

## 結合振動子系の階層構造と集団位相記述

### Hierarchical Structure and Collective Phase Description of Coupled Oscillators

河村 洋史 (独立行政法人海洋研究開発機構)

Yoji Kawamura (Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology)

E-mail: ykawamura@jamstec.go.jp

2012 年 11 月 30 日

#### 概要

ノイズを受けた大域結合リミットサイクル振動子系の階層構造を縮約理論に基づいて解析し、この大自由度力学系の作る集団ダイナミクスをマクロな位相変数のみで記述する集団位相記述法を定式化する。特に、集団ダイナミクスを定量的に特徴付ける集団位相感受関数と集団位相結合関数の公式を導出する。そして、大域結合電気化学振動子系に対して具体的な計算結果を示すと共に、個々の振動子はすべて同相結合している状況でも集団間では逆相同期になり得ることを例証する。最後に、集団位相記述法のいくつかの一般化について簡潔に述べる。

### 1 はじめに

大域結合振動子系の作る集団リズムは最も重要な同期現象のひとつである [1, 2]. 現実の世界の多くのリズム現象はミクロな振動子の結合系によって作られる集団リズムであるため、集団振動している大域結合振動子集団の間のマクロな同期現象も注目されてきた [3, 4]. 近年, Ott-Antonsen 仮説 [5-7] の導入により, この方向の理論研究は数多くなされている. 本稿では, ノイズを受けた大域結合振動子系が作る集団リズムをマクロな位相変数のみで記述する集団位相記述法について概説する [8-12]. 位相方程式および集団位相方程式の導出方法については付録で詳しく説明する.

### 2 大域結合振動子系の階層構造と集団位相記述

次の方程式で記述されるノイズを受けた大域結合リミットサイクル振動子集団の結合系を考える:

$$\dot{\mathbf{X}}_j^{(\sigma)}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_j^{(\sigma)}) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{X}_j^{(\sigma)}, \mathbf{X}_k^{(\sigma)}) + \sqrt{D_0} \boldsymbol{\xi}_j^{(\sigma)}(t) + \epsilon_p \mathbf{p}_\sigma(t) + \frac{\epsilon_g}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{G}_{\sigma\tau}(\mathbf{X}_j^{(\sigma)}, \mathbf{X}_k^{(\tau)}). \quad (1)$$

ここで,  $\mathbf{X}_j^{(\sigma)}(t)$  は集団  $\sigma$  に属する振動子  $j$  の時刻  $t$  における状態を表す. 式 (1) の右辺の各項は, 各振動子のダイナミクス, 集団内における振動子間の相互作用, 各集団・各振動子・各成分ごとに独立な白色ガウスノイズ (ノイズ強度  $D_0 \geq 0$ ), 集団内の振動子に対して共通な外力 (共通外力の強さ  $\epsilon_p \geq 0$ ), 集団間における振動子間の相互作用 (集団間の結合強度  $\epsilon_g \geq 0$ ) をそれぞれ表す. また, 各集団の振動子数  $N$  は十分に大きいとする.

ここにおいて, 個々の振動子に対する摂動 (i.e.,  $\mathbf{G}$ ,  $\sqrt{D_0} \boldsymbol{\xi}_j^{(\sigma)}$ ,  $\epsilon_p \mathbf{p}_\sigma$ ,  $\epsilon_g \mathbf{G}_{\sigma\tau}$ ) が十分小さい場合には, 式 (1) を次のような方程式に位相縮約することができる (付録 A 参照) [1, 2, 8, 9]:

$$\dot{\phi}_j^{(\sigma)}(t) = \omega + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Gamma(\phi_j^{(\sigma)} - \phi_k^{(\sigma)}) + \sqrt{D} \xi_j^{(\sigma)}(t) + \epsilon_p \mathbf{Z}(\phi_j^{(\sigma)}) \cdot \mathbf{p}_\sigma(t) + \frac{\epsilon_g}{N} \sum_{k=1}^N \Gamma_{\sigma\tau}(\phi_j^{(\sigma)} - \phi_k^{(\tau)}). \quad (2)$$

