial T} + \begin{pmatrix} n-1 & & & O \\ & n-2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 0 \end{pmatrix}\right) \tag{1}$$

であった。ただし、$T$ と $\partial/\partial T$ は、多項式係数微分作用素を成分に持つ $n$ 次正方行列

$$T = (T_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, \qquad \frac{\partial}{\partial T} = \left(\frac{\partial}{\partial T_{ij}}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

である。Capelli 恒等式 (1) の作用素は、一般線型リー代数の普遍包絡環の中心 $ZU(\mathfrak{gl}_n)$ の元の像になっているという著しい事実が知られている。これに対し、筆者が奇数型 Capelli 恒等式と呼んでいる等式は、

$$\left|\frac{\partial}{\partial T}(u_1)\right| \left|{}^tT\right| \left|\frac{\partial}{\partial T}(u_2)\right| \left|{}^tT\right| \cdots \left|{}^tT\right| \left|\frac{\partial}{\partial T}(u_l)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial T}(u_1){}^tT\frac{\partial}{\partial T}(u_2){}^tT\cdots{}^tT\frac{\partial}{\partial T}(u_l)\right| \tag{2}$$

という、奇数個の行列式の積公式の非可換版といえる等式である [4] 。ただし、$u_i$ は複素数であり、$(\partial/\partial T)(u)$ は、次で定まる $n$ 次正方行列である。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial T}(u) &:= \frac{\partial}{\partial T} + u{}^tT^{-1} = \frac{\partial}{\partial T} + u\frac{\partial g}{\partial T}\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial T_{ij}} + u\frac{\partial g}{\partial T_{ij}}\right)_{1\le i,j\le n} = \left(f^{-u}\frac{\partial}{\partial T_{ij}}f^{u}\right)_{1\le i,j\le n},\\ &(f=\det({}^tT),\ g=\log f).\end{aligned}$$

上式の 1 行目の 2 つめの等号は、逆行列が余因子で書けるので $\partial g/\partial T = {}^tT^{-1}$ であることからわかる。式 (2) は、ワイル代数を局所化した環 $\mathbb{C}[T_{ij}, \partial/\partial T_{ij}, f^{-1}]$ における等式である。これら 2 つの Capelli 恒等式を比較すると、次のようになる。

| | Capelli 恒等式 (1) | 奇数型 Capelli 恒等式 (2) |
|---|---|---|
| 対角行列による補正 | 有 | 無 |
| 右辺の行列成分 | 非可換 | 可換 [4] |
| $b$-関数の計算 | $\det(T)$ | $\det(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})$ [4] |
| リー環との関係 | 作用素が $ZU(\mathfrak{gl}_n)$ の像 | 一般バーマ加群に関連有 (第 5 節) |
| 他の型での恒等式 | Howe-Umeda [1] に有 | 対称行列版 (第 2 節) |

上の表で、$\det(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})$ は、ある概均質ベクトル空間の相対不変式であるが、本稿では解説しない。また、表中の右辺の行列成分の可換性も非自明である。

最後にパラメータ付き作用素と $b$-関数の計算について注意しておく。Capelli 恒等式による $b$-関数の計算は、

$$\left|\frac{\partial}{\partial T}\right|(f^{s+1}) = (s+1)(s+2)\cdots(s+n)f^s$$

となり、$b$-関数は $b(s) = (s+1)(s+2)\cdots(s+n)$ であることが良く知られている。左辺に、$(f^{s+1})$ とあるのは、関数 $f^{s+1}$ に微分作用素を適用したという意味である。パラメータ付きの作用素では、次のようになる。

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial T}(u)\right|(f^{s+1}) &= \left|f^{-u}\frac{\partial}{\partial T}f^{u}\right|(f^{s+1}) = \left(f^{-u}\left|\frac{\partial}{\partial T}\right|f^{u}\right)(f^{s+1})\\ &= f^{-u}\left|\frac{\partial}{\partial T}\right|(f^{s+u+1}) = (s+u+1)(s+u+2)\cdots(s+u+n)f^s.\end{aligned}$$

このように、パラメータが付いた分だけ $b(s)$ の $s$ がずれるが、次節以降に述べる対称行列版の場合でも同様なずれが生じる。

本稿では、第 2 節で対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式の証明をし、それを用いて、第 3 節、第 4 節で、ある可約概均質ベクトル空間の $b$-関数が計算できることを示す。この $b$-関数

は、今回初めて計算できたものではなく、Sato-Sugiyama [2] で計算されたもの、および、そこに例示されてはいないが、[2] の定理を用いて計算できるものであることを注意しておく。

第5節では、奇数型 Capelli 恒等式の、リー環との関係の一端を明らかにする。Capelli の Capelli 恒等式 (1) では、現れる作用素が、一般線型リー代数の普遍包絡環の中心 $ZU(\mathfrak{gl}_n)$ の像になるという著しい表現論的性質を持っていた。奇数型 Capelli 恒等式、および、その対称行列版では、そこまで著しい性質はわかっていないが、それぞれ、一般線型リー代数、斜交リー代数のスカラー型一般バーマ加群の表現作用素として現れることを示す。

## 2 対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式

この節では、奇数型 Capelli 恒等式 (2) において、行列 $T$ を対称行列に変えたときも同様の恒等式が得られることを証明する。まず記号の準備をする。$S_{ij}$ $(1 \le i, j \le n)$ を $S_{ij} = S_{ji}$ を満たす変数とすると、対称行列に対する Capelli 恒等式は、

$$\det({}^tS)\det\left(\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}\right) = \det\left({}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S} + \begin{pmatrix} (n-1)/2 & & O \\ & (n-2)/2 & \\ & & \ddots & \\ O & & & 0 \end{pmatrix}\right) \tag{3}$$

であった (Turnbull [3])。ただし、$S$ と $\bar\partial/\bar\partial S$ は以下で定まる $n$ 次正方行列である。

$$S = (S_{ij})_{1\le i,j\le n}, \qquad \frac{\bar\partial}{\bar\partial S} = \left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial S_{ij}}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式は次で与えられる。証明には外積代数を用いる。奇数型 Capelli 恒等式 (2) の証明には、外積代数を使わない見通しのよい証明もあるが、今のところ対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式の証明は、外積代数を用いたものしかない。

**定理 1** (対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式). ワイル代数を $f = \det({}^tS)$ で局所化した環 $\mathbb{C}[S_{ij}, \frac{\partial}{\partial S_{ij}}, f^{-1}]$ において、次の等式が成立する。

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_1)\right| \left|{}^tS\right| \left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_2)\right| \left|{}^tS\right| \cdots \left|{}^tS\right| \left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_l)\right| \\ &\qquad = \left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_1)\,{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_2)\,{}^tS\cdots{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_l)\right|.\end{aligned} \tag{4}$$

ここで、$(\bar\partial/\bar\partial S)(u)$ は、次で定まる $n$ 次正方行列である。

$$\begin{aligned}\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u) &:= \frac{\bar\partial}{\bar\partial S} + u\,{}^tS^{-1} = \frac{\bar\partial}{\bar\partial S} + u\frac{\bar\partial g}{\bar\partial S} \\ &= \left(\frac{\bar\partial}{\bar\partial S_{ij}} + u\frac{\bar\partial g}{\bar\partial S_{ij}}\right)_{1\le i,j\le n} = \left(f^{-u}\frac{\bar\partial}{\bar\partial S_{ij}}f^{u}\right)_{1\le i,j\le n}, \\ &\quad (f = \det({}^tS),\ g = \log f).\end{aligned}$$

ここで、上の式の 1 行目の 2 つ目の等号は、下の補題 2 からわかる。

**補題 2.** 次が成立する。

$$\frac{\bar{\partial} g}{\bar{\partial} S} = {}^tS^{-1}.$$

*Proof.* まず、

$$\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} S_{ij}} = \frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial S_{ij}}$$

であることを思い出しておく。つまり、$\partial/\partial S_{ij}$ ではなく、$\bar{\partial}/\bar{\partial} S_{ij}$ で次数作用素を作ると、$S_{ii}$ を 1 次と数え、$S_{ij}$ $(i \neq j)$ を 1/2 次と数える、などとなることに注意しておく。

