数理解析研究所講究録
第 1827 巻 2013 年 42-50

大自由度保存力学系における集団的振動

JST-CREST, 京都大学数学教室　森田 英俊 (Hidetoshi Morita)†
JST-CREST, Department of Mathematics, Kyoto University

1 背景

本研究会では様々な大自由度力学系における様々な集団的挙動について発表が行われた．本稿ではその中でも，微視的には発達した大自由度カオスになっているにもかかわらず，巨視的には低次元運動をする現象について述べ，このような現象を「集団運動」「集団的振動」と呼ぶことにする．

この意味での集団運動は，一見直観に反する．発達した大自由度カオスはほとんど乱数とみなせ，その巨視的量つまり統計量は大数の法則により定常的な振る舞いを見せる，あるいは定常状態まわりの揺らぎが自由度 N とともに減少してゆくと思われるからである．

そうとは限らない，ということが初めに示されたのは，大自由度散逸力学系においてであった．現象としては，まず大域結合写像系において平均場が大数の法則を破ることが発見された [1]．続いて別の大域結合写像系 [2]，高次元格子上のセル・オートマトンや結合写像系 [3]，また大域結合振動子系 [4] において，平均場の周期運動や準周期運動が発見された．さらには平均場の低次元カオスも発見された [5]．大域結合写像における平均場の規則的運動については特に集中的に調べられ，大数の法則の成立の有無等が，平均場の自己無撞着写像の滑らかでない振る舞い [6] や，Perron-Frobenius 作用素の不動点の不安定性・安定性の違い [7, 8] として理解できることが分かってきた．興味深い話題として，系に不均一性 [9] や弱いノイズ [10] といった微視的なコヒーレンスを壊す要素を加えると，大数の法則が回復することがある．その他にも多くの興味深い研究を生んでいる．

それに対し，大自由度保存力学系については，この集団運動は長い間報告されていなかった．

大自由度 Hamilton 系は統計力学において熱平衡状態の微視的模型である．熱平衡状態では巨視的量は定常的である．そのため集団運動は見られるとしたら非平衡状態におい

†E-mail: hmorita@math.kyoto-u.ac.jp

てである．平衡から非平衡へ到るときの巨視的振る舞いの変化を顧みてみると，まず平衡状態から少しだけ離れると，系は平衡へと単純に緩和したり平衡まわりを揺らいだりする；これは線形非平衡統計力学の対象である．そして平衡状態からさらに遠く離れると，系はしばしば分岐を起こして極限周期軌道等の低次元運動を生む；この分岐やその後の時間変動が，巨視的スケールにおける比較的低次元の非線形散逸力学系として記述されることはよく知られている．この巨視的低次元運動の（環境も取り入れた）ミクロ・カノニカル集合での統計力学として大自由度 Hamilton 力学系の集団運動は位置づけられるといえる．

一方で，外部から（と）のエネルギーの流入（出）がない孤立系では，このような巨視的ダイナミクスは現れないようにも一見思える．しかしながら熱力学は，孤立系がいずれ平衡状態へ緩和することと，平衡状態では巨視的な時間変動が起きないことを述べるだけである．その過渡現象として巨視的時間変動が起こっても，熱力学を破っているわけではない．実際，私と金子はある持続的な過渡過程における大自由度 Hamilton 系の集団的振動を発見した．この現象が本講演でレビューした一つ目の話題である．

また私は，二次元 Euler 流体において同様の現象を発見した．後述するように二次元 Euler 方程式は Hamilton 系と類似した構造（正しくは Lie-Poisson 系）を持つことはよく知られている（例えば [11]）．それだけでなく，二次元流体系の巨視的定常流が，ある統計力学的エントロピー最大状態として記述できることも知られている．古くは Onsager による点渦系の統計力学 [12] に遡り，その後も点渦系としての研究が続いたが，1990 年代に入って，Miller [13] および Robert や Sommeria [14, 15] を端緒として集中的に研究が行われ，連続体としての議論が可能になった．この理論が，例えば木星の大赤斑などを記述することが知られている．詳しくはこれらの論文や総説 [16] を参照されたい．以下，この巨視的定常流をこの意味で「平衡状態」と呼ぶことにする．