ここで,  $\phi_j^{(\sigma)}(t) \in [0, 2\pi)$  は集団  $\sigma$  に属する振動子  $j$  の時刻  $t$  における位相であり, 右辺の各項は, 各振動子の振動数, 集団内の相互作用, 独立な白色ガウスノイズ (実効的なノイズ強度  $D$ ), 各集団

の共通外力, 集団間の相互作用をそれぞれ表す. 特に,  $\mathbf{Z}$  は位相感受関数と呼ばれ, 位相記述において最も基本的な量である [1, 2]. また,  $\Gamma$  と  $\Gamma_{\sigma\tau}$  は位相結合関数と呼ばれ, これも重要である [1, 2].

大域結合系は振動子数が無限大の極限 (i.e.,  $N \rightarrow \infty$ ) において平均場理論が厳密に成り立ち, Langevin 型の位相方程式 (2) は, 集団  $\sigma$  に対する一体の位相分布関数  $f^{(\sigma)}(\phi, t)$  が従う次のような非線形 Fokker-Planck 方程式に書き直すことができる [1-3, 8-12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f^{(\sigma)}(\phi, t) = & - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \left\{ \omega + \int_0^{2\pi} d\phi' \Gamma(\phi - \phi') f^{(\sigma)}(\phi', t) \right\} f^{(\sigma)}(\phi, t) \right] + D \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} f^{(\sigma)}(\phi, t) \\ & - \epsilon_p \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \mathbf{Z}(\phi) f^{(\sigma)}(\phi, t) \right] \cdot \mathbf{p}_\sigma(t) - \epsilon_g \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \int_0^{2\pi} d\phi' \Gamma_{\sigma\tau}(\phi - \phi') f^{(\tau)}(\phi', t) f^{(\sigma)}(\phi, t) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで, 一体の位相分布関数は次のように規格化されている:  $\int_0^{2\pi} d\phi f^{(\sigma)}(\phi, t) = 1$ . 式 (3) 右辺の第 1 項と第 2 項は集団  $\sigma$  のダイナミクスを表し, 第 3 項と第 4 項は各集団の共通外力と集団間の相互作用をそれぞれ表す. また,  $\epsilon_p = \epsilon_g = 0$  において, 各集団は集団振動しているとする [1, 2].

各集団に対する摂動 ( $\epsilon_p$  と  $\epsilon_g$ ) が集団内の結合に比べて十分小さい場合には, 非線形 Fokker-Planck 方程式 (3) を次のような方程式へさらに位相縮約することができる (付録 B 参照) [8-12]:

$$\dot{\Theta}^{(\sigma)}(t) = \Omega + \epsilon_p \zeta \left( \Theta^{(\sigma)} \right) \cdot \mathbf{p}_\sigma(t) + \epsilon_g \gamma_{\sigma\tau} \left( \Theta^{(\sigma)} - \Theta^{(\tau)} \right). \quad (4)$$

ここで,  $\Theta^{(\sigma)}(t) \in [0, 2\pi)$  は集団  $\sigma$  に対するマクロな位相 (集団位相と呼ぶ) であり,  $\Omega$  は集団振動数である. また, 式 (4) のように, 集団振動を集団位相のみで記述することを集団位相記述と呼んでいる. そして, 集団位相感受関数  $\zeta$  は個々の位相感受関数  $\mathbf{Z}$  を用いて次のように表される [2, 9, 12]:

$$\zeta \left( \Theta^{(\sigma)} \right) = \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{Z} \left( \varphi + \Theta^{(\sigma)} \right) k_0(\varphi). \quad (5)$$

同様に, 集団位相結合関数  $\gamma_{\sigma\tau}$  は個々の位相結合関数  $\Gamma_{\sigma\tau}$  を用いて次のように書ける [2, 10, 12]:

$$\gamma_{\sigma\tau} \left( \Theta^{(\sigma)} - \Theta^{(\tau)} \right) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \Gamma_{\sigma\tau} \left( \varphi - \varphi' + \Theta^{(\sigma)} - \Theta^{(\tau)} \right) k_0(\varphi) f_0(\varphi'). \quad (6)$$

