数理解析研究所講究録
第 1826 巻 2013 年 153-162

Congruences of modular forms and the Iwasawa λ-invariants
(保型形式の合同式と岩澤 λ 不変量)

東京大学・数理科学研究科　平野　雄一 (Yuichi Hirano)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

0. 序論

本稿では、講演で述べさせて頂いた次の問題に関する結果とその証明の方法についてより詳しく記述する。

$\boxed{\text{問題}}$ 重さが 2 以上の場合に、カスプ形式 f と Eisenstein 級数 G の Fourier 係数の合同式からそれらに伴う L 関数の特殊値の (代数的部分の) 間に合同式が成り立つのか:

$$a(n,f)\equiv a(n,G)(\mathrm{mod} p)\Longrightarrow L(*,f)\equiv L(*,G)(\mathrm{mod} p).$$

この問題の背景には特別なカスプ形式に伴う Galois 表現の岩澤主予想がある。カスプ形式と Eisenstein 級数の Fourier 係数が合同という条件は、Galois 表現の言葉でいえば、カスプ形式に伴う Galois 表現が剰余して可約という条件に対応する。そのため、上の問題の応用として、このようなカスプ形式の p 進 L 関数と久保田–Leopoldt p 進 L 関数の 2 つの積の間の合同式を導くことができる。その結果として、このような特別なカスプ形式の岩澤主予想が (p 冪を除いて) 正しいということがわかる。この結果は重さが 2 の場合の Greenberg 氏及び Vatsal 氏の結果 [Gre–Vat] の部分的な一般化となる。

1 章では、カスプ形式 f に伴う Galois 表現 ρ_f が剰余して可約な場合に、p 進カスプ形式と p 進パラボリックコホモロジーの関係を与える定理を紹介する (定理 1.4)。これは、整 p 進 Hodge 理論を用いて証明される深い定理である。Galois 表現 ρ_f が剰余して既約な場合は、$k<p$ 及びレベル N が p と素という仮定のもとで、定数係数でない開多様体の p 進 Hodge 理論を用いた証明が知られている [Fa–Jo]。定理 1.4 により、カスプ形式の標準的周期 (Vatsal の意味 [Vat] で) Ω_f^{α} が定義され、保型 L 関数の特殊値をコホモロジー的かつ代数的に捉えることができる。

2 章では, Stevens 氏の結果 [Ste2] の一般化を紹介する。具体的には、重さ $k\geq 2$ の一般の保型形式に伴う 1-コサイクルを定義し、その性質を紹介する (命題 2.5)。重さが 2 の場合には、Stevens 氏は Schoenberg 氏のコサイクルを用いて議論している。また, Stevens 氏により, このコサイクルが重さが一般の場合や Hilbert 保型形式の場合にも構成できることが期待されていた [Ste1]。

3 章では、Vatsal 氏の結果 [Vat] の一般化を紹介する。これが本稿の主定理である。正規化された重さ $k\geq 2$ の Hecke 固有カスプ形式 $f=\sum_{n=1}^{\infty}a(n,f)\exp(2\pi inz)$ と重さ $k\geq 2$ の Eisenstein 級数 $G=\sum_{n=0}^{\infty}a(n,G)\exp(2\pi inz)$ が各 $n\geq 0$ に対し、Fourier 係数の間の合同式 $a(n,f)\equiv a(n,G)(\mathrm{mod}\ \varpi^r)$ をみたすとき、保型 L 関数の特殊値の間に合同式が成り立つことを紹介する (定理 3.1)。証明で重要なことは、保型形式 G の L 関数をコサイクル π_G の像の線形和で表すことにより、定理 1.4 に帰着させることである。

また、この結果の応用として、カスプ形式に伴う Galois 表現が剰余可約な場合の岩澤主予想がある。Vatsal 氏の合同式 [Vat] を用いることで、Greenberg 氏と Vatsal 氏はある特別な楕円曲線の岩澤主予想を証明している [Gre–Vat]。同様のアイデアで、定理 3.1 及び、加藤氏の岩澤主予想における結果 [Kato] を用いると、次を示すことができる。

定理 0.1. 記号は上の通りとする。1.4 節で述べる条件 (RR-unr) 及び φ を p で分岐する偶指標、ψ を p で不分岐な奇指標であることを仮定する。このとき、代数的岩澤 λ 不変量と解析的岩澤 λ 不変量が一致する:

$$\lambda_f^{\mathrm{alg}}=\lambda_f^{\mathrm{anal}}.$$

特に、このような f における岩澤主予想は p 冪を除いて正しい。

この定理の仮定は Greenberg 氏及び Vatsal 氏の結果 [Gre–Vat] と同等のものである。この定理については本稿ではこれ以上説明しない。詳しくは、[Hi] を参照。