さて、$f = \det({}^tS)$ は、$S_{ii}$ を 1 次、$S_{ij}$ $(i \neq j)$ を 1/2 次と数えると、$S$ の各行 (各列) について、全次数 1 次である。なぜなら、ある $i$ を固定したとき、$\det({}^tS)$ のある項が $S_{ii}$ を含むなら、その項には $S$ の $i$ 行、$i$ 列の変数はそれ以外に現れず、$S_{ii}$ を含まないなら、$i$ 行の変数と $i$ 列の変数がちょうど 1 度ずつ現れるからである。また、$i \neq j$ のとき、$S$ の $j$ 行 (と同時に $j$ 列) を $i$ 行 (と同時に $i$ 列) にコピーすると、特に、2 つの行が一致するから、その行列式は 0 になる。従って、

$$\sum_{a=1}^{n} S_{ai}\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} S_{aj}} = \delta_{ij} f$$

である。両辺を $f$ で割ると、対数微分になるから、

$$\sum_{a=1}^{n} S_{ai}\frac{\bar{\partial} g}{\bar{\partial} S_{aj}} = \delta_{ij}$$

となり、これは、$\bar{\partial} g/\bar{\partial} S$ が ${}^tS$ の逆行列であることを意味する。 □

この節の残りを用いて対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式 (4) を証明する。

**定義 3.** 局所化されたワイル代数を

$$\mathcal{W} = \mathbb{C}[S_{ij}, \frac{\partial}{\partial S_{ij}}, f^{-1}]$$

と書く ($\mathcal{W}$ と後述の $\mathcal{R}$ という記号は、は本稿の定義 3 より以降の部分では用いない。ここでは、定義を見易くするためにこのような記号を用いた)。複素数成分のベクトル $\underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_l)$ と、$v \in \mathbb{C}$ に対して、$n$ 次正方行列 $A^{(l)}(\underline{u}), B(v) \in \mathrm{Mat}(n; \mathcal{W})$ を、

$$A^{(l)}(\underline{u}) = \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} S}(u_1){}^tS\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} S}(u_2){}^tS\cdots{}^tS\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} S}(u_l), \qquad B(v) = {}^tS\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} S}(v)$$

と定める。$A^{(l)}(\underline{u})$ は、対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式 (4) の、右辺の行列式の行列である。また、$B(v) = B + v1_n$ であり ($1_n$ は $n$ 次単位行列)、パラメータが 0 であるときは、$B(0) = B$ と書くこともある。

さらに、$\mathbb{C}^n$ の外積代数 $\bigwedge(\mathbb{C}^n)$ と $\mathcal{W}$ との $\mathbb{C}$ 上のテンソル積

$$\mathcal{R} = \bigwedge(\mathbb{C}^n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{W}$$

を考え、$\eta_j(\underline{u}), \zeta_j(\underline{u}, v) \in \mathcal{R}$ を、

$$\eta_j(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{n} e_i A_{ij}^{(l)}(\underline{u}),$$
$$\zeta_k(\underline{u}, v) = \sum_{i=1}^{n} e_i A_{ik}^{(l+1)}(\underline{u}, v) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(\underline{u}) B_{jk}(v)$$

と定める。ただし、$e_1, e_2, \ldots, e_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底であり、$(\underline{u}, v)$ は、ベクトル $\underline{u}$ に要素 $v$ を追加した、長さ $l+1$ のベクトルを表す。これら $\eta_j(\underline{u})$, $\zeta_k(\underline{u}, v)$ は補題 7 以降で用いる。

**補題 4** (パラメータに関する対称性). $A^{(l)}(\underline{u})$ は、$\underline{u}$ の要素の順序によらない。

*Proof.* $u, v \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\partial}}{\partial S}(u)\,{}^tS\frac{\bar{\partial}}{\partial S}(v) &= \left(\frac{\bar{\partial}}{\partial S} + u\,{}^tS^{-1}\right){}^tS\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial S} + v\,{}^tS^{-1}\right)\\ &= \frac{\bar{\partial}}{\partial S}\,{}^tS\frac{\bar{\partial}}{\partial S} + (u+v)\frac{\bar{\partial}}{\partial S} + uv\,{}^tS^{-1}\end{aligned}$$

であるから、隣接するパラメータは交換しても同じである。したがって、$A^{(l)}(\underline{u})$ は、$\underline{u}$ の要素の順序によらない。 □

**補題 5.** 次が成立する。ただし、$[x, y] = xy - yx$ である。

$$[B_{ij}, B_{st}] = \frac{1}{2}(\delta_{js} B_{it} - \delta_{ti} B_{sj}).$$

*Proof.*

$$\begin{aligned}(\mathrm{LHS}) &= \sum_{a,b=1}^{n}\left[S_{ai}\frac{\bar{\partial}}{\partial S_{aj}}, S_{bs}\frac{\bar{\partial}}{\partial S_{bt}}\right]\\ &= \sum_{a,b} S_{ai}\cdot\frac{\delta_{ab}\delta_{js} + \delta_{as}\delta_{jb}}{2}\cdot\frac{\bar{\partial}}{\partial S_{bt}} + \sum_{a,b} S_{bs}\cdot\frac{-\delta_{ab}\delta_{it} - \delta_{at}\delta_{ib}}{2}\cdot\frac{\bar{\partial}}{\partial S_{aj}}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_a S_{ai}\frac{\bar{\partial}}{\partial S_{at}}\delta_{js} + S_{si}\frac{\bar{\partial}}{\partial S_{jt}} - \sum_a S_{as}\frac{\bar{\partial}}{\partial S_{aj}}\delta_{it} - S_{is}\frac{\bar{\partial}}{\partial S_{tj}}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\delta_{js} B_{it} - \delta_{it} B_{sj})\\ &= (\mathrm{RHS}).\end{aligned}$$

□

**命題 6** (対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式の右辺の行列成分の可換性). 次が成立する。

(1) $[A^{(l)}_{ij}(\underline{u}), B_{st}(v)] = \frac{1}{2}(\delta_{js}A^{(l)}_{it}(\underline{u}) + \delta_{is}A^{(l)}_{tj}(\underline{u}))$

(2) $A^{(l)}(\underline{u})$ は対称行列である。

(3) $A^{(l)}(\underline{u})$ の成分は互いに可換である。

*Proof.* (1), (2), (3) を同時に $l$ に関する数学的帰納法で証明する ((1), (2), (3) の順番であれば、それぞれ単独でも帰納法で証明できる)。また、$B_{st}(v) = B_{st} + v1_n$ なので、(1) は $v = 0$ に対して証明すれば十分である。

$l = 1$ のとき、(2) は明らかである。(3) は、

$$A^{(1)}(u_1) = \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}(u_1) = f^{-u_1}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}f^{u_1}$$

であるから、やはり明らかである。

$l = 1$ のとき、(1) を証明する。$\underline{u} = (u)$ とすると、

$$\begin{aligned}
((1)\ \mathrm{LHS}) &= \left[\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{ij}}(u), \sum_a S_{as}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{at}}\right] \\
&= \sum_a \frac{1}{2}(\delta_{ia}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{ja})\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{at}} + \sum_a \left[u\frac{\bar{\partial}g}{\bar{\partial}S_{ij}}, S_{as}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{at}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\delta_{js}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{it}} + \delta_{is}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{jt}}\right) - \sum_a \left(S_{as}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{ij}}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{at}}\right)(ug) \qquad (5)
\end{aligned}$$

となる。ここで、$(ug)$ は、パラメータではなく、微分作用素を関数 $ug$ に適用する意味である。この最後の項は、

$$\begin{aligned}
\sum_a \left(S_{as}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{ij}}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{at}}\right)(ug) &= \sum_a \left(\left(\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{ij}}S_{as}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{at}}\right)(ug) - \frac{1}{2}(\delta_{ai}\delta_{sj} + \delta_{aj}\delta_{si})\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{at}}(ug)\right) \\
&= \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{ij}}\left(\sum_a S_{as}u\frac{\bar{\partial}g}{\bar{\partial}S_{at}}\right) - \frac{1}{2}\left(\delta_{sj}u\frac{\bar{\partial}g}{\bar{\partial}S_{it}} + \delta_{si}u\frac{\bar{\partial}g}{\bar{\partial}S_{jt}}\right)
\end{aligned}$$