ここにおいて,  $\epsilon_p = \epsilon_g = 0$  の非線形 Fokker-Planck 方程式 (3) における時間周期解  $f_0(\varphi)$  とその左ゼ口固有関数  $u_0^*(\varphi)$  を用いて, 重み関数は次のように与えられる [8-12]:  $k_0(\varphi) = -f_0(\varphi) du_0^*(\varphi)/d\varphi$ . 以上のような大域結合リミットサイクル振動子系の階層構造は表 1 のようにまとめることができる. 式 (2) および式 (4) の導出方法については, 付録 A および付録 B においてそれぞれ述べる.

表 1: ノイズを受けた大域結合リミットサイクル振動子系の階層構造.

interacting groups of globally coupled noisy limit-cycle oscillators	$\mathbf{X}_j^{(\sigma)}(t)$
↓ 1st phase reduction	
interacting groups of globally coupled noisy phase oscillators	$\phi_j^{(\sigma)}(t)$
↓ mean-field theory	
coupled nonlinear Fokker-Planck equations	$f^{(\sigma)}(\phi, t)$
↓ 2nd phase reduction	
coupled collective phase oscillators	$\Theta^{(\sigma)}(t)$

### 3 大域結合電気化学振動子系の集団位相感受関数と集団位相結合関数

集団振動の実験系として重要である大域結合電気化学振動子系の数理モデル [13,14] を用いて, 集団位相感受関数 (5) と集団位相結合関数 (6) を実際に計算する. 電気化学振動子モデルは次のように書くことができる:  $\mathbf{X} = (X, Y)$ ,  $\mathbf{F} = (F_X, F_Y)$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\sigma r} = (G_X, 0)$ ,  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_X, 0)$ ,  $\mathbf{p} = (p_X, 0)$ . ここにおいて,  $F_X, F_Y, G_X$  の具体的な表式は次の通りである [13,14]:

$$F_X(\mathbf{X}) = \frac{v - X}{r} - \left( \frac{C_h \exp(0.5X)}{1 + C_h \exp(X)} + a \exp(X) \right) (1 - Y), \quad (7)$$

$$F_Y(\mathbf{X}) = \frac{1}{s} \left( \frac{\exp(0.5X)}{1 + C_h \exp(X)} (1 - Y) - \frac{b C_h \exp(2X)}{c C_h + \exp(X)} Y \right), \quad (8)$$

$$G_X(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \frac{K}{r} (X' - X). \quad (9)$$

参考文献 [14] に従い, パラメタは次の値に固定する:  $a = 0.3$ ,  $b = 0.00006$ ,  $c = 0.001$ ,  $C_h = 1600$ ,  $s = 0.01$ ,  $r = 20.0$ ,  $v = 15.0$ ,  $K/r = 0.0025$ . この電気化学振動子のリミットサイクル解  $\mathbf{X}_0(\phi)$ , 位相感受関数  $Z_X(\phi)$ , 位相結合関数  $\Gamma(\phi)$  を図 1 に示す.