巨視的定常流が統計力学の平衡状態として記述できることがわかった．それでは「非平衡」についてはどうなっているだろうか，と問うのは自然な問題意識であろう．実際，弱い摂動を与えたときの平衡状態への緩和については多く研究されている（see [17] and references therein）．それでは強い非平衡ではどうだろうか．前述の非平衡へのルートの一般論から，巨視的定常流から遠く離れたところで，低次元の分岐を経て，非定常流が現れることが期待される．本講演での二つ目の話題はこれに相当するものである．

これら二つの現象および機構は，大自由度 Hamilton 系と二次元 Euler 方程式とで本質的に同じである．本講演では，これらを適宜レヴューしつつ，その同等性の議論に主題を

おいた．本稿でもその同等性が際立つよう，対応するものを前者に関しては [H]，後者に関しては [E] で表して平行して述べる．詳細は [18][H]，[19][E] を御覧いただきたい（というように [H] と [E] を用いる）．

2　模型

2.1　大自由度 Hamilton 系

次の Hamiltonian を考える [20, 21, 22, 23, 24]：

$$\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}[1-\cos(q_i - q_j)] \tag{1}$$

N 個の振り子が all-to-all に相互作用している．固体物理の観点からは，平均場 XY 模型の運動量付きヴァージョンである．大自由度散逸力学系に慣れている人には，Kuramoto 模型で固有振動数の代わりに変化する運動量になっているという見方もできる．平均場模型であるため，各要素は平均場を通して他要素と相互作用し，運動方程式は次のように書ける：

$$\dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -M(t)\sin(q_i - \phi(t)), \tag{2}$$

ここで平均場（これは系の状態を記述する秩序変数でもある）：

$$M(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_j}. \tag{3}$$

$\phi(t)$ は N が大きい極限では運動せず，0 とおいて差し支えない．

平衡状態　平均場模型であるため，平衡状態を解析的に求めることが出来る．たとえば平均場の絶対値 $\langle M\rangle$ と温度 $T=\langle p^2\rangle$ の状態方程式が $M_{eq}(T)$ として求まる；ここで $\langle\cdot\rangle$ は熱力学平均．また (q,p) の確率密度は Maxwell-Boltzmann 分布になる．

$$f^{eq}(q,p) = f_p^{eq}(p;T)\cdot f_q^{eq}(q;T), \quad f_p^{eq}(p;T) \propto \mathrm{e}^{-p^2/2T}, \quad f_q^{eq}(q;T) \propto \mathrm{e}^{-M_{eq}(T)\cos q/T} \tag{4}$$

f_p と f_q のパラメータ T は平衡状態では当然同じものである．

初期条件 平衡状態から遠く離れた初期条件を考える．我々は平衡状態からの連続的な変化に興味があるので，初期条件を平衡状態からのパラメトリックな変化として与える．すなわち，(4) 式の平衡分布の関数形を保ったまま，f_p と f_q のパラメーター T をそれぞれ T_p と T_q として $T_p \neq T_q$ とする（$T_q = T_p$ ならば平衡状態に一致する）：

$$f(t=0,q,p) = f_p^{eq}(p;T_p) \cdot f_q^{eq}(q;T_q), \tag{5}$$

パラメーターは，平衡状態の状態方程式として決まる関係から，要素あたりの全エネルギー U と平均場の絶対値 $M(0)$ を選ぶこともでき，以下そうする．ここで，パラメーターといっても初期条件の指定だけに過ぎず，時間の経つに連れて $f(t,q,p)$ や $M(t)$ は変化することに注意する（Hamilton 系なので U は保存する）．

2.2 二次元 Euler 方程式

非圧縮性二次元 Euler 方程式

$$\partial_t \omega + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \omega = 0 \tag{6}$$