となるが、第 1 項の括弧の中に補題 2 を用いると $u\delta_{st}$ という定数関数になるから、それが微分されて第 1 項は消える。よって、式 (5) は、

$$\frac{1}{2}\left(\delta_{js}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{it}}(u) + \delta_{is}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S_{jt}}(u)\right) = ((1)\ \mathrm{RHS})$$

となり、$l = 1$ の場合の (1) が証明された。

以下では、$l$ の場合まで (1), (2), (3) が成立すると仮定して、$l+1$ の場合に (1), (2), (3) が成立することを証明する。まず、(1) を示す。

$$
\begin{aligned}
&[A_{ij}^{(l+1)}(\underline{u}, v), B_{st}] \\
&\quad = \sum_a [A_{ia}^{(l)}(\underline{u}) B_{aj}(v), B_{st}] \\
&\quad = \sum_a \frac{1}{2}(\delta_{as} A_{it}^{(l)}(\underline{u}) + \delta_{is} A_{ta}^{(l)}(\underline{u})) B_{aj}(v) + \sum_a A_{ia}^{(l)}(\underline{u}) \cdot \frac{1}{2}(\delta_{js} B_{at} - \delta_{ta} B_{sj}).
\end{aligned}
$$

上の最後の変形では、第 1 項には帰納法の仮定のうち (1) の主張を用い、第 2 項には補題 5 を用いた。さらに計算を続けると、

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(A_{it}^{(l)}(\underline{u}) B_{sj}(v) + \delta_{is} A_{tj}^{(l+1)}(\underline{u}, v) + \delta_{js} A_{it}^{(l+1)}(\underline{u}, 0) - A_{it}^{(l)}(\underline{u}) B_{sj}) \\
&= \frac{1}{2}(A_{it}^{(l)}(\underline{u}) \cdot v\delta_{sj} + \delta_{is} A_{tj}^{(l+1)}(\underline{u}, v) + \delta_{js} A_{it}^{(l+1)}(\underline{u}, 0)) \\
&= \frac{1}{2}(\delta_{js} A_{it}^{(l+1)}(\underline{u}, v) + \delta_{is} A_{tj}^{(l+1)}(\underline{u}, v))
\end{aligned}
$$

となり、(1) が証明された。

次に $l+1$ の場合に (2) を証明する。

$$
\begin{aligned}
A_{ij}^{(l+1)}(\underline{u}, v) &= \sum_{a=1}^{n} A_{ia}^{(l)}(\underline{u}) B_{aj}(v) \\
&= \sum_a \left( B_{aj}(v) A_{ia}^{(l)}(\underline{u}) + \frac{1}{2}\delta_{aa} A_{ij}^{(l)}(\underline{u}) + \frac{1}{2}\delta_{ia} A_{ja}^{(l)}(\underline{u}) \right).
\end{aligned}
$$

括弧の中の最後の項に、帰納法の仮定のうち (1) の主張を用いた。続いて、帰納法の仮定のうち (2) の主張を用いると、上の式の括弧内の後ろの 2 項がまとまり、

$$
= \sum_a B_{aj}(v) A_{ia}^{(l)}(\underline{u}) + \frac{1}{2}(n+1) A_{ij}^{(l)}(\underline{u}) \tag{6}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
B_{aj}(v) &= \sum_{b=1}^{n} S_{ba} \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} S_{bj}}(v) \\
&= \sum_b \left( \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} S_{bj}}(v) S_{ba} - \frac{1}{2}\delta_{aj} - \frac{1}{2}\delta_{bj}\delta_{ab} \right) \\
&= \sum_b \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} S_{bj}}(v) S_{ba} - \frac{1}{2}(n+1)\delta_{aj}
\end{aligned}
$$

であるから、式 (6) は次のように変形される。

$$
\begin{aligned}
(\text{式 }(6)) &= \sum_a \left( \sum_b \frac{\bar\partial}{\bar\partial S_{bj}}(v) S_{ba} - \frac{n+1}{2}\delta_{aj} \right) A^{(l)}_{ia}(\underline{u}) + \frac{n+1}{2} A^{(l)}_{ij}(\underline{u}) \\
&= \sum_{a,b} \frac{\bar\partial}{\bar\partial S_{jb}}(v) S_{ab} A^{(l)}_{ai}(\underline{u}).
\end{aligned}
$$

ここの最後の変形では、帰納法の仮定のうち (2) の主張を用いた。変形を続けると、

$$
= A^{(l+1)}_{ji}(v, \underline{u}) = A^{(l+1)}_{ji}(\underline{u}, v)
$$

となり、(2) が示された。ただし、最後の変形には、$A^{(l)}(\underline{u})$ がパラメータの順序によらないこと (補題 4) を用いた。

最後に、$l+1$ の場合に (3) を示す。

$$
\begin{aligned}
&[A^{(l+1)}_{ij}(\underline{u}, v), A^{(l+1)}_{st}(\underline{u}, v)] \\
&= \sum_{a,b=1}^{n} [A^{(l)}_{ia}(\underline{u}) B_{aj}(v), A^{(l)}_{sb}(\underline{u}) B_{bt}(v)] \\
&\overset{\text{帰納法の仮定 (3)}}{=} \sum_{a,b} \Big( A^{(l)}_{ia}(\underline{u}) [B_{aj}(v), A^{(l)}_{sb}(\underline{u})] B_{bt}(v) \\
&\qquad + A^{(l)}_{sb}(\underline{u}) [A^{(l)}_{ia}(\underline{u}), B_{bt}(v)] B_{aj}(v) + A^{(l)}_{sb}(\underline{u}) A^{(l)}_{ia}(\underline{u}) [B_{aj}(v), B_{bt}(v)] \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{a,b} \Big( -A^{(l)}_{ia}(\underline{u}) \left( \delta_{ba} A^{(l)}_{sj}(\underline{u}) + \delta_{sa} A^{(l)}_{jb}(\underline{u}) \right) B_{bt}(v) \\
&\quad + A^{(l)}_{sb}(\underline{u}) \left( \delta_{ab} A^{(l)}_{it}(\underline{u}) + \delta_{ib} A^{(l)}_{ta}(\underline{u}) \right) B_{aj}(v) + A^{(l)}_{sb}(\underline{u}) A^{(l)}_{ia}(\underline{u}) \left( \delta_{jb} B_{at}(v) - \delta_{ta} B_{bj}(v) \right) \Big).
\end{aligned}
$$

ここで、帰納法の仮定のうち (3) の主張を用いると、次のように変形される。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \Big( -A^{(l)}_{sj}(\underline{u}) A^{(l+1)}_{it}(\underline{u}, v) - A^{(l)}_{is}(\underline{u}) A^{(l+1)}_{jt}(\underline{u}, v) + A^{(l)}_{it}(\underline{u}) A^{(l+1)}_{sj}(\underline{u}, v) \\
&\qquad + A^{(l)}_{si}(\underline{u}) A^{(l+1)}_{tj}(\underline{u}, v) + A^{(l)}_{sj}(\underline{u}) A^{(l+1)}_{it}(\underline{u}, v) - A^{(l)}_{it}(\underline{u}) A^{(l+1)}_{sj}(\underline{u}, v) \Big) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

ここで、括弧の中の第 2 項と第 4 項の相殺には、(帰納法の仮定ではなく) 命題の (2) は既に $l+1$ の場合も証明済みなので、それを用いていることを注意しておく。以上で (3) が示された。 □

**補題 7** ($\eta$ と $\zeta$ の交換関係). 次が成立する。

$$
\eta_j(\underline{u}) \zeta_k(\underline{u}, v) = -\zeta_k(\underline{u}, v - \frac{1}{2}) \eta_j(\underline{u})
$$