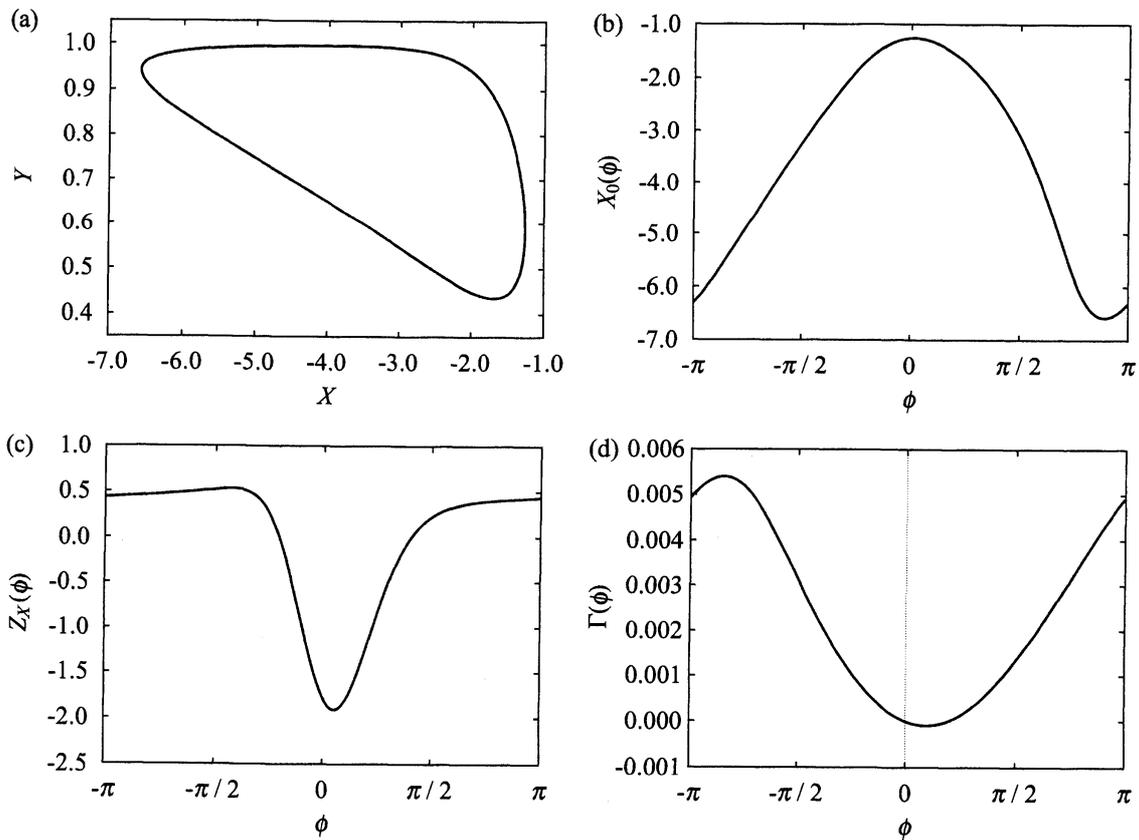


図 1: 電気化学振動子. (a) リミットサイクル軌道  $\mathbf{X}_0(\phi)$ . (b) リミットサイクル解の波形  $X_0(\phi)$ . (c) 位相感受関数  $Z_X(\phi)$ . (d) 位相結合関数  $\Gamma(\phi)$ . 電気化学振動子のパラメタは次の通りである:  $a = 0.3$ ,  $b = 0.00006$ ,  $c = 0.001$ ,  $C_h = 1600$ ,  $s = 0.01$ ,  $r = 20.0$ ,  $v = 15.0$ . このとき, 自然振動数は  $\omega \simeq 0.45$  であり, 振幅方向の Floquet 指数は  $\lambda \simeq -0.23$  である. 結合パラメタ  $K/r = 0.0025$ .

