

A generalized Cartan decomposition for spherical 4-symmetric spaces*

東海大学・理学部・数学科 笹木 集夢
Atsumu SASAKI
Department of Mathematics,
Tokai University†

1 導入

G_C を連結な複素単純リー群とし, H_C をその簡約な複素閉部分群とする. G_C のコンパクト実型 G_u の複素等質空間 G_C/H_C への作用に関して, 次の問題を考える:

問題 1.1. 複素等質空間 G_C/H_C における G_u の作用が強可視的であるような組 (G_C, H_C) を分類せよ.

リー群 L の連結な複素多様体 D における正則な作用が強可視的であるとは, 次の (V.1)–(S.2) を満たすスライス $S \subset D$ と D 上の反正則微分同相写像が存在することをいう (cf. [5, Definition 3.3.1])¹:

$$D = L \cdot S, \tag{V.1}$$

$$\sigma|_S = \text{id}_S, \tag{S.1}$$

$$\sigma(x) \in L \cdot x \quad (\forall x \in D). \tag{S.2}$$

(G_C, H_C) が半単純対称対のとき, カルタン分解 $G_C = G_u A H_C$ を満たす可換群 $A \simeq \mathbb{R}^{\text{rank}_{\mathbb{R}} G_C/H_C}$ の構成が知られており ([2]), これより $S = A H_C/H_C$ がスライスとなる (第 5.1 節で解説する). 特に, G_u の作用は強可視的であることが示される [5, Theorem 11]. 一方で, 複素対称空間は spherical である, つまり, G_C のボレル部分群は G_C/H_C 内に開軌道をもつ. このとき, 最高ウェイト理論により, G_C/H_C 上の (代数多様体としての) レギュラー関数全体 $\mathbb{C}[G_C/H_C]$ は G_C の重複のない表現である. さらに, その逆も正しい ([16]).

小林俊行によって提唱された複素多様体における可視的作用の概念は, これまで散在的に発見された無重複表現に対して統一的理解を与えるという研究において幾何学的十分条件として重要な役割を果たす. この理論と [16] を用いると, spherical でない G_C/H_C は G_u の作用において可視的ではないことが分かる. よって, 問題 1.1 は非対称かつ spherical な場合が本質的である.

*京都大学数理解析研究所研究集会「表現論と非可換調和解析の展望」(研究代表者: 木本一史氏, 京都大学数理解析研究所, 2012 年 6 月 19 日–22 日) における講究録.

†E-mail: atsumu@tokai-u.jp

¹オリジナルの定義 [5, Definition 3.3.1] では, 条件 (V.1) は $L \cdot S$ が D の開集合となっているが, 本講究録では強い条件で定義する.

現在, 非対称かつ spherical な複素等質空間に対する本研究も進展中である. 非コンパクトエルミート対称空間 G/K の複素化 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ を底空間とする直線束 $G_{\mathbb{C}}/[K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}]$ が G_u の作用で強可視的であるための必要十分条件として, G/K が非管状型であることを示した [11]. G/K が非管状型であることと $G_{\mathbb{C}}/[K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}]$ が spherical であることは同値である [9]. また, $SO(8, \mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$ に対しても研究を行った [15].

一方, 2009年度の本研究集会では, $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}) = (SL(2n+1, \mathbb{C}), Sp(n, \mathbb{C}))$ に対する研究結果を報告させていただいた (論文 [12], 講義録 [13]). この $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は spherical 等質空間である. 一方で, 対称空間ではないが 4-対称空間とよばれる対称空間の概念を拡張した空間であることが知られている. 本講義録では 4-対称空間という構造に注目し, 問題 1.1 に対する研究結果を報告する.

以下, spherical な複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は非対称な 4-対称空間とする. 実際には, 同型を除いて表 1 にある 3 種類のいずれかに一致することが知られている.

Case	$G_{\mathbb{C}}$	$H_{\mathbb{C}}$	$K_{\mathbb{C}}$
1	$SL(2n+1, \mathbb{C})$	$Sp(n, \mathbb{C})$	$GL(2n, \mathbb{C})$
2	$Sp(n+1, \mathbb{C})$	$SO(2, \mathbb{C}) \times Sp(n, \mathbb{C})$	$Sp(1, \mathbb{C}) \times Sp(n, \mathbb{C})$
3	$SO(2n+1, \mathbb{C})$	$GL(n, \mathbb{C})$	$SO(2n, \mathbb{C})$

表 1: 複素リー群の組 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$

本講義録の主定理は次で与えられる.