*Proof.*

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{LHS}) &= \sum_{i=1}^{n} e_i A^{(l)}_{ij}(\underline{u}) \sum_{a,b=1}^{n} e_a A^{(l)}_{ab}(\underline{u}) B_{bk}(v) \\
&= \sum_{i,a,b} e_i e_a A^{(l)}_{ab}(\underline{u}) \left( B_{bk}(v) A^{(l)}_{ij}(\underline{u}) + \frac{\delta_{jb}}{2} A^{(l)}_{ik}(\underline{u}) + \frac{\delta_{ib}}{2} A^{(l)}_{kj}(\underline{u}) \right) \\
&= -\zeta_k(\underline{u}, v)\eta_j(\underline{u}) + \frac{1}{2} \left( \sum_{i,a} e_i e_a A^{(l)}_{aj}(\underline{u}) A^{(l)}_{ik}(\underline{u}) + \sum_{i,a} e_i e_a A^{(l)}_{ai}(\underline{u}) A^{(l)}_{kj}(\underline{u}) \right)
\end{aligned}
$$

(上の括弧の中の 2 項目は、$e_i e_a$ が $i, a$ に関して交代的で、$A^{(l)}_{ai}(\underline{u}) A^{(l)}_{kj}(\underline{u})$ が $i, a$ に関して対称だから 0 になる。)

$$
\begin{aligned}
&= -\zeta_k(\underline{u}, v)\eta_j(\underline{u}) + \frac{1}{2}\eta_k(\underline{u})\eta_j(\underline{u}) \\
&= -\zeta_k(\underline{u}, v - \frac{1}{2})\eta_j(\underline{u}) \\
&= (\mathrm{RHS}).
\end{aligned}
$$

□

**命題 8.** 次が成立する。

$$
|A^{(l+1)}(\underline{u}, v)| = \left| A^{(l)}(\underline{u}) \right| \left| {}^t S \right| \left| \frac{\bar{\partial}}{\partial S}(v) \right|.
$$

*Proof.* まず、

$$
\begin{aligned}
\zeta_1(\underline{u}, v) \cdots \zeta_n(\underline{u}, v) &= \left( \sum_{i=1}^{n} e_i A^{(l+1)}_{i1}(\underline{u}, v) \right) \cdots \left( \sum_{i=1}^{n} e_i A^{(l+1)}_{in}(\underline{u}, v) \right) \\
&= e_1 \cdots e_n \det(A^{(l+1)}(\underline{u}, v))
\end{aligned}
$$

である。次に、

$$
\begin{aligned}
\zeta_1(\underline{u}, v) \cdots \zeta_n(\underline{u}, v) &= \zeta_1(\underline{u}, v) \cdots \zeta_{n-1}(\underline{u}, v) \sum_{j_n=1}^{n} \eta_{j_n}(\underline{u}) B_{j_n, n}(v) \\
&\overset{\text{補題 7}}{=} (-1)^{n-1} \sum_{j_n} \eta_{j_n}(\underline{u}) \cdot \zeta_1(\underline{u}, v + \frac{1}{2}) \cdots \zeta_{n-1}(\underline{u}, v + \frac{1}{2}) \cdot B_{j_n, n}(v)
\end{aligned}
$$

となるが、この操作を反復して変形を継続すると、

$$= (-1)^{n(n-1)} \sum_{j_1,\ldots,j_n} \eta_{j_1}(\underline{u})\eta_{j_2}(\underline{u})\cdots\eta_{j_n}(\underline{u})$$

$$\times B_{j_1,1}(v+\frac{n-1}{2})B_{j_2,2}(v+\frac{n-2}{2})\cdots B_{j_n,n}(v+\frac{n-n}{2})$$

$$= e_1\cdots e_n \det(A^{(l)}(\underline{u}))\det\left(B+\begin{pmatrix} v+(n-1)/2 & & & \\ & v+(n-2)/2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & v \end{pmatrix}\right).$$

ここで、対称行列に対する Capelli 恒等式 (3) において $f^{-v}$ で共役をとり、パラメータを $v$ だけずらしたものを用いると、

$$= e_1\cdots e_n \det(A^{(l)}(\underline{u}))\det({}^tS)\det\left(\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(v)\right)$$

となる。これらを比較すると、命題を得る。 □

命題 8 を繰り返し用いると、

$$\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_1)\right| \left|{}^tS\right| \left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_2)\right| \left|{}^tS\right| \cdots \left|{}^tS\right| \left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_l)\right| = \left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_1){}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_2){}^tS\cdots{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_l)\right|$$

が得られる。これが、この節で証明したかった対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式 (4) である。

## 3 $\det\Big((X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})\,{}^t(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})\Big)$ の $b$-関数

対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式 (4) を用いて、2 種類の可約概均質ベクトル空間の $b$-関数が計算できる。この節ではそのうち 1 つを計算する。この $b$-関数は Sato-Sugiyama [2] で計算されているものである。以下では係数体は $\mathbb{C}$ である。

$m_1, m_2, \ldots, m_l$ を正整数とするとき、概均質ベクトル空間 $(G,V)$ を次で定める。

$$G = GL(m_0)\times GL(m_1)\times\cdots\times GL(m_{l-1})\times SO(m_l),$$
$$V = \mathrm{Mat}(m_0,m_1)\oplus\mathrm{Mat}(m_1,m_2)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Mat}(m_{l-1},m_l),$$
$$(g_0,\ldots,g_l).(X^{(1)},\ldots,X^{(l)}) = (g_0X^{(1)}g_1^{-1},\ldots,g_{l-1}X^{(l)}g_l^{-1}).$$

さらに、すべての $i$ に対し $m_0 \le m_i$ であるとき、

$$f = \det\Big((X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})\,{}^t(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})\Big)$$

は $(G,V)$ の相対不変式になる。この相対不変式 $f$ の $b$-関数 $b_f(s)$ は、$f$ の各変数に、対応する偏微分作用素を代入して得られる定数係数微分作用素 $f(\partial)$ を用いて、$f(\partial)(f^{s+1}) = b_f(s)f^s$

として与えられる (正確には定数倍して monic にしたものが $b_f(s)$)。これは、

$$b_f(s) = \prod_{r=1}^{l}(s+m_r/2)^{((m_0))}\prod_{r=0}^{l-1}(s+(m_r+1)/2)^{((m_0))},$$
$$\text{ただし、}a^{((k))} = a(a-1/2)\cdots(a-(k-1)/2)$$

であることが、Sato-Sugiyama [2, Proposition 4.1] で計算されている。この節の残りでは、対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式 (4) を利用して、この $b$-関数を計算する。

## 3.1 記号

まず記号を定める。正整数 $m_0, m_1, \ldots, m_l$ は、すべての $i$ に対して $m_i \geq m_0$ を満たすとする。$X^{(i)}$ を独立な変数を成分に持つ $m_{i-1}\times m_i$ 行列とし $(1\leq i\leq l)$、$i\leq j$ に対して、$X^{(i,j)} = X^{(i)}X^{(i+1)}\cdots X^{(j)}$ と置く。$m_0$ 次対称行列 $S$ を

$$S := X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)}\,{}^t(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)}) = X^{(1,l)}\,{}^tX^{(1,l)}$$

で定める。偏微分作用素の行列について、

$$\frac{\partial}{\partial X^{(r)}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{(r)}_{ij}}\right)_{1\leq i\leq m_{r-1},1\leq j\leq m_r} \qquad (1\leq r\leq l)$$

であるが、

$$\frac{\bar\partial}{\bar\partial S} = \left(\frac{\bar\partial}{\bar\partial S_{ij}}\right)_{1\leq i,j\leq m_0} = \left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial S_{ij}}\right)_{1\leq i,j\leq m_0}$$

であることに注意する。

$$f = \det({}^tS), \qquad g = \log\det({}^tS)$$

と置くと、補題 2 により、$\frac{\bar\partial g}{\bar\partial S} = {}^tS^{-1}$ である。これまでと同じく、

$$\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u) = \frac{\bar\partial}{\bar\partial S} + u\,{}^tS^{-1} = \frac{\bar\partial}{\bar\partial S} + u\frac{\bar\partial g}{\bar\partial S} = f^{-u}\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}f^u$$