注意 0.2. カスプ形式に伴う Galois 表現が剰余既約な場合は、適当な条件のもとで岩澤主予想が正しいことが加藤氏 [Kato]、Skinner 氏と Urban 氏によって知られている。

記号 本稿では、p は奇素数とする。さらに、自然数 $N \geq 4$ は p と素であるとする。有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ 及び、p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する。また、埋め込み

$$\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p \hookrightarrow \mathbb{C}$$

を固定する。R を実数体 $\mathbb{R}$ の部分環とするとき、

$$\mathrm{GL}_n^+(R) = \{M \in \mathrm{GL}_n(R) \mid \det(M) > 0\}$$

とおく。$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を上半平面とし、$\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ とおく。$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ は $\mathfrak{H}$ と $\mathfrak{H}^*$ に通常の分数変換によって作用する。本稿で興味のある合同部分群は次である。

$$\Gamma_0(N) = \left\{\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \bmod N\right\},$$
$$\Gamma_1(N) = \left\{\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \middle| a \equiv d \equiv 1 \bmod N\right\}.$$

k を正の整数とする。$\mathfrak{H}$ 上の関数 f と $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ に対し、$\mathfrak{H}$ 上の関数 $f|\gamma$ を

$$f|\gamma(z) = \det(\gamma)^{k-1} f(\gamma(z))(cz+d)^{-k}.$$

で定義する。$M_k(\Gamma_1(N), \mathbb{C})$ (resp. $S_k(\Gamma_1(N), \mathbb{C})$) を重さ k、レベル $\Gamma_1(N)$ の保型形式 (resp. カスプ形式) の空間とする。ε: $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を modulo N の Dirichlet 指標とする。指標 ε 付きの保型形式及びカスプ形式のなす空間を各々

$$M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C}) = \left\{f \in M_k(\Gamma_1(N), \mathbb{C}) \middle| f|\gamma = \varepsilon(d) f,\ {}^\forall\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)\right\},$$
$$S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C}) = M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C}) \cap S_k(\Gamma_1(N), \mathbb{C})$$

とおく。$M_k(\Gamma_1(N), \mathbb{C}) = \bigoplus_{\varepsilon:(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}} M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C})$ の形に分解され、これらの空間は $\mathbb{C}[[\exp(2\pi i z)]]$ の部分空間とみなすことができる。$\mathbb{C}$ の部分環 A に対し、

$$M_k(\Gamma_1(N), A) = M_k(\Gamma_1(N), \mathbb{C}) \cap A[[\exp(2\pi i z)]],$$
$$S_k(\Gamma_1(N), A) = S_k(\Gamma_1(N), \mathbb{C}) \cap A[[\exp(2\pi i z)]],$$
$$M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, A) = M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C}) \cap A[[\exp(2\pi i z)]],$$
$$S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, A) = S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C}) \cap A[[\exp(2\pi i z)]].$$

とおく。これらの空間は自然に Hecke 加群となる。また、保型性より、$\varepsilon(-1) \neq (-1)^k$ のとき $M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C}) = 0$ であることに注意する。

可換環 R と非負な整数 n に対し、$L_n(R) = \mathrm{Sym}_R^n(RX \oplus RY)$ を係数を R とする 2 変数 X, Y 多項式の n 次の斉次多項式全体とする。半群 $\Sigma = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ の $L_n(R)$ への作用を

$$\gamma \cdot P(X, Y) = P((X, Y)\det(\gamma)^t\gamma^{-1})$$

で定める。R が $\mathbb{Q}$-代数のときは、Σ の $L_n(R)$ への作用を

$$\gamma \star P(X, Y) = P((X, Y)^t\gamma^{-1})$$

で定める。同様に、$\mathbb{Q}$-代数に対し、$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ の $L_n(R)$ への作用が定まり、それを $\star$ とかく。以下、余因子行列を単に $\alpha^\iota = \det(\alpha)\alpha^{-1}$ とかく。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上では両者は一致していることに注意する。

$\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to R^\times$ を指標とし、

$$\Delta = \left\{\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}) \middle| \det(\alpha) \neq 0, c \equiv 0 \pmod N, (d, N) = 1\right\}$$

とおく。左 $R[\Delta]$ 加群 $L_{k-2}(\varepsilon, R)$ を次で定義する：$L_{k-2}(\varepsilon, R)$ を R 加群としては $L_{k-2}(R)$ で $R[\Delta]$ の左作用を $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Delta$ に対し、

$$\gamma \bullet P(X, Y) = \varepsilon(d)\gamma \cdot P(X, Y)$$

で定める。これらを係数とする群コホモロジーは保型形式の空間と関係がある。

1. 保型形式とコホモロジーの関係

1.1. パラボリックコホモロジーの定義. この節では、次数 1 の群コホモロジーとパラボリックコホモロジーの定義を復習する。これらは保型形式の空間と関係のあるコホモロジーである。