定理 1.2. 複素リー群の組 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ を表 1 のいずれかとする. このとき,

$$G_{\mathbb{C}} = G_u A H_{\mathbb{C}} \quad (1.1)$$

を満たす $A \subset G_{\mathbb{C}}$ として次を選ぶことができる:

$$A \simeq \begin{cases} \mathbb{R} \cdot \underbrace{\mathbb{T} \cdots \mathbb{T}}_{n-1} \cdot \mathbb{R}^n & (\text{Case 1}) \\ \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} & (\text{Case 2}) \\ \mathbb{R} \cdot \underbrace{\mathbb{T} \cdots \mathbb{T}}_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot \mathbb{R}^{[\frac{n}{2}]} & (\text{Case 3}). \end{cases} \quad (1.2)$$

複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が対称空間の場合は (1.1) はカルタン分解に他ならない. この意味で, (1.1) を複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に対する一般化されたカルタン分解とよぶことにする.

定理 1.2 によって,

$$S = A H_{\mathbb{C}} / H_{\mathbb{C}} \quad (1.3)$$

とおくと, 定理 1.2 は複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は G_u の作用によって

$$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = G_u \cdot S \quad (1.4)$$

と分解されることを示している. よって, (V.1) を満たす. 実際に, 次の定理が証明される.

定理 1.3. 複素リー群の組 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ を表 1 のいずれかとする. このとき, $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実型 G_u は複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に強可視的に作用する.

これまでの研究により, spherical な複素等質空間はコンパクト実型が可視的に作用することが予想されており, 多くの例で肯定的に解決されている.

2 4-対称空間

2.1 4-対称空間の定義と例

まずは, n -対称空間について解説する. G をリー群とし, H をその閉部分群とする. このとき, 等質空間 G/H が n -対称空間であるとは, $(G^\tau)_0 \subset H \subset G^\tau$ を満たす G の位数 n の自己同型写像 τ が存在するときをいう. ただし, G^τ は G の τ による固定部分群, $(G^\tau)_0$ は G^τ の単位元成分を表す. $n=2$ のときは通常の対称空間に他ならない.

例 2.1. リー群 L に対して G を L の n 個の直積 $G = L \times \cdots \times L$ とし $H = \text{diag}(L)$ とすると, G/H は n -対称空間である. 実際, $(g_1, g_2, \dots, g_n) \in G$ に対して $\tau(g_1, g_2, \dots, g_n) = (g_2, g_3, \dots, g_1)$ とすると $H = G^\tau$ となる.

例 2.2. G をリー群 L の直積 $G = L \times L$ とする. リー群 L 上の対合的自己同型 θ (特に位数 2) に対して, $\tau(g_1, g_2) := (g_2, \theta(g_1))$ で定義する ($g_1, g_2 \in L$). このとき, τ は位数 4 である. よって, $H = G^\tau$ とすると, G/H は 4-対称空間となる.

例 2.3. Spherical な 3-対称空間 G/H として, 次が知られている.

- (1) $(G, H) = (SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}), \text{diag}(SL(2, \mathbb{C})))$ (例 2.1 参照). G/H が spherical であることは [1] で示された.
- (2) $(G, H) = (Spin(8, \mathbb{C}), G_2(\mathbb{C}))$. ここで, $G_2(\mathbb{C})$ は連結かつ単連結な複素単純リー群でそのリー環が G_2 型のもを指す. G, H のリー環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とする. このとき, $\text{Aut } \mathfrak{g} / \text{Int } \mathfrak{g} \simeq \mathbb{Z}_3$ である. よって, $\mathfrak{spin}(8, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}(8, \mathbb{C})$ の位数 3 の外部自己同型を単連結 $Spin(8, \mathbb{C})$ に持ち上げたものを τ とすると, $H = G^\tau$ となる. 実際, $Spin(8, \mathbb{C}), G_2(\mathbb{C})$ は

$$Spin(8, \mathbb{C}) \simeq \{(g_1, g_2, g_3) \in SO(\mathbb{O}_\mathbb{C})^3 : (gx)(gy) = \kappa g(xy) \ (\forall x, y \in \mathbb{O}_\mathbb{C})\},$$

$$G_2(\mathbb{C}) := \text{Aut}(\mathbb{O}_\mathbb{C}) = \{g \in SO(\mathbb{O}_\mathbb{C}) : (gx)(gy) = g(xy) \ (\forall x, y \in \mathbb{O}_\mathbb{C})\}$$

と実現することができる. このとき, $\tau(g_1, g_2, g_3) := (g_2, g_3, g_1)$ ($(g_1, g_2, g_3) \in Spin(8, \mathbb{C})$) が 3-対称空間を与える位数 3 の自己同型である. ただし, $\mathbb{O}_\mathbb{C}$ は八元数 (ケーリー代数) \mathbb{O} の複素化 $\mathbb{O} + \sqrt{-1}\mathbb{O}$ を表す. また, 八元数の共役を ρ で表すとき, $\kappa g := \rho g \rho$ ($g \in SO(\mathbb{O}_\mathbb{C})$) で定義した. なお, $G_2(\mathbb{C})$ は $SO(8, \mathbb{C})$ の閉部分群であり, G/H は等質空間 $SO(8, \mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$ の 2 重被覆空間であるが, $SO(8, \mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$ は 3-対称空間ではない².