と置く。また、

$$\frac{\partial}{\partial X^{(r)}}(u) := \frac{\partial}{\partial X^{(r)}} + u\frac{\partial g}{\partial X^{(r)}} = f^{-u}\frac{\partial}{\partial X^{(r)}}f^u \quad (1\leq r\leq l)$$

と置くが、$X^{(r)}$ は正方行列とは限らないので、$T$ や $S$ の場合のように、逆行列を用いた表示はないことに注意する。

## 3.2 連鎖律と変数変換公式

**補題 9** (連鎖律). 関数 $\phi = \phi(S) = \phi(S_{11}, \ldots, S_{m_0,m_0})$ と、$1 \le r \le l$ に対して、次が成立する。

(1) $\dfrac{\partial \phi}{\partial X^{(r)}}(u) = 2 \cdot {}^tX^{(1,r-1)} \dfrac{\bar{\partial}\phi}{\bar{\partial}S}(u)\, {}^t(X^{(r+1,l)}\, {}^tX^{(1,l)})$

(2) ${}^t\!\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial X^{(r)}}(u)\right) = 2 \cdot {}^t(X^{(1,l)}\, {}^tX^{(r+1,l)}) \dfrac{\bar{\partial}\phi}{\bar{\partial}S}(u)\, {}^tX^{(1,r-1)}$

*Proof.* (2) は (1) の転置だから、(1) のみ示す。記号の簡単のために、

$$X = X^{(1,r-1)}, \qquad Y = X^{(r)}, \qquad Z = X^{(r+1,l)}\, {}^tX^{(r+1,l)}$$

と置く。すると、$S = XYZ\,{}^tY\,{}^tX$ であり、$Z$ は対称行列である。微分の連鎖律により、

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y_{ij}} = \sum_{a \le b} \frac{\partial \phi}{\partial S_{ab}} \frac{\partial S_{ab}}{\partial Y_{ij}} = \sum_{a,b=1}^{n} \frac{\bar{\partial}\phi}{\bar{\partial}S_{ab}} \frac{\partial S_{ab}}{\partial Y_{ij}}$$

である。ここで、$S_{ab} = \sum_{p,q,s,t} X_{ap} Y_{pq} Z_{qs} Y_{ts} X_{bt}$ を用いて偏微分を計算して、計算を続けると、

$$\begin{aligned} &= \sum_{a,b,p,q,s,t} \frac{\bar{\partial}\phi}{\bar{\partial}S_{ab}} (X_{ap}\delta_{ip}\delta_{jq} Z_{qs} Y_{ts} X_{bt} + X_{ap} Y_{pq} Z_{qs} \delta_{it}\delta_{js} X_{bt}) \\ &= \left({}^tX \frac{\bar{\partial}\phi}{\bar{\partial}S} XY\,{}^tZ\right)_{(i,j)\text{ 成分}} + \left({}^tX\, {}^t\!\left(\frac{\bar{\partial}\phi}{\bar{\partial}S}\right) XYZ\right)_{(i,j)\text{ 成分}} \end{aligned}$$

となる。ここで、$S$ と $Z$ は対称行列だから、

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = 2\,{}^tX \frac{\bar{\partial}\phi}{\bar{\partial}S} XYZ$$

を得たことになるが、これは (1) の $u = 0$ の場合である。一般の $u$ の場合を得るには、これに $\phi = ug$ を代入した式と、辺々加えればよい。 □

**補題 10.** 次が成立する。

(1) $\dfrac{\partial}{\partial X^{(r)}}(u - \dfrac{m_r}{2})\, {}^tX^{(1,r)} = 2 \cdot {}^tX^{(1,r-1)} \dfrac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}(u - \dfrac{m_0+1}{2})\, {}^tS$

(2) ${}^t\!\left(\dfrac{\partial}{\partial X^{(r)}}(u - \dfrac{m_{r-1}}{2})\right) X^{(r,l)}\, {}^tX^{(1,l)} = 2 \cdot {}^t(X^{(1,l)}\, {}^tX^{(r+1,l)}) \dfrac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}(u - \dfrac{m_0}{2})\, {}^tS$

(3) ${}^t\!\left(\dfrac{\partial}{\partial X^{(1)}}(u)\right) = 2 \cdot {}^t(X^{(1,l)}\, {}^tX^{(2,l)}) \dfrac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}(u)$

*Proof.* (2) と (3) は (1) と同様に証明できるので、(1) のみ証明する。補題 9 より、

$$\frac{\partial\phi}{\partial X^{(r)}} = 2\,{}^tX^{(1,r-1)}\frac{\bar{\partial}\phi}{\bar{\partial}S}\,{}^t(X^{(r+1,l)}\,{}^tX^{(1,l)})$$

である。このままでは $\phi$ を除去できないが、右から ${}^tX^{(1,r)}$ を掛けて、

$$\frac{\partial\phi}{\partial X^{(r)}}\,{}^tX^{(1,r)} = 2\,{}^tX^{(1,r-1)}\frac{\bar{\partial}\phi}{\bar{\partial}S}\,{}^tS,$$

$$ {}^t\!\left(X^{(r)}\,{}^t\!\left(\frac{\partial\phi}{\partial X^{(r)}}\right)\right)\,{}^tX^{(1,r-1)} = 2\,{}^tX^{(1,r-1)}\,{}^t\!\left(S\,{}^t\!\left(\frac{\bar{\partial}\phi}{\bar{\partial}S}\right)\right) \tag{7}$$

と変形すると、$\phi$ を除去できる。さらに、

$$ {}^t\!\left(X^{(r)}\,{}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial X^{(r)}}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial X^{(r)}}\,{}^tX^{(r)} - m_r 1_{m_{r-1}},$$

$$ {}^t\!\left(S\,{}^t\!\left(\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}\right)\right) = \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}\,{}^tS - \frac{m_0+1}{2}1_{m_0}$$

であることが簡単な計算によりわかるので ($1_{m_{r-1}}$ などは単位行列)、これを用いると、式 (7) から $\phi$ を除去したものは、次のように整理される。

$$\frac{\partial}{\partial X^{(r)}}\,{}^tX^{(1,r)} = 2\,{}^tX^{(1,r-1)}\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}\left(\frac{m_r-m_0-1}{2}\right){}^tS.$$

最後に、$f^{-u+m_r/2}$ で共役をとり、パラメータを整えると、証明すべき式が得られる。 □

**命題 11** (変数変換公式). $u_i, v_i \in \mathbb{C}$ に対して、次が成立する。

$$\begin{aligned}
2^{2l}\cdot\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}&(u_1-\frac{m_0}{2}){}^tS\cdots{}^tS\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}(u_l-\frac{m_0}{2})\cdot{}^tS\cdot\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}(v_l-\frac{m_0}{2}){}^tS\cdots{}^tS\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}(v_1-\frac{m_0}{2})\\
&=\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}(u_1-\frac{m_1-1}{2})\cdots\frac{\partial}{\partial X^{(l)}}(u_l-\frac{m_l-1}{2})\\
&\qquad\times{}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial X^{(l)}}(v_l-\frac{m_{l-1}}{2})\right)\cdots{}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}(v_1-\frac{m_0}{2})\right).
\end{aligned}$$

*Proof.* 補題 10 (1) の $r=1$ の場合を用いると、左辺の冒頭は、

$$2^{2l-1}\cdot\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}(u_1-\frac{m_1-1}{2})\,{}^tX^{(1)}\cdot\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}(u_2-\frac{m_0}{2}){}^tS\cdots.$$

となり、次に、上に示した部分の最後に、再び補題 10 (1) の $r=2$ の場合を用いると、

$$2^{2l-2}\cdot\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}(u_1-\frac{m_1-1}{2})\cdot\frac{\partial}{\partial X^{(2)}}(u_2-\frac{m_2-1}{2})\,{}^tX^{(1,2)}\cdot\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}(u_3-\frac{m_0}{2}){}^tS\cdots.$$

と変形できる。同様に繰り返すと、示すべき等式の左辺は、

$$\begin{aligned}
2^{l}\cdot&\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}(u_1-\frac{m_1-1}{2})\cdots\frac{\partial}{\partial X^{(l)}}(u_l-\frac{m_l-1}{2})\\
&\times{}^tX^{(1,l)}\cdot\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}(v_l-\frac{m_0}{2}){}^tT\cdots{}^t\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}S}(v_1-\frac{m_0}{2})
\end{aligned}$$