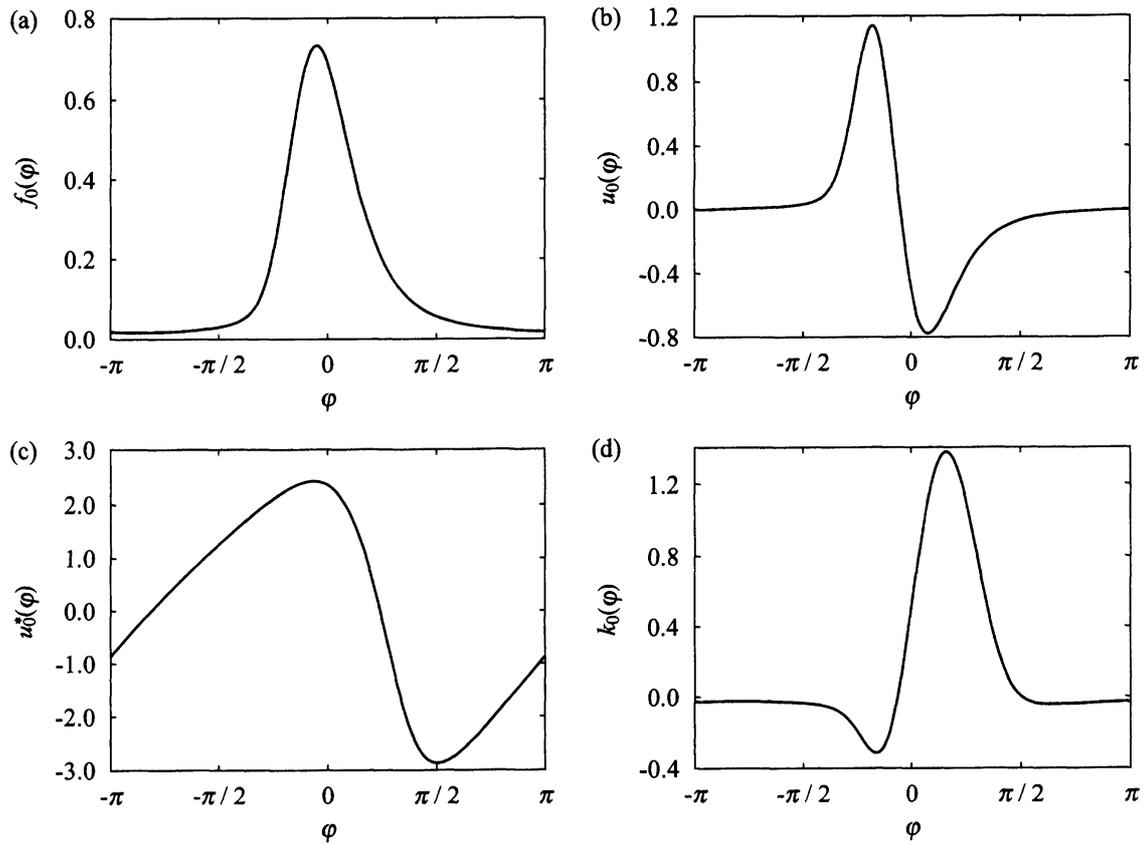


図 2: 大域結合電気化学振動子集団. (a) 集団振動解  $f_0(\varphi)$ . (b) 右ゼロ固有関数  $u_0(\varphi)$ . (c) 左ゼロ固有関数  $u_0^*(\varphi)$ . (d) 重み関数  $k_0(\varphi)$ . 結合パラメタ  $K/r = 0.0025$ , ノイズ強度  $D_0 = 0.00025$ .

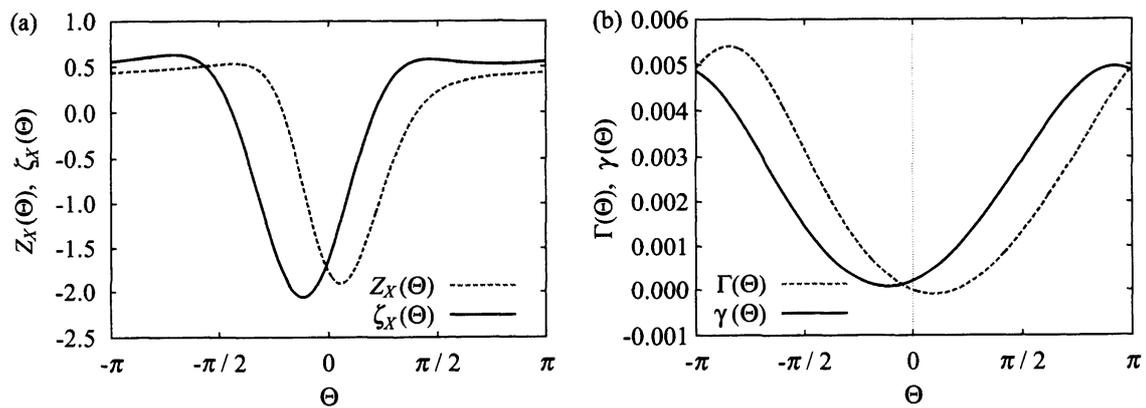


図 3: 大域結合電気化学振動子集団. (a) 個々の位相感受関数  $Z_X(\Theta)$  と集団位相感受関数  $\zeta_X(\Theta)$ . (b) 個々の位相結合関数  $\Gamma(\Theta)$  と集団位相結合関数  $\gamma(\Theta)$ . 個々の位相結合関数  $\Gamma(\Theta)$  は同相結合 (引力的な位相結合) であるが, 集団位相結合関数  $\gamma(\Theta)$  は逆相結合 (斥力的な位相結合) である.