を考える（数値シミュレーションにおいては，計算スキームの安定化のため，右辺に hyper viscosity$(-1)^{h+1}\nu\nabla^{2h}\omega$ を加える）．ここで，$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ は速度場，$\omega = \partial_x v_y - \partial_y v_x$ は渦度場．二重周期的境界条件 $\mathcal{D} = [-L_x/2, L_x/2) \times [-L_y/2, L_y/2)$ を課す（2-トーラス）；適当な無次元化により，$L_x = 2\pi$，$L_y = 2\pi\Gamma$ （$\Gamma \geq 1$ はアスペクト比）ととれる．

「平衡」状態 この系は二つの定常解を持つ．ひとつは $\Gamma > 1$ のときに存在する

$$\Omega(x,y) = -\cos\frac{y}{\Gamma} \tag{7}$$

で，y 方向にのみ流れを持つ (zonal flow)．もうひとつは，$\Gamma = 1$ のときに存在する

$$\Omega(x,y) = -\cos x - \cos y \tag{8}$$

で，正負一対の大きな渦を持つ (dipole flow)．それぞれ係数はエネルギーの無次元化により 1 にとれる．これらの解は単に定常なだけでなく，前述の統計力学の枠組におけるエントロピー最大状態でもある [25].

以下，$\Gamma > 1$ を考える．

初期条件　平衡状態から遠く離れた初期条件を考える．我々は平衡状態からの連続的な変化に興味があるので，初期条件を「平衡状態＋変位」という形で与える．平衡状態（以下，base flow とも呼ぶ）は $\Gamma > 1$ より (7) である．変位としては，我々は巨視的なパターンに興味があるので，空間的な変化がゆるやかなものを考える．最も単純な場合として，x 方向に波数 1 のものを与える．結局，初期値は次のようになる：

$$\omega(t=0,x,y) = \Omega(x,y) + \delta\omega(t=0,x,y) = -\cos\frac{y}{\Gamma} - \epsilon\cos x \tag{9}$$

この ϵ は初期状態の定常状態からの遠さを表す．系のパラメーターは ϵ と Γ である．ここで，パラメーターといっても初期条件の指定だけに過ぎず，時間の経つに連れて $\delta\omega(t,x,y)$ は変動することに注意する．

3　現象

この初期条件におかれると，系は比較的短時間の過渡的過程を経て，安定した挙動に達する．

3.1　大自由度 Hamilton 系

その安定挙動は系のパラメーター $(U, M(0))$ により三種類に分かれる．これらは秩序変数すなわち平均場の絶対値 $M(t)$ により同定できる．一つ目は $M(t)$ がほぼ定常的（振幅の小さな振動は残る）に振る舞う場合である．注目すべき二つ目は，$M(t)$ が大きな振幅で振動する場合である（これもその大振幅のまわりに振幅の小さな振動が伴う）．この大振幅振動は，熱揺らぎとは異なり，自由度 N を大きくしても零にならず（大数の法則の破れ），むしろ振動がよりクリアになる．つまりこの振動は N が大きい極限で見られるものである．これに対応して，確率密度場 $f(t,q,p)$ には，平衡状態でも見られるような中心の大きなピークに加え，(2) 式のセパラトリックスの外側に沿って移動するクラスターが現れる．三つめは，もう少し複雑な振る舞いである．パワースペクトルを見ると，互いに素な周波数に大きなピークが二つ立っている．すなわち準周期的な運動と言える．本研究では二つ目の振動に注目する．これらはいずれも，非平衡準安定状態にある．実際，さらに長時間経つと，いずれ平衡状態に緩和するのが見られる．ただしその緩和時間は自由度 N に比例して長くなる．つまりこの振動は N が大きい極限で持続的に見られるものである．

3.2 二次元 Euler 方程式

その安定挙動は系のパラメーター (ϵ, Γ) により三種類に分かれる．これは秩序変数 $Z(t) = -\mathrm{Re}\ \hat{\omega}_{(1,0)}(t)$ により定量的に同定できる；ここで $\hat{\cdot}_{(q_x,q_y)}(t)$ は場 $\cdot(t,x,y)$ の Fourier 変換．一つ目は base flow (7) と同様の zonal flow である．二つ目は，(8) と同様の dipole flow である．これらは巨視的なレベルでは定常状態である；前者では $Z(t)$ は零，後者では有限値で，それぞれ時間的にほぼ一定である（振幅の小さな振動は残る）．注目すべき三つ目は，これらと異なり，非定常状態である．すなわち，base flow の他に，二組の正負のコヒーレントな渦が現れ，base flow の流線に沿ってペアとなって運動してゆく．これに伴い，$Z(t)$ は大きな振幅で振動する（これもその大振幅のまわりに振幅の小さな振動が伴う）．