と変形できる。今度は、上に示した式の 2 行目で、先頭の方から順に補題 10 (2) を適用していくと、先ほどと同様に変形を進めて、

$$\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}(u_1-\frac{m_1-1}{2})\cdots\frac{\partial}{\partial X^{(l)}}(u_l-\frac{m_l-1}{2})\cdot\frac{\partial}{\partial X^{(l)}}(v_l-\frac{m_{l-1}}{2})\cdots\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}(v_1-\frac{m_0}{2})$$

となる。これは示すべき等式の右辺に等しい。 □

### 3.3 b-関数の計算

以上の結果を用いて、

$$f=\left|(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})\,{}^t(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})\right|$$

の b-関数を計算してみる。下の計算の $(|S|^{s+1}|)$ は、関数 $|S|^{s+1}$ に微分作用素を適用するという意味である。

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}\cdots\frac{\partial}{\partial X^{(l)}}\cdot{}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial X^{(l)}}\right)\cdots{}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}\right)\right|(|S|^{s+1})\\
&\overset{\text{命題 }11}{=}2^{2lm_0}\left|\frac{\bar\partial}{\partial S}(\frac{m_1-m_0-1}{2})\,{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_2-m_0-1}{2})\cdots{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_l-m_0-1}{2})\right.\\
&\qquad\left.\cdot\,{}^tS\cdot\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_{l-1}-m_0}{2})\,{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_{l-2}-m_0}{2})\cdots{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_0-m_0}{2})\right|(|S|^{s+1})\\
&\overset{\text{定理 }1}{=}2^{2lm_0}\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_1-m_0-1}{2})\right|\left|{}^tS\right|\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_2-m_0-1}{2})\right|\cdots\left|{}^tS\right|\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_l-m_0-1}{2})\right|\\
&\qquad\cdot\left|{}^tS\right|\cdot\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_{l-1}-m_0}{2})\right|\left|{}^tS\right|\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_{l-2}-m_0}{2})\right|\cdots\left|{}^tS\right|\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_0-m_0}{2})\right|(|S|^{s+1})
\end{aligned}$$

であるから、順番に $|S|^{s+1}$ に作用させ、対称行列の行列式に対する Capelli 恒等式 (3) を用いると、

$$\begin{aligned}
&2^{2lm_0}\cdot b(s+\frac{m_1-m_0-1}{2})b(s+\frac{m_2-m_0-1}{2})\cdots b(s+\frac{m_l-m_0-1}{2})\\
&\qquad\cdot b(s+\frac{m_{l-1}-m_0}{2})\cdots b(s+\frac{m_1-m_0}{2})\cdot b(s+\frac{m_0-m_0}{2})|S|^s
\end{aligned}$$

になる。ただし、$b(s)$ は、対称行列の行列式の b-関数で、

$$b(s)=(s+1)(s+\frac{3}{2})\cdots(s+\frac{m_0+1}{2})=(s+\frac{m_0+1}{2})^{((m_0))} \tag{8}$$

である。ここに $a^{((n))} = a(a-1/2)\cdots(a-(n-1)/2)$ は 1/2 ずつ減少する下降階乗冪である。よって、$f$ の $b$-関数は、

$$\begin{aligned} b_f(s) &= (s+\frac{m_1}{2})^{((m_0))}(s+\frac{m_2}{2})^{((m_0))}\cdots(s+\frac{m_l}{2})^{((m_0))} \\ &\quad\times(s+\frac{m_{l-1}+1}{2})^{((m_0))}(s+\frac{m_{l-2}+1}{2})^{((m_0))}\cdots(s+\frac{m_0+1}{2})^{((m_0))} \end{aligned}$$

と計算される。

## 4 $\det\Big((X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})Y\,{}^t\!(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})\Big)$ の $b$-関数

対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式 (4) を用いて $b$-関数が計算できる 2 種類の可約概均質ベクトル空間のうち、2 つ目をこの節で計算する。この $b$-関数は Sato-Sugiyama [2] で明示的には計算されていないが、[2] の定理を用いて計算が可能なものである。

$m_1, m_2, \ldots, m_l$ を正整数とするとき、概均質ベクトル空間 $(G, V)$ を、

$$\begin{aligned} &G = GL(m_0)\times GL(m_1)\times\cdots\times GL(m_l), \\ &V = \mathrm{Mat}(m_0, m_1)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Mat}(m_{l-1}, m_l)\oplus\mathrm{Sym}(m_l), \\ &\quad(g_0,\ldots,g_l).(X^{(1)},\ldots,X^{(l)},Y) = (g_0X^{(1)}g_1^{-1},\ldots,g_{l-1}X^{(l)}g_l^{-1},g_lY\,{}^tg_l) \end{aligned}$$

で定める。さらに、すべての $i$ に対して $m_0 \le m_i$ が成立するとき、

$$f = \det\Big((X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})Y\,{}^t\!(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})\Big)$$

は $(G, V)$ の相対不変式になり、その $b$-関数 $b_f(s)$ は

$$b_f(s) = \prod_{r=1}^{l}(s+m_r/2)^{((m_0))}\prod_{r=0}^{l}(s+(m_r+1)/2)^{((m_0))}$$

である。この節の残りで、対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式 (4) を利用して、この $b$-関数を計算する。ただし、必要となる計算は前節とほぼ同様であるため、補題などの証明は省略する。

### 4.1 記号

まず記号を定める。正整数 $m_0, m_1, \ldots, m_l$ は、すべての $i$ に対して $m_i \ge m_0$ を満たすとする。$X^{(i)}$ を独立な変数を成分に持つ $m_{i-1}\times m_i$ 行列とし ($1\le i\le l$)、$Y$ を $Y_{ij} = Y_{ji}$ を満たす変数を成分に持つ $m_l$ 次対称行列とする。$i \le j$ に対して、$X^{(i,j)} = X^{(i)}X^{(i+1)}\cdots X^{(j)}$ と置く。$m_0$ 次対称行列 $S$ を

$$S := X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)}Y\,{}^t\!(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)}) = X^{(1,l)}Y\,{}^tX^{(1,l)}$$

で定める。偏微分作用素の行列については、

$$\frac{\partial}{\partial X^{(r)}} = \left(\frac{\partial}{\partial X_{ij}^{(r)}}\right)_{1\le i\le m_{r-1}, 1\le j\le m_r}$$

であるが、

$$\frac{\bar\partial}{\bar\partial S} = \left(\frac{\bar\partial}{\bar\partial S_{ij}}\right)_{1\le i,j\le m_0} = \left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial S_{ij}}\right)_{1\le i,j\le m_0},$$
$$\frac{\bar\partial}{\bar\partial Y} = \left(\frac{\bar\partial}{\bar\partial Y_{ij}}\right)_{1\le i,j\le m_l} = \left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_{1\le i,j\le m_l}$$

であることに注意する。

$$f = \det({}^tS), \qquad g = \log\det({}^tS)$$

と置き、これまでと同様に、

$$\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u) = \frac{\bar\partial}{\bar\partial S} + u\frac{\bar\partial g}{\bar\partial S} = f^{-u}\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}f^u,$$
$$\frac{\partial}{\partial X^{(r)}}(u) = \frac{\partial}{\partial X^{(r)}} + u\frac{\partial g}{\partial X^{(r)}} = f^{-u}\frac{\partial}{\partial X^{(r)}}f^u,$$
$$\frac{\bar\partial}{\bar\partial Y}(u) = \frac{\bar\partial}{\bar\partial Y} + u\frac{\bar\partial g}{\bar\partial Y} = f^{-u}\frac{\bar\partial}{\bar\partial Y}f^u$$

と置く。

## 4.2 連鎖律と変数変換公式

**補題 12** (連鎖律). 関数 $\phi = \phi(S) = \phi(S_{11}, \ldots, S_{m_0,m_0})$ と、$1 \le r \le l$ に対して、次が成立する。

(1) $\displaystyle \frac{\partial\phi}{\partial X^{(r)}}(u) = 2\cdot {}^tX^{(1,r-1)}\frac{\bar\partial\phi}{\bar\partial S}(u)\,{}^t(X^{(r+1,l)}Y\,{}^tX^{(1,l)})$