定義 1.1. R を可換環、$\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を合同部分群、M を左 $R[\Gamma]$ 加群とする。$C^i = C^i(\Gamma, M)$ を、$i \geq 1$ のとき、Γ^i 上の関数で M に値をとるもの全体とし、$i = 0$ のときは、M とする。各 $i = 0$、1 に対し、$d^i : C^i \to C^{i+1}$ を

$$d^0 u(\gamma) = (\gamma - 1)u \quad (u \in M),$$
$$d^1 u(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 u(\gamma_2) - u(\gamma_1\gamma_2) + u(\gamma_1)$$

で定義する。i-コサイクル全体及び i-コバウンダリー全体を各々

$$Z^i(\Gamma, M) = \ker(d^i : C^i \to C^{i+1}),$$
$$B^i(\Gamma, M) = \mathrm{im}(d^{i-1} : C^{i-1} \to C^i)$$

とおく。M を係数とする Γ 上のコホモロジー群は

$$H^i(\Gamma, M) = Z^i(\Gamma, M)/B^i(\Gamma, M)$$

で定義される。

各カスプ $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して、Γ_s を s の固定部分群

$$\Gamma_s = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma s = s\} = \{\pm\pi_s^m \in \Gamma \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

とする。但し、π_s はその生成元とする。$Z(\Gamma)$ を $\Gamma\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ の完全代表系とする。これは有限集合である。

$$Z^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, M) = \{u \in Z^1(\Gamma, M) \mid u(\pi_s) \in (\pi_s - 1)M \quad ({}^\forall s \in Z(\Gamma))\}$$

とおく。M を係数とする Γ 上のパラボリックコホモロジーは

$$H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, M) = Z^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, M)/B^1(\Gamma, M)$$

で定義される。

1.2. **Hecke 作用素.** この節では、1.1 節で定義した群コホモロジー上の Hecke 作用素の定義を簡単に復習する。詳しくは [Hida, 6.3 節] を参照。

定義 1.2. $\Gamma = \Gamma_0(N)$ もしくは $\Gamma_1(N)$ とおく。$\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ に対し、$\Gamma\alpha\Gamma = \coprod_i \Gamma\alpha_i$ に分解する。M を序論で紹介した加群のいずれかとする。$H^1(\Gamma, M)$ 上の作用素 $[\Gamma\alpha\Gamma]$ を次で定義する：各 $\gamma \in \Gamma$ に対し、$\alpha_i\gamma = \gamma_i\alpha_j$ をみたす j と $\gamma_i \in \Gamma$ が定まる。このとき、コサイクル $u : \Gamma \to M \in Z^1(\Gamma, M)$ に対し、$v = u\big|[\Gamma\alpha\Gamma]$ を $v(\gamma) = \sum_i \alpha_i^\iota u(\gamma_i)$ で定義する。$[\Gamma\alpha\Gamma]$ は代表元の取り方によらず、$H^1(\Gamma, M)$ 上の作用を与える。さらに、$[\Gamma\alpha\Gamma]$ は $H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, M)$ 上の作用を自然に誘導する。各素数 l に対し、$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$ のとき、$[\Gamma\alpha\Gamma]$ を T_l とかき、これを Hecke 作用素という。同様に、N と素な素数 l に対し、$\alpha = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$ のとき、$\langle l \rangle$ とかき、diamond 作用素という。一般の正の整数に対しても、これらの作用素が定義される。

1.3. **複素数体 $\mathbb{C}$ 上の Eichler–志村同型.** この節では、古典的な場合の Eichler–志村同型の復習をする。この同型により、古典的な場合には、カスプ形式の空間とパラボリックコホモロジーの間の関係が与えられる。

定理 1.3 (Eichler–志村). 次の Hecke 加群としての同型

$$S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C}) \oplus S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C})^c \cong H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_0(N), L_{k-2}(\varepsilon, \mathbb{C}))$$

が存在する。但し、$S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C})^c = \{\overline{f(z)} \mid f(z) \in S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C})\}$ であり、$\bar{}$ は複素共役とする。この同型射は具体的に与えられていて、例えば、$f \in S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C})$ に対応するコサイクルは基点 $z_0 \in \mathfrak{H}^*$ に対し、

$$\omega_f(\gamma) = \int_{z_0}^{\gamma z_0} f(z)(X - zY)^{k-2} dz$$

で表すことができる。このコホモロジー類 $[\omega_f]$ は基点 $z_0 \in \mathfrak{H}^*$ によらない。

1.4. **整数環 $\mathcal{O}$ 上の Eichler–志村同型の類似に関する結果.** この節では、1.3 節で述べた古典的な Eichler–志村同型の p 進類似を考える。整数環上では、コホモロジーの捩じれ部分が存在しうるので一般には難しい。しかし、カスプ形式に伴う Galois 表現やカスプ形式の重さに関して適当な条件をつけると、整 p 進 Hodge 理論を用いてコホモロジーの捩じれ部分がないことやその階数も調べることができる。