命題 2.4. 表 1 にある $(G_\mathbb{C}, H_\mathbb{C})$ に対して, 等質空間 $G_\mathbb{C}/H_\mathbb{C}$ は非対称な 4-対称空間である.

既約リーマン 4-対称空間は Jiménez [3] によって分類され, 例 2.1 と例 2.2 および $G_\mathbb{C}$ が単純の場合 (46 系列) が存在する. 命題 2.4 は [3] の分類リストから分かるが, ここではカルタン分解の一般化 (定理 1.2) を考えることが目的の 1 つであるので, 実際に位数 4 の自己同型を実現する.

なお, 定理 1.2 および命題 2.4 は群 $G_\mathbb{C}, H_\mathbb{C}$ の実現の仕方によらないことに注意する.

n 次対称行列 I_n^a および $2n$ 次交代行列 J_n^a を

$$I_n^a := \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad J_n^a := \begin{pmatrix} & & & -I_n^a \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ I_n^a & & & \end{pmatrix}$$

² $SO(8, \mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$ における $SO(8)$ の作用は強可視的作用である. その証明には, $Spin(8, \mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$ における $Spin(8)$ の作用から誘導される (論文 [15] 参照). ただし, 3-対称空間の構造は用いていない.

とする。これらを用いて、複素直交群 $SO(n, \mathbb{C})$ および複素シンプレクティック群 $Sp(n, \mathbb{C})$ をそれぞれ次で定義する：

$$\begin{aligned} SO(n, \mathbb{C}) &:= \{g \in SL(n, \mathbb{C}) : {}^t g I_n^a g = I_n^a\}, \\ Sp(n, \mathbb{C}) &:= \{g \in SL(2n, \mathbb{C}) : {}^t g J_n^a g = J_n^a\}. \end{aligned}$$

この実現によって、リー環のカルタン部分代数が対角行列として実現でき、後の証明を行いやすい (例えば、後述の補題 6.1 や注意 6.2 参照)。

Proof. I_1, I_2, I_3 を次で定義する：

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & J_n^a & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & J_n^a & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} & & & -I_n^a \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ I_n^a & & & \end{pmatrix}.$$

このとき、

$$I_1^2 = I_{1,2n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -I_{2n} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad I_2^2 = I_{1,2n,1} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & -I_{2n} & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad I_3^2 = -I_{n,1,n} \quad (2.1)$$

に注意する。特に、各 j に対して I_j^4 は単位行列である。

複素リー群の組 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ が Case j のときに、 $G_{\mathbb{C}}$ 上の自己同型 θ を次で定義する：

$$\theta(g) := I_j^{-1} {}^t g^{-1} I_j \quad (g \in G_{\mathbb{C}}). \quad (2.2)$$

このとき、(2.1) により θ^2 は対合的自己同型となる。特に、 θ は位数 4 の自己同型である。さらに、直接計算によって θ による固定部分群 $G_{\mathbb{C}}^{\theta}$ が $H_{\mathbb{C}}$ に一致することも確かめられる。 \square

2.2 4-対称空間のファイバー束の構造

リー群 G に対し、 G/H は 4-対称空間であるとする。 τ を $(G^{\tau})_0 \subset H \subset G^{\tau}$ を満たす位数 4 の自己同型とする。このとき、 $\tau^2 = \tau \circ \tau$ は対合的である。よって、 $K = (G^{\tau^2})_0$ とすると G/K は対称空間である。さらに、 τ の K への制限 $\tau|_K$ は K の対合的自己同型となる。このとき、 $(K^{\tau})_0 \subset H \subset K^{\tau}$ を満たすので、 K/H も対称空間である。よって、底空間、ファイバーともに対称空間となるファイバー束が得られた：

$$K/H \rightarrow G/H \rightarrow G/K.$$

表 1 にある複素リー群の組 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ に対して、 $K_{\mathbb{C}}$ は表 1 の第 4 列で与えられる。

3 定理 1.2 の証明の方針

本章では、spherical な 4-対称空間に対する一般化されたカルタン分解 (1.1) を与える方法について解説する。引き続き前章で準備した記号を用いる。

Step 1 (底空間およびファイバーに対するカルタン分解). 底空間 G_C/K_C およびファイバー K_C/H_C はともに対称空間であったことに注意しよう. 対称空間に対するカルタン分解はリー環論によって与えられる ([2], また第 5.1 節参照).

まず, 底空間 G_C/K_C に対して,

$$G_C = G_u A_1 K_C \quad (3.1)$$

となる $A_1 \simeq \mathbb{R}^{\text{rank}_{\mathbb{R}} G_C/K_C}$ を構成する.