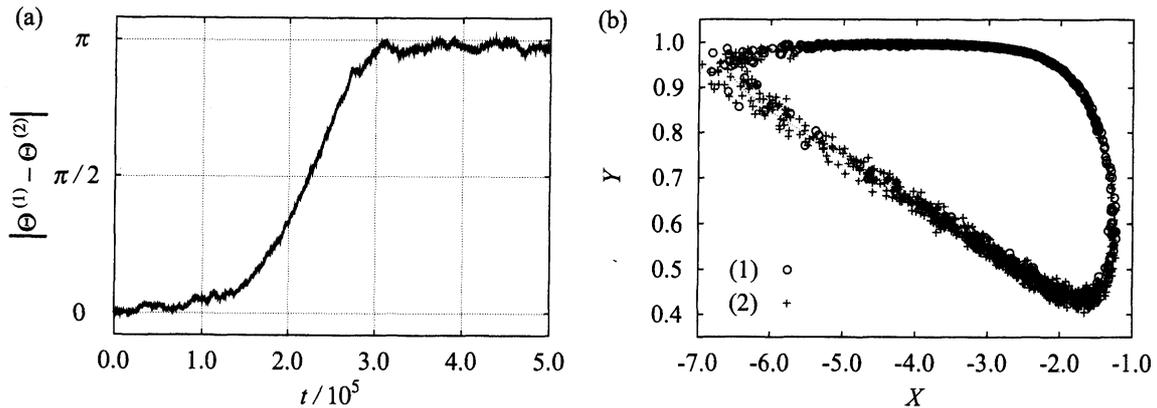


図 4: 大域結合電気化学振動子集団の結合系. (a) 集団位相差の時間発展. (b) 漸近状態における個々の振動子のスナップショット. 各集団の振動子数  $N = 10000$ , 集団間の結合強度  $\epsilon_g = 0.02$ .

ノイズ強度  $D_0 = 0.00025$  における大域結合電気化学振動子集団の集団振動解  $f_0(\varphi)$ , 右ゼロ固有関数  $u_0(\varphi) = df_0(\varphi)/d\varphi$ , 左ゼロ固有関数  $u_0^*(\varphi)$ , 重み関数  $k_0(\varphi)$  を図 2 に示す. 加えて, 大域結合電気化学振動子集団の集団位相感受関数  $\zeta_X(\Theta)$  と集団位相結合関数  $\gamma(\Theta)$  を図 3 に示す. 図 3(b) において,  $\Theta = 0, \pm\pi$  における傾きからわかるように, 個々の位相結合関数は同相結合 (i.e.,  $\Gamma'(0) < 0$  &  $\Gamma'(\pm\pi) > 0$ ) であるが, 集団位相結合関数は逆相結合 (i.e.,  $\gamma'(0) > 0$  &  $\gamma'(\pm\pi) < 0$ ) である. これは個々の位相結合関数はすべて同相結合であるにもかかわらず, 集団振動間の位相差は逆相同期になることを意味している.

ここにおいて, 大域結合電気化学振動子集団の結合系に対する直接数値計算の結果を図 4 に示す. 各集団の振動子数は  $N = 10000$  であり, 集団間の結合強度は  $\epsilon_g = 0.02$  である. また, 各振動子集団の集団位相  $\Theta^{(\sigma)}(t)$  は秩序変数に関する次のような式を用いて数値計算する [8–12]:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j^{(\sigma)}(t)} \simeq \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi} f^{(\sigma)}(\phi, t) \simeq \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi} f_0(\phi - \Theta^{(\sigma)}(t)) = R_0 e^{i\Theta^{(\sigma)}(t)}. \quad (10)$$

ここで,  $R_0 = \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi} f_0(\phi) \in \mathbb{R}$  である. 図 4(a) は集団位相差の時間発展であり, 図 4(b) は漸近状態における個々の振動子のスナップショットである. 確かに, 集団振動間の位相差は逆相同期する (i.e.,  $|\Theta^{(1)} - \Theta^{(2)}| = \pi$ ). また, 個々の振動子のスナップショットも集団ごとに分離している.