(2) $\displaystyle \frac{\bar\partial\phi}{\bar\partial Y}(u) = {}^tX^{(1,l)}\frac{\bar\partial\phi}{\bar\partial S}(u)X^{(1.l)}$

(3) $\displaystyle {}^t\!\left(\frac{\partial\phi}{\partial X^{(r)}}(u)\right) = 2\cdot {}^t(X^{(1,l)}Y\,{}^tX^{(r+1,l)})\frac{\bar\partial\phi}{\bar\partial S}(u)\,{}^tX^{(1,r-1)}$

*Proof.* 補題 9 と同様である。 □

**補題 13.** 次が成立する。

(1) $\displaystyle \frac{\partial}{\partial X^{(r)}}(u - \frac{m_r}{2})\,{}^tX^{(1,r)} = 2\cdot {}^tX^{(1,r-1)}\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u - \frac{m_0+1}{2})\,{}^tS$

(2) $\dfrac{\bar\partial}{\bar\partial Y}(u-\dfrac{m_l}{2})\,{}^t\!(X^{(1.l)}Y) = {}^tX^{(1,l)}\dfrac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u-\dfrac{m_0}{2})\,{}^tS$

(3) ${}^t\!\left(\dfrac{\partial}{\partial X^{(r)}}(u-\dfrac{m_{r-1}}{2})\right)\,{}^t\!(X^{(1,l)}Y\,{}^tX^{(r,l)}) = 2\cdot{}^t\!(X^{(1,l)}Y\,{}^tX^{(r+1,l)})\dfrac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u-\dfrac{m_0}{2})\,{}^tS$

*Proof.* 補題 10 と同様である。 □

**命題 14** (変数変換公式)**.** 次が成立する。

$$
\begin{aligned}
&2^{2l}\cdot\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_1-\frac{m_0}{2})\,{}^tS\cdots{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(u_l-\frac{m_0}{2})\cdot{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(v)\,{}^tS\cdot\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(w_l-\frac{m_0}{2})\,{}^tS\cdots{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(w_1-\frac{m_0}{2})\\
&\quad=\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}(u_1-\frac{m_1-1}{2})\cdots\frac{\partial}{\partial X^{(l)}}(u_l-\frac{m_l-1}{2})\cdot\frac{\bar\partial}{\bar\partial Y}(v-\frac{m_l}{2})\\
&\qquad\times{}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial X^{(l)}}(w_l-\frac{m_{l-1}}{2})\right)\cdots{}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}(w_1-\frac{m_0}{2})\right)
\end{aligned}
$$

*Proof.* 命題 11 と同様である。 □

### 4.3 b-関数の計算

以上の結果を用いて、

$$f=\left|(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})Y\,{}^t\!(X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(l)})\right|$$

の b-関数を計算してみる。下の計算の $(|S|^{s+1}|)$ は、関数 $|S|^{s+1}$ に微分作用素を適用するという意味である。

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}\cdots\frac{\partial}{\partial X^{(l)}}\cdot\frac{\bar\partial}{\bar\partial Y}\cdot{}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial X^{(l)}}\right)\cdots{}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial X^{(1)}}\right)\right|(|S|^{s+1})\\
&\overset{\text{命題 }14}{=}2^{2lm_0}\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_1-m_0-1}{2})\,{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_2-m_0-1}{2})\cdots{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_l-m_0-1}{2})\right.\\
&\quad\cdot{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_l-m_0}{2})\,{}^tS\\
&\quad\left.\cdot\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_{l-1}-m_0}{2})\,{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_{l-2}-m_0}{2})\cdots{}^tS\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_0-m_0}{2})\right|(|S|^{s+1})\\
&\overset{\text{定理 }1}{=}2^{2lm_0}\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_1-m_0-1}{2})\right|\left|{}^tS\right|\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_2-m_0-1}{2})\right|\cdots\left|{}^tS\right|\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_l-m_0-1}{2})\right|\\
&\qquad\cdot\left|{}^tS\right|\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_l-m_0}{2})\right|\left|{}^tS\right|\\
&\qquad\cdot\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_{l-1}-m_0}{2})\right|\left|{}^tS\right|\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_{l-2}-m_0}{2})\right|\cdots\left|{}^tS\right|\left|\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(\frac{m_0-m_0}{2})\right|(|S|^{s+1})
\end{aligned}
$$

であるから、順番に $|S|^{s+1}$ に作用させると、

$$
\begin{aligned}
2^{2lm_0}\cdot b(s+\frac{m_1-m_0-1}{2})b(s+\frac{m_2-m_0-1}{2})\cdots b(s+\frac{m_l-m_0-1}{2})\\
\cdot b(s+\frac{m_l-m_0}{2})\cdot b(s+\frac{m_{l-1}-m_0}{2})\cdots b(s+\frac{m_1-m_0}{2})\cdot b(s+\frac{m_0-m_0}{2})|S|^s
\end{aligned}
$$

になる。ただし、$b(s)$ は、対称行列の行列式の $b$-関数 (8) である。よって、$f$ の $b$-関数は、

$$
\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+\frac{m_1}{2})^{((m_0))}(s+\frac{m_2}{2})^{((m_0))}\cdots(s+\frac{m_l}{2})^{((m_0))}\\
&\times(s+\frac{m_l+1}{2})^{((m_0))}(s+\frac{m_{l-1}+1}{2})^{((m_0))}\cdots(s+\frac{m_0+1}{2})^{((m_0))}
\end{aligned}
$$

と計算される。

# 5 リー環との関係

$\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_{2n}$ または $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_{2n}$ とし、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus(\mathfrak{n}^+ + \mathfrak{n}^-)$ をカルタン分解の複素化とする。$\mathfrak{p}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{n}^+$ を $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数とし、$\lambda:\mathfrak{p}\to\mathbb{C}$ を $\mathfrak{p}$ の 1 次元表現とする。このとき、最高ウェイトが $\lambda$ である一般バーマ加群は

$$M(\lambda):=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}\mathbb{C}_\lambda$$

で定義される。ここに、$\mathbb{C}_\lambda$ は $\lambda$ の表現空間である。ベクトル空間として、$M(\lambda)\simeq U(\mathfrak{n}^-)\simeq\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$ であるから、次の $\mathfrak{g}$ の表現が得られる。

$$U(\mathfrak{g})\overset{\pi_\lambda}{\curvearrowright}\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$$

## 5.1 奇数型 Capelli 恒等式

奇数型 Capelli 恒等式 (2) について、リー環との関係を示す。$\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C})$ とその部分代数を次のように置く。

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_{2n}, && \mathfrak{k}=\left\{\begin{pmatrix}A&0\\0&D\end{pmatrix}\mid A,D\in\mathrm{Mat}(n)\right\}\simeq\mathfrak{gl}_n\oplus\mathfrak{gl}_n,\\
&\mathfrak{n}^+=\left\{\begin{pmatrix}0&B\\0&0\end{pmatrix}\mid B\in\mathrm{Mat}(n)\right\}, && \mathfrak{p}=\left\{\begin{pmatrix}A&B\\0&D\end{pmatrix}\mid A,B,D\in\mathrm{Mat}(n)\right\}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{n}^+,\\
&\mathfrak{n}^-=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\C&0\end{pmatrix}\mid C\in\mathrm{Mat}(n)\right\}.
\end{aligned}
$$

$e_{ij}\in\mathfrak{gl}_{2n}$ を行列単位とし、$\mathfrak{gl}_{2n}$ の対角成分からなる部分代数 $\mathbb{C}e_{11}+\mathbb{C}e_{22}+\cdots+\mathbb{C}e_{2n,2n}$ の基底 $\{e_{ii}\}$ の双対基底を $\{\epsilon_i\}$ と置く。$\mathfrak{p}$ の 1 次元表現は、$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ を用いて、

$$\lambda=\lambda_1(\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n)+\lambda_2(\epsilon_{n+1}+\cdots+\epsilon_{2n})$$