次に, $K_u := K_C \cap G_u$ とする. このとき, K_u は K_C の極大コンパクト部分群となる. この設定の下で, 底空間の場合と同様にファイバーに対するカルタン分解

$$G_C = K_u A_2 H_C \quad (3.2)$$

を与える. 特に, $A_2 \simeq \mathbb{R}^{\text{rank}_{\mathbb{R}} K_C/H_C}$ である.

Step 2. ここで, M_1 を K_u における A_1 の中心化群, M_2 を $H_C \cap K_u$ における A_2 の中心化群とし, 両側剰余類分解 $M_1 \backslash K_u / M_2$ を考える. 表 1 のいずれの場合でも (K_u, M_1) , (K_u, M_2) はどちらも対称空間ではない (第 5.3 節参照). 一方で, 次の補題が $M_1 \backslash K_u / M_2$ の代表系を与える手助けとなる.

補題 3.1. コンパクト等質空間 K_u/M_1 への M_2 -作用は, ある実ベクトル空間内の単位球面への M_2 -作用と同型である.

補題 3.1 により, 単位球面の M_2 -軌道分解を考えることにより,

$$K_u = M_1 A_3 M_2 \quad (3.3)$$

を満たす A_3 を構成する.

Step 3. これまでに得られた 3 つの分解 (3.1)–(3.3) を ‘編み上げて’ いく ([6]):

$$\begin{aligned} G_C &= G_u A_1 K_C & (\because (3.1)) \\ &= G_u A_1 (K_u A_2 H_C) & (\because (3.2)) \\ &= G_u A_1 (M_1 A_3 M_2) A_2 H_C & (\because (3.3)) \\ &= G_u M_1 A_1 A_3 A_2 M_2 H_C & (\because A_1 M_1 = M_1 A_1, A_2 M_2 = M_2 A_2) \\ &= G_u (A_1 A_3 A_2) H_C. & (\because M_1 \subset G_u, M_2 \subset H_u \subset \dot{H}_C) \end{aligned}$$

以上より, $A := A_1 A_3 A_2$ が定理 1.2 の (1.1) を満たす.

4 両側剰余類分解 $U(m-1) \backslash U(m) / SU(2)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \times U(\varepsilon)$

本章では,

$$(L, L_1, L_2) := (U(m), U(m-1), SU(2)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \times U(\varepsilon))$$

に対して, 両側剰余類分解 $L_1 \backslash L / L_2$ の代表系を与える. ただし, $L_2 = SU(2)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \times U(\varepsilon)$ は $n = 2k+1$ のときは $SU(2)^k \times U(1)$ とし $m = 2k$ のときは $SU(2)^k$ と約束する.

は L_2 -同変であることに注意する。ここで、 L_2 の S^{2m-1} の作用は、 \mathbb{C}^m への作用

$$L_2 \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m, \quad ((g_1, \dots, g_{[m/2]}, (\alpha)), \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}) \mapsto \begin{pmatrix} g_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_m \end{pmatrix} \\ g_2 \begin{pmatrix} v_2 \\ v_{m-1} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ g_{[m/2]} \begin{pmatrix} v_{[m/2]} \\ v_{m-[m/2]+1} \end{pmatrix} \\ (\alpha v_{[m/2]+1}) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

を S^{2m-1} へ制限したものとて得られる。ただし、式中の (α) および $(\alpha v_{[m/2]+1})$ は m が奇数のときのみ適用する。

これにより、まず S^{2m-1} を L_2 -軌道に分解することを考察する。 \mathbb{C}^m の $[\frac{m+1}{2}]$ 次元実部分空間 $T_0 = \mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_{[\frac{m+1}{2}]}$ に対して、 $T := T_0 \cap S^{2m-1}$ とする。このとき、 $T \simeq S^{[\frac{m+1}{2}]}$ と同一視される。

補題 4.1. $S^{2m-1} = L_2 \cdot T$.

Proof. 式 (4.2) から、 \mathbb{C}^m における L_2 -作用は \mathbb{C}^2 における $SU(2)$ -作用の直積と \mathbb{C} における $U(1)$ -作用 (m が奇数のときのみ適用) から構成されている。それぞれの作用によって、

$$\mathbb{C}^2 = SU(2) \cdot \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = U(1) \cdot \mathbb{R}$$