#### 4 おわりに

個々の振動子がすべて同相結合している状況における集団間の逆相同期現象は, 集団位相結合関数の型 (同相結合か逆相結合か) として理解することができる. これについては参考文献 [10] において詳細に解析している (参考文献 [8] も参照). Ott-Antonsen 仮説 [5–7] を応用した参考文献 [11] においては, 「ノイズはないが振動数は不均一な場合」を解析しており, 本稿や参考文献 [10] のような「ノイズはあるが振動数は均一な場合」との類似点および相違点も議論している. 加えて, 本稿で概説した集団位相記述法は次のような一般化をしている: 非局所結合系 [8], 興奮性素子系 [12], 熱対流系 [15]. 特に, 最近では, 地球流体への応用を目指し, 振動対流の位相記述法 [15] を研究している. また, 反応拡散系におけるリミットサイクル解の位相記述法 [16], 振動子ネットワークにおける完全位相ロック状態の位相記述法 [17–20], などの研究もあることを注意しておく. 位相記述法 [1, 2] にはまだまだいろいろな可能性が残されているように思われる.

## A 常微分方程式で記述されるリミットサイクル振動子の位相縮約

式 (1) から式 (2) を導出するのに使われる位相縮約法を参考文献 [12] に基づいて詳しく述べる。実際に、式 (1) から式 (2) を導出する過程については、参考文献 [1, 2, 8, 9] を参照していただきたい。

### A.1 時間周期解と Floquet 型の線形演算子

次のような常微分方程式で記述される単一のリミットサイクル振動子を考える：

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}). \quad (\text{A1})$$

時間周期解  $\mathbf{X}_0(\phi)$  は次のように表すことができる：

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0(\phi), \quad \dot{\phi}(t) = \omega. \quad (\text{A2})$$

ここで、 $\phi$  が位相であり、 $\omega$  が振動数である。式 (A2) を式 (A1) に代入すると、時間周期解  $\mathbf{X}_0(\phi)$  は次の方程式を満たすことがわかる：

$$\omega \frac{d}{d\phi} \mathbf{X}_0(\phi) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0(\phi)). \quad (\text{A3})$$

ここで、時間周期解からのずれ  $\mathbf{u}(\phi, t)$  を次のように考える：

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0(\phi) + \mathbf{u}(\phi, t). \quad (\text{A4})$$

式 (A4) を式 (A1) に代入して、 $\mathbf{u}(\phi, t)$  について線形化する：

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\phi, t) = \hat{L}(\phi) \mathbf{u}(\phi, t). \quad (\text{A5})$$

このとき、線形演算子  $\hat{L}(\phi)$  は次のように与えられる：

$$\hat{L}(\phi) \mathbf{u}(\phi) = \left[ \hat{J}(\phi) - \omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \mathbf{u}(\phi). \quad (\text{A6})$$

ここで、 $\hat{J}(\phi)$  は次のように与えられる Jacobi 行列である：

$$\hat{J}(\phi) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}_0(\phi))}{\partial \mathbf{X}_0(\phi)}. \quad (\text{A7})$$

線形演算子  $\hat{L}(\phi)$  は  $\phi$  を通して時間周期的なため Floquet 型である。ここにおいて、次のような内積を定義する：

$$\left[ \mathbf{u}^*(\phi), \mathbf{u}(\phi) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{u}^*(\phi) \cdot \mathbf{u}(\phi). \quad (\text{A8})$$

そして、線形演算子  $\hat{L}(\phi)$  の随伴演算子を次のように導入する：

$$\left[ \mathbf{u}^*(\phi), \hat{L}(\phi) \mathbf{u}(\phi) \right] = \left[ \hat{L}^*(\phi) \mathbf{u}^*(\phi), \mathbf{u}(\phi) \right]. \quad (\text{A9})$$