$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次拡大の整数環、ϖ を素元とする。カスプ形式 $f = \sum_n a(n, f)\exp(2\pi i n z) \in S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathcal{O})$ を正規化された Hecke 固有関数とする。

$$\rho_f\colon\ \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(T_f) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$$

を Deligne 氏によって構成された f に伴う Galois 表現とする ([Del])。これは次の性質をみたす。

(1) ρ_f は素数 $l \nmid Np$ で不分岐である。
(2) $\mathrm{Tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_l)) = a(l, f)$ が素数 $l \nmid Np$ に対して成り立つ。
(3) $\det(\rho_f(\mathrm{Frob}_l)) = \varepsilon(l) l^{k-1}$ が素数 $l \nmid Np$ に対して成り立つ。

κ を $\mathcal{O}$ の剰余体とする。以下、f は p-ordinary(つまり、$(p, a(p, f)) = 1$) 及び剰余表現 $\bar{\rho}_f$: $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\kappa)$ が可約を仮定し、

(RR-unr) $$\bar{\rho}_f \sim \begin{pmatrix} \varphi & * \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$$

と表したとき、$\varphi, \psi\colon G_{\mathbb{Q}} \to \kappa^\times$ のいずれかが p で不分岐であることを仮定する。これらの条件をまとめて、(RR-unr) とかく。

定理 1.4. $k<p$ 及び (RR-unr) を仮定する。$\mathfrak{M}_f$ を $T_l - a_l(f)$ 及び $\langle d\rangle - \varepsilon(d)d^{k-2}$ で生成される $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(S_k(\Gamma_1(N),\mathcal{O}))$ のイデアルとする。このとき、ある $\alpha \in \{\pm 1\}$ が存在し、各正の整数 n に対し、

$$\mathcal{O}/\varpi^n \simeq H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(N), L_{k-2}(\mathcal{O}/\varpi^n))^{\alpha}[\mathfrak{M}_f],$$
$$\mathcal{O} \simeq H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(N), L_{k-2}(\mathcal{O}))^{\alpha}[\mathfrak{M}_f]$$

が成り立つ。但し、$H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(N), L_{k-2}(\mathcal{O}))^{\alpha} = \{\pi \in H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(N), L_{k-2}(\mathcal{O})) \mid \pi|[\Gamma_1(N)j\Gamma_1(N)] = \alpha(-1)^{k-1}\pi\}$ は複素共役 $j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ による固有空間の α 部分とする。

この定理の主張は、f と Hecke 固有値がすべて同じコサイクル全体が整数環 $\mathcal{O}$ 上階数 1 であり、特にコホモロジーに捩じれ部分がないことである。

注意 1.5. (1) 定理 1.3 で述べた Eichler–志村同型と q 展開原理を用いると、各 $\alpha \in \{\pm 1\}$ に対し、$\mathbb{C} \simeq H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(N), L_{k-2}(\mathbb{C}))^{\alpha}[\mathfrak{M}_f]$ が成り立つ。そのため、この定理 1.4 は古典的な Eichler–志村同型の p 進類似とみなせる。
(2) f に伴う Galois 表現が剰余して既約な場合は、各 $\alpha \in \{\pm 1\}$ に対し、定理 1.4 の主張が成り立つことが知られている。これは重複度 1 定理と呼ばれ、重さが 2 の場合は Wiles 氏 [Wil]、重さが $k \geq 2$ の場合は Faltings 氏と Jordan 氏 [Fa–Jo] によって知られている。

この定理 1.4 の証明の方針としては、定数係数の整 p 進 Hodge 理論 ([Br],[Br–Me]) を用いるために、モジュラー曲線上の定数でない係数付きコホモロジーと久賀・佐藤多様体を特異点解消した定数係数のコホモロジーの間の同型を構成することである。エタールコホモロジーの間の同型については、[Del]、[Sch2]、[Sch3] が参考になる。de Rham コホモロジーの間の同型については、[Sch1] が参考になる。これらは体上での結果であるが、$k<p$ を仮定すると、整数環上でも正しいことがわかる。このコホモロジーの間の比較ができると、(RR-unr) の条件のもとでフィルトレーションを調べることにより、定理 1.4 を得ることができる。詳しくは、[Hi] を参照。