と表されるので、 \mathbb{C}^m は (4.2) によって $\mathbb{C}^m = L_2 \cdot T_0$ と分解される。 $S^{2m-1} = S^{2m-1} \cap \mathbb{C}^m$ から、

$$S^{2m-1} = L_2 \cdot (T_0 \cap S^{2m-1}) = L_2 \cdot T.$$

□

4.3 $U(m-1) \backslash U(m) / SU(2)^{[\frac{m}{2}]} \times U(\varepsilon)$

補題 4.1 を用いて、両側剰余類分解を考えよう。

等質空間 K/L_1 を L_2 -軌道分解しよう。各 $j = 1, 2, \dots, [\frac{m-1}{2}]$ に対して、

$$B_j := \exp \mathbb{R}(E_{j+1,j} - E_{j,j+1}) \simeq SO(2) \simeq \mathbb{T} \quad (4.3)$$

とする。これらを用いて、 $L = U(m)$ の部分集合 B を次で定める：

$$B = B_1 B_2 \cdots B_{[\frac{m-1}{2}]} = \{b_1 b_2 \cdots b_{[\frac{m-1}{2}]} : b_j \in B_j\} \simeq \underbrace{\mathbb{T} \cdots \mathbb{T}}_{[\frac{m-1}{2}]} \quad (4.4)$$

なお、 $B_j B_{j+1} \neq B_{j+1} B_j$ から B は群ではないことに注意する。このとき、微分同相 (4.1) を経由して次の微分同相が導かれる：

$$B^{-1} L_1 / L_1 \simeq T.$$

ただし, $B^{-1} := \{b^{-1} : b \in B\}$ である. よって, 補題 4.1 から等質空間 L/L_1 は L_2 -作用によって

$$L/L_1 = L_2 \cdot (B^{-1}L_1/L_1)$$

と分解される.

上の分解は次の群の分解定理

$$L = L_2 B^{-1} L_1$$

を表す. L, L_1, L_2 はすべて群であることから, $L^{-1} = L$ などが成り立つ. 以上より, 次の定理を得た.

定理 4.2. $L = L_1 B L_2$.

定理 4.2 は後の補題 5.3 で用いる.

5 定理 1.2 の証明

本章では, 定理 1.2 の証明を第 3 章で述べた方針に沿って行う. まず, 対称空間に対するカルタン分解について解説した後 (第 5.1 節), 我々の設定に対して適用する (第 5.2 節). 次に, 両側剰余類分解 $M_1 \backslash K / M_2$ を定理 4.2 を用いて代表系を与える (第 5.3 節).

5.1 対称空間に対するカルタン分解

非コンパクト対称空間に対するカルタン分解について論文 [2] に沿って説明するために, 本節に限り G を連結な非コンパクト半単純リー群, θ を G 上の対合的自己同型とし, G の閉部分群 H を $(G^\theta)_0 \subset H \subset G^\theta$ を満たすものとする.

G のカルタン対合 μ を θ と可換となるように選ぶ. $K = G^\mu$ とすると K は G の極大コンパクト部分群となる.

3つのリー群 G, H, K のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ とする. 対合的自己同型 θ, μ の微分も同じ記号を用いる. $\mu\theta = \theta\mu$ より, $\mu\theta$ は G 上の対合的自己同型となる. ここで, $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}^{\mu\theta}$ とすると \mathfrak{g} の非コンパクトな実型を得る. このとき, θ は \mathfrak{g}_0 のカルタン対合となる. θ に対応する \mathfrak{g}_0 のカルタン分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^\theta + \mathfrak{g}_0^{-\theta}$ において,

$$\mathfrak{g}_0^{-\theta} = \mathfrak{g}^{\mu\theta, -\theta} = \mathfrak{g}^{-\theta, -\mu} := \{X \in \mathfrak{g} : (-\theta)X = (-\mu)X = X\}.$$

\mathfrak{a}_0 を $\mathfrak{g}_0^{-\theta} = \mathfrak{g}^{-\theta, -\mu}$ の極大可換部分空間とし, $A := \exp \mathfrak{a}_0$ とする.

補題 5.1 ([2]). $G = KAH$.

可換群 A の次元を $\dim A = \text{rank}_{\mathbb{R}} G/H = \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0$ と表し, これを対称空間 G/H の実階数という. なお, (G, H) が複素 (半単純) 対称対のとき, 複素対称空間の実階数 $\text{rank}_{\mathbb{R}} G/H$ は対称空間の階数 $\text{rank} G/H$ に一致する.

5.2 定理 1.2 の証明: Step 1

定理 1.2 の証明に戻ろう. 複素リ一群の組 (G_C, H_C) は表 1 のいずれかとする. 対称空間 G_C/K_C に対するカルタン分解 (3.1) における A_1 , および対称空間 K_C/H_C に対するカルタン分解 (3.2) の A_2 は前節の方法で構成される. 特に, 次を得る.

補題 5.2. (1) $\text{rank}_{\mathbb{R}} G_C/K_C = \text{rank } G_C/K_C = 1$.³

$$(2) \text{rank}_{\mathbb{R}} K_C/H_C = \text{rank } K_C/H_C = \begin{cases} n & (\text{Case 1}) \\ 1 & (\text{Case 2}) \\ \lfloor n/2 \rfloor & (\text{Case 3}) \end{cases}$$

補題により, $A_1 \simeq \mathbb{R}$ であり, $A_2 \simeq \mathbb{R}^{\text{rank } K_C/H_C}$ が得られた.