4 分岐

両模型に共通して見られる現象として，初期状態を平衡状態から遠ざけるにつれて，安定状態での挙動が定常状態から振動状態へと転移する．この転移すなわち分岐の，分岐点近傍での様子を調べる．すると，秩序変数 $M(t)$ [H]，$Z(t)$ [E] の時間振動の振幅が，あるパラメーター μ_c から $(\mu - \mu_c)^{1/2}$ のように立ち上がることが分かる；ここでパラメーター $\mu = U$ [H]，ϵ [E]．これは pitch-fork 型の Hopf 分岐と同様であり，ダイナミクスの低次元性が示唆される．つまり大自由度（無限自由度 [E]）保存力学系の中に低次元力学系と同様の構造が見出されたと言える．

5 動的自己無撞着解析

この振動状態の安定性について考察する．前述のようにパラメーターは初期状態での値に過ぎず，また分岐前の確率密度場 [H]，渦度場 [E] が解の形で与えられているわけではないので，通常のやり方での安定性解析・分岐解析は不可能である．そこで，次のような動的な自己無撞着解析とでも呼べる方法により説明を与える．これは発想としては大自由度散逸力学系で用いられたもの [6] と同様である．

まず，大自由度 Hamilton 系においては，既に述べたように，各要素の運動方程式は平均場を通して (2) 式のように書けることを確認しておく．

次に，二次元 Euler 方程式が Hamilton の正準方程式に類似した形でで記述できることを復習しておく．非圧縮性条件 $\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0$ より，

$$\dot{x} = v_x = +\partial_y \psi, \qquad \dot{y} = v_y = -\partial_x \psi \tag{10}$$

なる場 ψ が存在する．これは流れ関数（の z 成分）であり，電磁気学の言葉で言えば Coulomb ゲージをとったベクトル・ポテンシャル（の z 成分）である．この ψ を Hamiltonian, (x, y) を正準変数と見れば，Hamilton の正準方程式の形をしている．ただし Hamilton 系と違って ψ は与えられているのではく，$\omega = -\nabla^2\psi$ という関係によって自己無撞着に決まるところが違っている．

ここで，元々の方程式の代りに，周期 T で正弦的に時間振動する外場

$$\text{[H]} \quad M_{ex}(t) = g + h \sin \frac{2\pi t}{T} \tag{11a}$$

$$\text{[E]} \quad \omega_{ex}(x, y) = \Omega(x, y) - 2b \sin \frac{2\pi t}{T} \cos x \tag{11b}$$

の中，(2), (10) に従って運動する独立な試験要素 [H]・試験点渦 [E] の集団を考える．この点渦の集団運動は確率密度場 [H]・渦度場 [E]

$$\text{[H]} \quad f_{in}(t, q, p) = \sum_j \delta^2(q - q_j(t), p - p_j(t)) \tag{12a}$$

$$\text{[E]} \quad \omega_{in}(t, x, y) = \sum_j \omega_0 \delta^2(x - x_j(t), y - y_j(t)) \tag{12b}$$

をつくる（ここで ω_0 は渦度単位）．もしこの確率密度場がつくる平均場

$$M_{in}(t) = \int \mathrm{d}q \int dp f_{in}(t, q, p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} \tag{13}$$

が外場 $M_{ex}(t)$ に一致すれば，自己無撞着に，この一体ダイナミクスの集団は元の大自由度 Hamilton 系を再現していることになる．同様に，もしこの集団的渦度場に $\omega_{in} = -\nabla^2\psi_{in}$ として対応する集団的流れ関数 ψ_{in} が外場 ψ_{ex} に一致すれば，自己無撞着に，この点渦の一体ダイナミクスの集団は元の二次元 Euler 方程式を再現していることになる．