2. コホモロジーと保型 L 関数の特殊値の関係

2.1. 保型 L 関数の周期. この節では、定理 1.3 と定理 1.4 を用いて保型 L 関数の周期をコホモロジー的に定義する。これによって、保型 L 関数の特殊値を代数的にも扱うことができる。

定義 2.1. 定理 1.4 より、生成元 $[\delta_f^{\alpha}] \in H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(N), L_{k-2}(\mathcal{O}))^{\alpha}[\mathfrak{M}_f] \simeq \mathcal{O}$ がとれる。このとき、$[\delta_f^{\alpha}]$ と $[\omega_f^{\alpha}]$ は $H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(N), L_{k-2}(\mathbb{C}))^{\alpha}[\mathfrak{M}_f] \simeq \mathbb{C}$ の元とみなせる。但し、$[\omega_f^{\alpha}]$ は複素共役による固有空間の α 部分への ω_f の像とする。よって、ある複素数 $\Omega_f^{\alpha} \in \mathbb{C}^{\times}$ が存在して、

$$[\omega_f^{\alpha}] = \Omega_f^{\alpha}[\delta_f^{\alpha}]$$

とかける。この複素数を（Vatsal 氏の意味 [Vat] で）標準的周期という。これは生成元 $[\delta_f^{\alpha}]$ の選び方によるが、p 進単数を除いて一意に定まる。

2.2. 保型 L 関数の Mellin 変換公式. この節では、一般の保型形式に対し、Mellin 変換を定義する。保型形式 $h \in M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C})$ と原始的 Dirichlet 指標 χ で導手 m_{χ} が N と素なものをとる。これらに対し、

$$(h \otimes \chi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,h)\,\chi(n)\exp(2\pi i n z)$$

とおく。Dirichlet 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n,h)\chi(n)n^{-s}$$

は $\mathrm{Re}(s) > k$ で絶対収束し、全 s 平面において有理型関数に解析接続される。これを $L(h,\chi,s)$ とかく。χ が自明な指標の場合は単に $L(h,s)$ とかく。

定義 2.2. Mellin 変換 $D(h,\chi,s)$ を

$$
\begin{aligned}
D(h,\chi,s) &= \int_0^{i\infty} \widetilde{(h\otimes\chi)}(z)(X-zY)^{k-2}\mathrm{Im}(z)^{s-1}dz \\
&= \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j} i^{j+1}\Gamma(s+j)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{s+j} L(h,\chi,s+j)X^{k-2-j}(-Y)^j
\end{aligned}
$$

で定義する。但し、$\widetilde{h}(z) = h(z) - a(0,h)$ 及び $i = \sqrt{-1}$ とする。

積分値 $D(G,\chi,s)$ は $\mathrm{Re}(s) > k$ において絶対収束し、全 s 平面に有理型関数に解析接続され、$s = -(k-2),\cdots,-1,0$ 及び $2,3,\cdots,k$ において 1 位の極をもちうる。

我々は、保型 L 関数 $L(h,\chi,s)$ の $s = 1,\cdots,k-1$ での特殊値に興味がある。これらの値は Mellin 変換 $D(h,\chi,s)$ の $s=1$ での特殊値の各係数である。

2.3. コサイクルの定義及びその性質. 2.2 節で定義した Mellin 変換 $D(h,\chi,s)$ をコホモロジー的に調べるために、重さ 2 の場合には、Stevens 氏はある特別なコサイクルを用いた ([Ste1],[Ste2])。この節では、そのコサイクルを重さについて一般化した定義を述べ、Mellin 変換 $D(h,\chi,s)$ との関係を述べる。

定義 2.3. $h \in M_k(\Gamma_0(N),\varepsilon,\mathbb{C})$ とする。$\alpha,\beta \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ 及び基点 $z_0 \in \mathfrak{H}$ に対し、

$$
\pi_{h,\beta}(z_0)\colon \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) \longrightarrow L_{k-2}(\mathbb{C})
$$

を

$$
\begin{aligned}
&\pi_{h,\beta}(z_0)(\alpha) \\
&\quad = \int_{z_0}^{\alpha z_0} (h|\beta)(z)\beta\star(X-zY)^{k-2}dz \\
&\qquad + \int_{z_0}^{i\infty} \widetilde{(h|\beta\alpha)}(z)\beta\alpha\star(X-zY)^{k-2}dz - a(0,h|\beta\alpha)\int_0^{z_0}\beta\alpha\star(X-zY)^{k-2}dz \\
&\qquad - \int_{z_0}^{i\infty} \widetilde{(h|\beta)}(z)\beta\star(X-zY)^{k-2}dz + a(0,h|\beta)\int_0^{z_0}\beta\star(X-zY)^{k-2}dz
\end{aligned}
$$