と書ける。$\mathfrak{gl}_{2n}$ が $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$ に作用しているから、各 $\pi_\lambda(e_{ij})$ は、次のように、$\mathfrak{n}^+$ 上の多項式係数微分作用素になる。

**補題 15.** $T_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ を $\mathfrak{n}^+$ の座標関数とすると、次が成立する。

$$\begin{aligned}
\pi_\lambda(e_{ij}) &= -\sum_{k=1}^{n} T_{jk} \frac{\partial}{\partial T_{ik}} + \lambda_1 \delta_{ij}, \\
\pi_\lambda(e_{n+i,n+j}) &= \sum_{k=1}^{n} T_{ki} \frac{\partial}{\partial T_{kj}} + \lambda_2 \delta_{ij}, \\
\pi_\lambda(e_{n+j,i}) &= T_{ij}, \\
\pi_\lambda(e_{i,n+j}) &= -\sum_{k,l=1}^{n} T_{lk} \frac{\partial}{\partial T_{ik}} \frac{\partial}{\partial T_{lj}} + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial}{\partial T_{ij}} \\
&= -\left( \frac{\partial}{\partial T} (\lambda_2 - \lambda_1 - n)\, {}^t T \frac{\partial}{\partial T} \right)_{(i,j)\text{ 成分}}.
\end{aligned}$$

すると、補題 15 の最後の式より、

$$\begin{aligned}
\pi_\lambda(\det(e_{i,n+j})) &= \det(\pi_\lambda(e_{i,n+j}))) \\
&= \left| -\frac{\partial}{\partial T}(\lambda_2 - \lambda_1 - n)\, {}^t T \frac{\partial}{\partial T} \right| = \left| -\frac{\partial}{\partial T}(\lambda_2 - \lambda_1 - n) \right| \left| {}^t T \right| \left| \frac{\partial}{\partial T} \right|
\end{aligned}$$

となるから、

$$\Big[\pi_\lambda(\det(e_{i,n+j}))\Big] (\det(T)^{s+1}) = (-1)^n b(s + \lambda_2 - \lambda_1 - n) b(s) \det(T)^s$$

と計算できる。ここで、上の左辺の $(\det(T)^{s+1})$ は、関数 $\det(T)^{s+1}$ に微分作用素を適用するという意味であり、$b(s) = (s+1)(s+2)\cdots(s+n)$ は、行列式の $b$-関数である。実は、$b(s + \lambda_2 - \lambda_1 - n)$ の因子が、$M(\lambda)$ の既約性と関係することが知られており (例えば、[5, 6, 7])、表現論的に意味のある式が得られたと言える。

まとめると、奇数型 Capelli 恒等式 (2) の $l = 2$ の場合は、(複素) エルミート対称対 $(\mathfrak{gl}_{2n}, \mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n)$ に付随する一般バーマ加群の表現作用素として現れ、この加群の構造に関係していると言える。

## 5.2 対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式

対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式 (4) について、リー環との関係を示す。$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ とその部分代数を次のように置く。

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{Mat}(n), B, C \in \mathrm{Sym}(n)\right\} = \mathfrak{sp}_{2n},\\
\mathfrak{k} &= \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{Mat}(n)\right\} \simeq \mathfrak{gl}_n,\\
\mathfrak{n}^+ &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid B \in \mathrm{Sym}(n)\right\}, \qquad \mathfrak{n}^- = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \mid C \in \mathrm{Sym}(n)\right\},\\
\mathfrak{p} &= \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{Mat}(n), B \in \mathrm{Sym}(n)\right\} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}^+.
\end{aligned}
$$

$e_{ij} \in \mathfrak{gl}_{2n}$ を行列単位とし、$\mathfrak{sp}_{2n}$ の対角成分からなる部分代数 $\mathbb{C}(e_{11}-e_{n+1,n+1})+\mathbb{C}(e_{22}-e_{n+2,n+2})+\cdots+\mathbb{C}(e_{nn}-e_{2n,2n})$ の基底 $\{e_{ii}-e_{n+i,n+i}\}$ の双対基底を $\{\epsilon_i\}$ と置く。$\mathfrak{p}$ の 1 次元表現は、$\lambda_0 \in \mathbb{C}$ を用いて、

$$\lambda = \lambda_0(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n)$$

と書ける。$\mathfrak{sp}_{2n}$ が $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$ に作用しているから、$\mathfrak{sp}_{2n}$ の元は、$\pi_\lambda$ を通して、次のように $\mathfrak{n}^+$ 上の多項式係数微分作用素になる。

**補題 16.** $S_{ij}$ $(1 \le i \le j \le n)$ を $\mathfrak{n}^+$ の座標関数とし、$S_{ji}=S_{ij}$ と置くと、次が成立する。

$$
\begin{aligned}
\pi_\lambda(e_{ij}-e_{n+j,n+i}) &= -2\sum_{k=1}^{n} S_{jk}\frac{\bar\partial}{\bar\partial S_{ik}} + \lambda_0\delta_{ij},\\
\pi_\lambda(e_{n+i,j}+e_{n+j,i}) &= S_{ij},\\
\pi_\lambda(e_{i,n+j}+e_{j,n+i}) &= -4\sum_{k,l=1}^{n} S_{kl}\frac{\bar\partial}{\bar\partial S_{il}}\frac{\bar\partial}{\bar\partial S_{jk}} + 4\lambda_0\frac{\bar\partial}{\bar\partial S_{ij}}\\
&= -4\left(\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(-\lambda_0 - \frac{n+1}{2}){}^tS\frac{\partial}{\partial S}\right)_{(i,j)\text{ 成分}}.
\end{aligned}
$$

すると、補題 16 の最後の式より、

$$
\begin{aligned}
&\pi_\lambda(\det(e_{i,n+j}+e_{j,n+i})) = \det(\pi_\lambda(e_{i,n+j}+e_{j,n+i}))\\
&\qquad = \left|-4\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(-\lambda_0-\frac{n+1}{2}){}^tS\frac{\partial}{\partial S}\right| = \left|-4\frac{\bar\partial}{\bar\partial S}(-\lambda_0-\frac{n+1}{2})\right|\left|{}^tS\right|\left|\frac{\partial}{\partial S}\right|
\end{aligned}
$$

となるから、これを $\det({}^tS)^{s+1}$ に適用すると、

$$\left[\pi_\lambda(\det(e_{i,n+j}+e_{j,n+i}))\right](\det({}^tS)^{s+1}) = (-4)^n b(s-\lambda_0-\frac{n+1}{2})b(s)\det({}^tS)^s$$

と計算できる。ここに、$b(s) = (s+1)(s+3/2)\cdots(s+(n-1)/2)$ は、対称行列の行列式の $b$-関数 (8) である。先と同様に、$b(s-\lambda_0-\frac{n+1}{2})$ の因子が、$M(\lambda)$ の既約性と関係することが知られている (例えば、[5, 6, 7])。

まとめると、対称行列版の奇数型 Capelli 恒等式 (4) の $l=2$ の場合は、(複素) エルミート対称対 $(\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{gl}_n)$ に付随する一般バーマ加群の表現作用素として現れ、この加群の構造に関係していると言える。

## 参考文献


[1] Roger Howe and Tōru Umeda. The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions. *Math. Ann.*, 290(3):565–619, 1991.

[2] Fumihiro Sato and Kazunari Sugiyama. Multiplicity one property and the decomposition of $b$-functions. *Internat. J. Math.*, 17(2):195–229, 2006.

[3] H. W. Turnbull. Symmetric determinants and the Cayley and Capelli operators. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, 8:76–86, 1948.

[4] Akihito Wachi. Logarithmic derivative and Capelli identities. 数理解析研究所講究録に掲載予定.

[5] Akihito Wachi. Contravariant forms on generalized Verma modules and $b$-functions. *Hiroshima Math. J.*, 29(1):193–225, 1999.

[6] Akihito Wachi. Capelli type identities on certain scalar generalized Verma modules. *J. Math. Kyoto Univ.*, 40(4):705–727, 2000.

[7] Akihito Wachi. Capelli type identities on certain scalar generalized Verma modules. II. *J. Math. Soc. Japan*, 56(2):447–473, 2004.