5.3 定理 1.2 の証明: Step 2

次に, A_3 を構成しよう. そのために, まず K_u/L_1 が単位球面に L_2 が作用するコンパクト多様体として同型であることを見よう (補題 3.1).

Proof. 各 (G_C, H_C) に対して, M_1 および M_2 は以下で与えられる. これより, 補題 3.1 が従う. \square

Case	K_u	M_1	M_2	N
1	$U(2n)$	$U(2n-1)$	$SU(2)^n$	$4n-1$
2	$Sp(1) \times Sp(n)$	$SU(2) \times Sp(n-1)$	$Sp(n)$	$4n-1$
3	$SO(2n)$	$SO(2n-1)$	$SU(2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times U(\varepsilon)$	$2n-1$

表 3: M_1 と M_2

補題 5.3. $K_u = M_1 A_3 M_2$ を満たす A_3 として次を選ぶことができる:

$$A_3 = \begin{cases} B_1 B_2 \cdots B_{n-1} & (\text{Case 1}) \\ \{I\} & (\text{Case 2}) \\ \iota(B_1 B_2 \cdots B_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}) & (\text{Case 3}). \end{cases} \quad (5.1)$$

ただし, 各 B_j は (4.3) で定義した群, ι は包含写像 $U(n) \hookrightarrow SO(2n)$ を表す.

Proof. 各 (G_C, H_C) に対して個別に議論を行う.

Case 1 の場合, $(K_u, M_1, M_2) = (U(2n), U(2n-1), SU(2)^n)$ である. よって, 定理 4.2 を $m = 2n$ の場合に適用すればよい.

Case 2 の場合, $(K_u, M_1, M_2) = (Sp(1) \times Sp(n), Sp(1) \times Sp(n-1), Sp(n))$ である. このとき, 積写像

$$M_1 \times M_2 \rightarrow K_u, \quad ((g_1, g_2), h) \mapsto (g_1, g_2 h)$$

³複素 4-対称空間に対して, 底空間の実階数が 1 であることはそれが spherical であるための必要条件ではない. 実際に, 接空間が $\mathfrak{f}_4(\mathbb{C})/(\mathfrak{so}(6, \mathbb{C}) + \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}))$ で与えられるものは 4-対称空間であるが spherical ではない. 一方, 底空間の接空間が $\mathfrak{f}_4(\mathbb{C})/\mathfrak{so}(9)$ であるため $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{f}_4(\mathbb{C})/\mathfrak{so}(9) = 1$ となる.

は全射である。よって、 $K_u = M_1 M_2$ となる。

Case 3 の場合、 $(K_u, M_1, M_2) = (SO(2n), SO(2n-1), SU(2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times U(\varepsilon))$ である。ここで、包含写像 $\iota: U(n) \hookrightarrow SO(2n)$ は M_2 -同変で次の微分同相を誘導する：

$$U(n)/U(n-1) \simeq SO(2n)/SO(2n-1) \simeq S^{2n-1}.$$

特に、 i は M_2 上で恒等的であることに注意する。よって、定理 4.2 を $m = n$ の場合に適用することにより、積写像 $M_2 \times B \times U(n-1) \rightarrow U(n)$ は全射である。ゆえに、 $\iota(M_2) \times \iota(B) \times SO(2n-1) \rightarrow SO(2n)$ も全射である。 $\iota(M_2) = M_2$ から補題が従う。□

5.4 定理 1.2 の証明

Proof. Steps 1–3 によって、 $A := A_1 A_3 A_2$ とすれば分解 (1.1) が得られる。また、 A が (1.2) で与えられることは補題 5.2 および補題 5.3 より分かる。□

注意 5.4. (1.2) の次元はファイバー $K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の (実) 階数の約 2 倍である。実際に、 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}) = (SL(2n+1, \mathbb{C}), Sp(n, \mathbb{C}))$, $(Sp(n+1, \mathbb{C}), SO(2, \mathbb{C}) \times Sp(n, \mathbb{C}))$, $(SO(4n+1, \mathbb{C}), GL(2n, \mathbb{C}))$ の場合、 $\dim A = \text{rank } K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が成り立つ。また、 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}) = (SO(4n+1, \mathbb{C}), GL(2n, \mathbb{C}))$ のとき、 $\dim A = \text{rank } K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} + 1$ となる。

6 定理 1.3 の証明

最後に、定理 1.3 の証明を与えよう。

定理 1.2 によって、 $S = AH_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = G_u \cdot S$ を満たす。よって、(S.1) および (S.2) を満たす反正則微分同相 σ の存在を議論する。