で定義する。この右辺は絶対収束し、基点 $z_0 \in \mathfrak{H}$ の選び方によらないことがわかる。そのため、$\pi_{h,\beta} = \pi_{h,\beta}(z_0)$ とかく。また、$\beta = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の場合は、$\pi_{h,\beta}$ を単に π_h とかく。

注意 2.4. h がカスプ形式の場合は、各 $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ 対し、

$$
\pi_h(z_0)(\alpha) = \int_{i\infty}^{\alpha i\infty} h(z)(X-zY)^{k-2}dz
$$

となる。さらに、$h \in S_k(\Gamma_1(N),\mathbb{C})$ ならば、$\pi_h \in Z^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(N),L_{k-2}(\mathbb{C}))$ である。また、$h \in S_k(\Gamma_0(N),\varepsilon,\mathbb{C})$ ならば、$\pi_h \in Z^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_0(N),L_{k-2}(\varepsilon,\mathbb{C}))$ である。これらは定理 1.3 で述べた Eichler–志村コサイクルである。

次に、このコサイクルの性質を述べる。

命題 2.5. (1) $h \in M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C})$ 及び χ を原始的 Dirichlet 指標で導手 m_χ が N と素とする。$b_1, \cdots, b_{\phi(m_\chi)} \in \mathbb{Z}$ を $\{\bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_{\phi(m_\chi)}\} = (\mathbb{Z}/m_\chi\mathbb{Z})^\times$ をみたすものとする。但し、ϕ は Euler 関数とする。このとき、

$$\tau(\bar{\chi})D(h, \chi, 1) = -\sum_{i=1}^{\phi(m_\chi)} \bar{\chi}(b) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_i}{m_\chi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \star \pi_{h, \begin{pmatrix} 1 & b_i \\ 0 & m_\chi \end{pmatrix}}(\sigma),$$

が成り立つ。但し、$\tau(\bar{\chi}) = \sum_{j=1}^{\phi(m_\chi)} \bar{\chi}(b_j)\exp(2\pi i b_j/m_\chi)$ は $\bar{\chi}$ の Gauss 和とする。

(2) (*i*) $h \in M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathbb{C})$ と素数 l に対し、$h' = h|T_l = \lambda(l, h)h$ とおく。このとき、$[\pi_{h'}] = \lambda(l, h)[\pi_h]$ が成り立つ。

(*ii*) $G \in M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathcal{O})$ を Hecke 固有関数とし、$\lambda(n, G)$ を T_n の固有値とする。r を非負な整数とする。$k < p+1$, $a(0, G) \equiv 0 \pmod{\varpi^r}$ 及び $\pi_G(\Gamma_0(N)) \subset L_{k-2}(\varepsilon, \mathcal{O})$ を仮定する。このとき、各 n に対し、

$$\pi_G|T_n = \lambda(n, G)\pi_G$$

が $L_{k-2}(\varepsilon, \mathcal{O}/\varpi^r)$ の中で成り立つ。

(3) S を次の性質をみたす素数からなる集合とする。

(*i*) m は $(m, pN) = 1$ をみたす。

(*ii*) $(p, cd) = 1$ をみたす各整数の組 (c, d) に対し、$S \cap \{d + cpNr \mid r \in \mathbb{Z}\} \neq \phi$ をみたす。

このような集合 S に対し、$\mathfrak{X}_S$ を Dirichlet 指標 χ で導手 m_χ が S に属するもの全体とする。$G \in M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathcal{O})$ が次の性質をみたすとする。

(*a*) $k < p+1$,

(*b*) 各 $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し、$a(0, G|\alpha) \in \mathcal{O}$,

(*c*) 各 $\chi \in \mathfrak{X}_S$ に対し、$\tau(\bar{\chi})D(G, \chi, 1) \in L_{k-2}(\varepsilon, \mathcal{O}[\chi])$,

(*d*) $\pi_G(\sigma) \in L_{k-2}(\varepsilon, \mathcal{O})$.

このとき、

$$\pi_G(\Gamma_0(N)) \subset L_{k-2}(\varepsilon, \mathcal{O})$$

が成り立つ。

注意 2.6. 命題 2.5(3) は Stevens 氏の結果 [Ste2, 定理 1.3] の部分的な一般化である。これにより、コサイクルの像を保型 L 関数の特殊値で決定することができる。

注意 2.7. $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}$ を仮定 (RR-unr) で与えた指標の持ち上げとする ($i = 1, 2$)。Eisenstein 級数 $G = G(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathcal{O})$ で

$$L(G, s) = L(s, \widetilde{\psi})L(s-k+1, \widetilde{\varphi})$$

をみたすものをとる。このような指標から持ち上げた Eisenstein 級数に対し、$(p, m_\psi) = 1$ のとき、命題 2.5(3) の仮定がみたされる。

3. 主定理及び証明の概略

3.1. 主定理.