これらの一体問題は standard map に類似したものである．そこで周期 T 毎の Poincaré 断面を見てみると，カオスの海の中に振動外場への一対一共鳴のトーラス島が存在していることが見て取れる．注目すべきは，この共鳴の位置が，元々の Hamilton 系・二次元 Euler 方程式における確率密度場 [H]・渦度場 [E] のクラスターの位置と完全に一致していることである．

この事実より，この振動状態の安定性が次のように説明できる：ひとたび，この共鳴の位置に要素[H]・渦度[E]が集中したとする．その集中したものたちが協同的に運動し，時間振動的な場を生成する（ミクロ→マクロ）．するとこの振動場それ自体によって，この集中したものたちは拡散せずにそのトーラスの中に閉じ込められる（マクロ→ミクロ）．こうして振動状態が自己無撞着に安定して自続する．

6 議論

以上のように，大自由度Hamilton系における集団的振動と二次元Euler流体における巨視的振動は議論がパラレルに進み，本質的に同じ現象である．二次元流体の優位性は，実験や観測において実現，検証しやすいことにあるだろう．一方でHamilton系の優位性は，長時間の安定したシミュレーションが可能なので，振動状態からの緩和についても見ることができるところにある．

謝辞

本講演でレヴューした内容の一部は金子邦彦さんとの共同研究に基づく．またその内容はそれぞれ当時，科学研究費補助金および文部科学省グローバルCOEプログラム「普遍性と創発性から紡ぐ次世代物理学」の支援を受けて行われた．現在著者はJST-CREST「ダイナミクス全構造計算法の発展による脳神経—身体リズム機構の解明と制御」の支援を受けている．

参考文献

[1] K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **65**, 1391–1394 (1990), erratum, **66**, 243 (1991).

[2] K. Kaneko, Physica D **55**, 368–384 (1992).

[3] H. Chaté and P. Manneville, Prog. Theor. Phys. **87**, 1–60 (1992).

[4] N. Nakagawa and Y. Kuramoto, Physica D **80**, 307–316 (1995).

[5] T. Shibata and K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **81**, 4116–4119 (1998).

[6] G. Perez and H. A. Cerdeira, Phys. Rev. A **46**, 7492–7497 (1992).

[7] A. S. Pikovsky and J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **72**, 1644–1646 (1994).

[8] A. S. Pikovsky and J. Kurths, Physica D **76**, 411–419 (1994).

[9] T. Shibata and K. Kaneko, Europhys. Lett. **38**, 417–422 (1997).

[10] T. Shibata, T. Chawanya, and K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **82**, 4424–4427 (1999).

[11] 今井功『流体力学（前編)』裳華房 (1973).

[12] L. Onsager, Nuovo Cimento Ser. 9 Suppl. **6**, 279–287 (1949).

[13] J. Miller, Phys. Rev. Lett. **65**, 2137–2140 (1990).

[14] R. Robert, J. Stat. Phys. **65**, 531–552 (1991).

[15] R. Robert and J. Sommeria, J. Fluid Mech. **229**, 291–310 (1991).

[16] G. L. Eyink and K. R. Sreenivasan, Rev. Mod. Phys. **78**, 87–135 (2006).

[17] F. Bouchet and H. Morita, Physica D **239**, 948–966 (2010).

[18] H. Morita and K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **96**, 050602 (2006).

[19] H. Morita, arxiv:1103.1140.

[20] T. Konishi and K. Kaneko, J. Phys. A **23**, L715–L720 (1990).

[21] T. Konishi and K. Kaneko, J. Phys. A **25**, 6283–6296 (1992).

[22] S. Inagaki, Prog. Theor. Phys. **90**, 577–584 (1993).

[23] S. Inagaki and T. Konishi, Publ. Astron. Soc. Jpn. **45**, 733–735 (1993).

[24] M. Antoni and S. Ruffo, Phys. Rev. E **52**, 2361–2374 (1995).

[25] Z. Yin, D. C. Montgomery, and H. J. H. Clercx, Phys. Fluids **15**, 1937–1953 (2003).