6.1 正規実型と対合的自己同型

3 つの複素リー群 $G_{\mathbb{C}} \supset K_{\mathbb{C}} \supset H_{\mathbb{C}}$ のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{k} \supset \mathfrak{h}$ とする。特に、4-対称空間を実現する $\theta \in \text{Aut}(G_{\mathbb{C}})$ ((2.2) 参照) に対してその微分も同じ記号を用いると、 $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{\theta^2}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\theta}$ と表される。

反正則対合 $\mu \in \text{Aut}(G_{\mathbb{C}})$ を $\theta\mu = \mu\theta$ かつ $G_u = G_{\mathbb{C}}^{\mu}$ を満たすように選ぶ。複素リー環 \mathfrak{g} の実型 $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}^{\mu\theta^2}$ は θ^2 をカルタン対合にもつ。よって、 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^{\theta^2} + \mathfrak{g}_0^{-\theta^2}$ は \mathfrak{g}_0 のカルタン分解を与える。特に、 $\mathfrak{g}_0^{\theta^2} = \mathfrak{g}^{\mu, \theta^2}$, $\mathfrak{g}_0^{-\theta^2} = \mathfrak{g}^{-\mu, -\theta^2}$ である。

可換性 $\theta\mu = \mu\theta$ から、 $\mu|_{K_{\mathbb{C}}}$ は $K_{\mathbb{C}}$ 上の対合的自己同型を定める。特に、反正則である。複素リー群 $K_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実型を $K_u := K_{\mathbb{C}} \cap G_u$ となるように選ぶと、 $K_u = K_{\mathbb{C}}^{\mu}$ となる。よって、 \mathfrak{g} に対する議論と同様に \mathfrak{k} に対しても適用することで、非コンパクト実型 $\mathfrak{k}_0 := \mathfrak{k}^{\mu\theta}$ のカルタン分解 $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0^{\theta} + \mathfrak{k}_0^{-\theta}$ を得る。なお、 $\mathfrak{k}^{\mu} = \mathfrak{g}^{\mu, \theta^2}$ である。また、

$$\mathfrak{k}_0^{-\theta} = \mathfrak{k}^{-\theta, -\mu} = \mathfrak{g}^{\theta^2, -\theta, -\mu} = \mathfrak{g}^{-\theta, -\mu}$$

である。

次の補題は定理 1.3 の証明の本質的な部分である。

補題 6.1. 複素リー群の組 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ を表 1 のいずれかとする。このとき、次の条件を満たす反正則対合 $\sigma \in \text{Aut}(G_{\mathbb{C}})$ が存在する：

- (a) σ は θ, μ と互いに可換である.
- (b) $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}^\sigma = \text{rank } \mathfrak{g}$.
- (c) $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0^\sigma = \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0$.
- (d) $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}^\sigma = \text{rank } \mathfrak{k}$.
- (e) $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}_0^\sigma = \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}_0$.

Proof. 各 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ に対して表 4 を満たすものを選ばばよい. □

Case	\mathfrak{g}^σ	\mathfrak{g}_0	\mathfrak{g}_0^σ	\mathfrak{k}^σ	\mathfrak{k}_0	\mathfrak{k}_0^σ
1	$\mathfrak{sl}(2n+1, \mathbb{R})$	$\mathfrak{su}(1, 2n)$	$\mathfrak{so}(1, 2n)$	$\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{u}^*(2n)$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$
2	$\mathfrak{sp}(n+1, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(1, n)$	$\mathfrak{u}(1, n)$	$\mathfrak{sp}(1, \mathbb{R}) + \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{su}(1, 1) + \mathfrak{sp}(n)$	$\mathfrak{so}(1, 1) + \mathfrak{u}(n)$
3	$\mathfrak{so}(n, n+1)$	$\mathfrak{so}(1, 2n)$	$\mathfrak{so}(1, n)$	$\mathfrak{so}(n, n)$	$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$

表 4: 補題 6.1 を満たす $G_{\mathbb{C}}$ 上の反正則対合 σ

注意 6.2. (1) 可換性に関する補題 6.1 の条件 (a) は, σ を各リー群に制限したものが再び対合的自己同型になることを保証している.

- (2) 補題 6.1 は, 命題 2.4 の証明において用いた各リー群の実現の場合は, いずれも

$$\sigma(g) = \bar{g} \quad (g \in G_{\mathbb{C}}) \tag{6.1}$$

で与えられる.

- (3) 複素リー環 \mathfrak{g} に対して, その実型 \mathfrak{g}' が $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}' = \text{rank } \mathfrak{g}$ を満たすとき, \mathfrak{g}' を正規実型という. 複素単純リー環の正規実型は同型を除いて一意である. よって, 補題 6.1 で選んだ σ は, 共役を除いて一意に定まる.