本稿の主定理を述べる。

定理 3.1. r を正の整数とする。k を正の整数で $k < p$ をみたすとする。$f = \sum_{n=0}^{\infty} a(n, f) \exp(2\pi i n z) \in S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathcal{O})$ を正規化された Hecke 固有カスプ形式で p-ordinary とする。さらに次の 2 つを仮定する：

(1) N と素な素数 l で $a(l, f) \not\equiv \varepsilon(l) + l^{k-1} \pmod{\varpi^r}$ をみたすものが存在する。

(2) Eisenstein 級数 $G \in M_k(\Gamma_0(N), \varepsilon, \mathcal{O})$ で命題 2.5(3) の仮定及び、各 $n \geq 0$ に対し、保型形式の Fourier 係数の間の合同式 $a(n, f) \equiv a(n, G) \pmod{\varpi^r}$ をみたすものが存在する。

このとき、ある p 進単数 $u \in \mathcal{O}^\times$ が存在し、任意の原始的 Dirichlet 指標 χ で導手 m_χ が pN と素なものに対し, 各々の Mellin 変換の特殊値 $\tau(\bar{\chi})\frac{D(f,\chi,1)^\alpha}{\Omega_f^\alpha}, \tau(\bar{\chi})D(G,\chi,1)^\alpha$ が $L_{k-2}(\varepsilon,\mathcal{O}[\chi])$ に属し、次の合同式

$$\tau(\bar{\chi})\frac{D(f,\chi,1)^\alpha}{\Omega_f^\alpha} \equiv u\tau(\bar{\chi})D(G,\chi,1)^\alpha \pmod{\varpi^r}$$

が成り立つ。但し、$\alpha = \varepsilon\chi(-1)$ とする。また、上の記号の定義については下記の命題-定義 3.3 を参照。

特に主定理より、保型 L 関数の特殊値の間の合同式が得られたことになる。

注意 3.2. Dirichlet 指標 χ の導手 m_χ が p で割れる場合には、この等式は $Y = 0$ とすれば正しいことが同様の証明により確認できる。つまり、$s = 1$ での保型 L 関数の特殊値の間の合同式を導くことができる。岩澤主予想への応用のためには、導手 m_χ が p で割れる場合の合同式が必要となる。

3.2. 定理 3.1 の証明の概略. この節では主定理の証明の概略を説明する。以下、記号は 3.1 節と同じとし、$m = m_\chi$ とおく。命題 2.5(1) の式を定理 3.1 の仮定を用いて具体的に計算すると、次の命題を得る。

命題-定義 3.3. 命題 2.5(1) で述べた各 b_i に対し、$a_i, c_i, h \in \mathbb{Z}$ を

$$\gamma_{b_i} = \begin{pmatrix} a_i & b_i p^h \\ c_i p^h N & m \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

及び $p^h \in \varpi^r\mathcal{O}$ をみたすようにとる。

(1) 定理 3.1 の条件 (2) を仮定する。このとき、$L_{k-2}(\varepsilon,\mathcal{O}/\varpi^r[\chi])$ において、合同式

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\phi(m)} \bar{\chi}(b_i)\pi_G^\alpha(\gamma_{b_i}) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 + \alpha\chi(-1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^\iota\right) \bullet \tau(\bar{\chi})D(G,\chi,1) \\
&= \frac{\tau(\bar{\chi})}{2}\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\left(1+\alpha\varepsilon\chi(-1)(-1)^j\right) j!\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{j+1} L(G,\chi,j+1)X^{k-2-j}Y^j
\end{aligned}$$

が成り立つ。この右辺を $\tau(\bar{\chi})D(G,\chi,1)^\alpha$ とおく。

(2) 定理 3.1 の条件 (1) を仮定する。このとき、$L_{k-2}(\varepsilon,\mathcal{O}/\varpi^r[\chi])$ において、合同式

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\phi(m)} \bar{\chi}(b_i)\delta_f^\alpha(\gamma_{b_i}) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 + \alpha\chi(-1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^\iota\right) \bullet \tau(\bar{\chi})\frac{D(f,\chi,1)}{\Omega_f^\alpha} \\
&= \frac{\tau(\bar{\chi})}{2}\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\left(1+\alpha\varepsilon\chi(-1)(-1)^j\right) j!\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{j+1} \frac{L(f,\chi,j+1)}{\Omega_f^\alpha}X^{k-2-j}Y^j
\end{aligned}$$