6.2 4-対称空間上の反正則微分同相

$G_{\mathbb{C}}$ 上の反正則対合 σ を補題 6.1 を満たすように選ぶ. 可換性の条件 (a) から, $H_{\mathbb{C}}$ は σ -安定である. よって, 4-対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上の反正則微分同相が次で定まる:

$$\sigma(g \cdot o) := \sigma(g) \cdot o \quad (g \in G_{\mathbb{C}}).$$

ただし, $o := eH_{\mathbb{C}} \in G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ とする.

6.3 定理 1.3 の証明

以上の準備の下で, spherical な 4-対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ における $G_{\mathbb{u}}$ の作用が強可視的であることを示そう (定理 1.3).

Proof. 第5.2節で選んだ $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ は, 対称空間に対するカルタン分解の一般論(補題5.1)によってそれぞれ $\mathfrak{g}^{-\theta^2, -\mu}, \mathfrak{g}^{-\theta, -\mu}$ の極大可換部分空間として選んだ. 特に, 2つの極大可換部分空間はコンパクト実型によって共役であることに注意する.

ここで, 補題6.1の条件(c)と(e)によって, この $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ はより小さい空間 $(\mathfrak{g}^\sigma)^{-\theta^2, -\mu}, (\mathfrak{g}^\sigma)^{-\theta, -\mu}$ の極大可換部分空間として選べることを保証している. よって, $\sigma|_{A_1} = \text{id}_{A_1}, \sigma|_{A_2} = \text{id}_{A_2}$.

また, 第4章で構成した集合 B ((4.4) 参照) は $SO(n)$ の部分集合である. ここで, 正規実型を実現する σ は $U(n)^\sigma \simeq SO(n)$ であるから, 第5.3節と合わせて $\sigma|_{A_3} = \text{id}_{A_3}$ を得る.

いま, 上で選び直した A_1, A_2 に対して, 改めて $A = A_1 A_3 A_2, S = AH_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ とする. このとき, 上の議論から $\sigma|_A = \text{id}_A$ である. よって, $a \cdot o \in S$ ($a \in A$) に対して,

$$\sigma(a \cdot o) = \sigma(a) \cdot o = a \cdot o.$$

ゆえに, $\sigma|_S = \text{id}_S$ となり (S.1) が確認された.

(S.2) は次のように確かめられる. 任意の $x \cdot o \in G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ を分解(1.4)に沿って $x \cdot o = g \cdot (a \cdot o)$ と表す ($g \in G_u, a \in A$). このとき, $g \cdot (a \cdot o) = (ga) \cdot o$ に注意すると,

$$\sigma(x \cdot o) = \sigma(ga) \cdot o = \sigma(g)\sigma(a) \cdot o = \sigma(g)a \cdot o = \sigma(g)g^{-1} \cdot (x \cdot o).$$

ここで, G_u は補題6.1における可換性の条件(a)から σ -安定である. よって, $\sigma(g)g^{-1} \in G_u$ である. したがって, 上の式は $\sigma(x \cdot o) \in G_u \cdot (x \cdot o)$ であることを示している.

以上より, 定理1.3が示された. □

参考文献

- [1] M. Brion, Classification des espaces homogènes sphériques, *Compositio Math.* **63** (1987), 189–208.
- [2] M. Flensted-Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case, *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 106–146.
- [3] J. Jiménez, Riemannian 4-symmetric spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **306** (1988), 715–734.
- [4] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta. Appl. Math.* **81** (2004), 129–146.
- [5] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.
- [6] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)) \backslash U(n) / (U(p) \times U(q))$, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 669–691.
- [7] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform. Groups* **12** (2007), 671–694.
- [8] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, *preprint*, arXiv: math.RT/0607004.

- [9] M. Krämer, Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, *Composito Math.* **38** (1979), 129–153.
- [10] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* **18** (2009) 3445–3466.
- [11] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, *Geom. Dedicata* **145** (2010), 151–158.
- [12] A. Sasaki, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n + 1) \backslash SL(2n + 1, \mathbb{C}) / Sp(n, \mathbb{C})$, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **17** (2010), 201–215.
- [13] 笹木集夢, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n + 1) \backslash SL(2n + 1, \mathbb{C}) / Sp(n, \mathbb{C})$, 京都大学数理解析研究所講究録 **1722** 「等質空間と非可換調和解析」 (eds. 和地輝仁氏, 西山亨氏) (2010), 20–30.
- [14] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2011), 885–929.
- [15] A. Sasaki, Visible actions on the non-symmetric homogeneous space $SO(8, \mathbb{C}) / G_2(\mathbb{C})$, *Adv. Pure Appl. Math.* **2** (2011), 437–450.
- [16] É. Vinberg, B. Kimelfeld, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, *Funct. Anal. Appl.* **12** (1978), 168–174.