が成り立つ。この右辺を $\tau(\bar{\chi})\frac{D(f,\chi,1)^\alpha}{\Omega_f^\alpha}$ とおく。

注意 3.4. (1) は定理 3.1 の条件 (2) の仮定より、G の定数項が modulo ϖ^r で消えていることから従う。

(2) では、定理 3.1 の条件 (1) の仮定のもとで、Greenberg 氏と Stevens 氏による議論 [Gre–Ste, 補題 6.9.b] によって、$\omega_f^\alpha/\Omega_f^\alpha(\Gamma_0(N)) \subset L_{k-2}(\varepsilon, \mathcal{O}[\chi])$ となることを用いている。

この命題を用いて主定理を証明する。

定理 1.4 及び命題 2.5(2) より、ある p 進単数 $u \in \mathcal{O}^\times$ が存在し、

$$\left[\frac{\omega_f^\alpha}{\Omega_f^\alpha}\right] = u[\pi_G^\alpha]$$

とかける。つまり、ある $Q(X,Y) \in L_{k-2}(\varepsilon, \mathcal{O}/\varpi^r)$ が存在し、

$$\frac{\omega_f^\alpha}{\Omega_f^\alpha} - u\pi_G^\alpha = d^0Q(X,Y)$$

の形にかける。但し、d^0 は定義 1.1 で与えたものとする。また、γ_{b_i} の定義より、γ_{b_i} の $L_{k-2}(\varepsilon, \mathcal{O}/\varpi^r)$ への作用は

$$\gamma_{b_i} \bullet P(X,Y) \equiv \varepsilon(m)P(mX, m^{-1}Y) \pmod{\varpi^r}$$

で与えられる。特に、この作用は b_i に依存しないことに注意する。このとき、指標 χ が非自明ならば、

$$\begin{aligned}
&\tau(\bar{\chi})\frac{D(f,\chi,1)^\alpha}{\Omega_f^\alpha} - u\tau(\bar{\chi})D(G,\chi,1)^\alpha \pmod{\varpi^r} \\
&= \sum_{i=1}^{\phi(m)} \bar{\chi}(b_i)(\gamma_{b_i} - 1) \bullet Q(X,Y) \\
&= \sum_{i=1}^{\phi(m)} \bar{\chi}(b_i)\{Q(mX, m^{-1}Y) - Q(X,Y)\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。以上より、主定理が得られた。

謝辞 最後になりましたが、講演の機会を与えて下さった皆様に感謝を述べたい。また、本稿で紹介した結果を導くにあたり、お世話になった辻雄先生に感謝を述べたい。特に、定理 1.4 が得られたのは、辻先生のアイデアや助言のおかげである。

References

[Br] C. Breuil, *Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke Math. J. **95** (1998), no. 3, 523–620.

[Br–Me] C. Breuil, W. Messing, *Torsion étale and crystalline cohomologies*, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II. Astérisque **279** (2002), 81–124.

[Del] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, Séminaire Bourbaki, Exposé **355**, Lecture Notes in Math **179**, Springer, Berlin (1971), 139-172.

[Fa–Jo] G. Faltings, B. W. Jordan, *Crystalline cohomology and* GL(2, **Q**), Israel J. Math., **90** (1995), no. 1-3, 1–66.

[Gre–Ste] R. Greenberg, G. Stevens, *p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms*, Invent. Math. 111 (1993), no. 2, 407–447.

[Gre–Vat] R. Greenberg, V. Vatsal, *On the Iwasawa invariants of elliptic curves*, Invent. Math., **142** (2000) no. 1, 17–63.

[Hida] H. Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Mathematical Society Student Texts, **26**, Cambridge University Press, Cambridge, (1993).

[Hi] Y.Hirano, *Congruences of modular forms and the Iwasawa λ-invariants*, preprint.

[Kato] K. Kato, *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III, Astérisque No. **295** (2004), ix, 117–290.

[Sch1] A. J. Scholl, *Modular forms and de Rham cohomology; Atkin-Swinnerton-Dyer congruences*, Invent. Math. **79** (1985) no. 1, 49–77.

[Sch2] A. J. Scholl, *Motives for modular forms*, Invent. Math. **100** (1990) no. 2, 419–430.

[Sch3] A. J. Scholl, *L-functions of modular forms and higher regulators*, book in preparation.

[Ste1] G. Stevens, *Arithmetic on modular curves*, Progress in Mathematics, **20** Birkháuser Boston, Inc., Boston, (1982)

[Ste2] G. Stevens, *The cuspidal group and special values of L-functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985) no. 2, 519–550.

[Vat] V. Vatsal, *Canonical periods and congruence formulae*, Duke Math. J. **98** (1999) no. 2, 397–419.

[Wil] A. Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. **94** (1988), no. 3, 529–573.