部分積分により、随伴演算子  $\hat{L}^*(\phi)$  は次のように与えられることがわかる：

$$\hat{L}^*(\phi) \mathbf{u}^*(\phi) = \left[ \hat{J}^*(\phi) + \omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \mathbf{u}^*(\phi). \quad (\text{A10})$$

ここで、 $\hat{J}^*(\phi)$  は Jacobi 行列の転置行列である：

$$\hat{J}^*(\phi) = \hat{J}(\phi)^T. \quad (\text{A11})$$

## A.2 Floquet ゼロ固有関数

以下の計算では左右の Floquet ゼロ固有関数のみが必要であり、それらは次のように与えられる:

$$\hat{L}(\phi)U_0(\phi) = \left[ \hat{J}(\phi) - \omega \frac{d}{d\phi} \right] U_0(\phi) = 0, \quad (\text{A12})$$

$$\hat{L}^*(\phi)U_0^*(\phi) = \left[ \hat{J}^*(\phi) + \omega \frac{d}{d\phi} \right] U_0^*(\phi) = 0. \quad (\text{A13})$$

式 (A3) を  $\phi$  で微分することで確かめられるように、右ゼロ固有関数  $U_0(\phi)$  は次のように書くことができる:

$$U_0(\phi) = \frac{d}{d\phi} X_0(\phi). \quad (\text{A14})$$

右ゼロ固有関数 (A14) との内積 (A8) を用いて、左ゼロ固有関数  $U_0^*(\phi)$  は次のように規格化することができる:

$$\left[ U_0^*(\phi), U_0(\phi) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi U_0^*(\phi) \cdot U_0(\phi) = 1. \quad (\text{A15})$$

ここにおいて、次のような等式が成り立つことに注意する:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\phi} \left[ U_0^*(\phi) \cdot U_0(\phi) \right] \\ &= U_0^*(\phi) \cdot \frac{dU_0(\phi)}{d\phi} + \frac{dU_0^*(\phi)}{d\phi} \cdot U_0(\phi) \\ &= \frac{1}{\omega} \left[ U_0^*(\phi) \cdot \hat{J}(\phi)U_0(\phi) - \hat{J}^*(\phi)U_0^*(\phi) \cdot U_0(\phi) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

よって、左ゼロ固有関数  $U_0^*(\phi)$  は次のように各位相ごとに規格化することができる:

$$U_0^*(\phi) \cdot U_0(\phi) = 1. \quad (\text{A17})$$

## A.3 摂動を受けたリミットサイクル振動子

以上のことをふまえて、次のような常微分方程式で記述される摂動を受けた単一のリミットサイクル振動子を考える:

$$\dot{X}(t) = F(X) + \epsilon p(t). \quad (\text{A18})$$

摂動  $\epsilon p(t)$  は十分に小さいとして、次のような射影を考える:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= U_0^*(\phi) \cdot \dot{X}(t) \\ &= U_0^*(\phi) \cdot \left[ F(X) + \epsilon p(t) \right] \\ &\simeq U_0^*(\phi) \cdot \left[ F(X_0(\phi)) + \epsilon p(t) \right] \\ &= U_0^*(\phi) \cdot \left[ \omega \frac{d}{d\phi} X_0(\phi) + \epsilon p(t) \right] \\ &= U_0^*(\phi) \cdot \left[ \omega U_0(\phi) + \epsilon p(t) \right] \\ &= \omega + \epsilon U_0^*(\phi) \cdot p(t). \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

よって、位相方程式は次のように書くことができる:

$$\dot{\phi}(t) = \omega + \epsilon \mathbf{Z}(\phi) \cdot \mathbf{p}(t). \quad (\text{A20})$$

ここにおいて、位相感受関数  $\mathbf{Z}(\phi)$  は左ゼロ固有関数  $U_0^*(\phi)$  に一致する:

$$\mathbf{Z}(\phi) = U_0^*(\phi). \quad (\text{A21})$$

また、式 (A13) から、左ゼロ固有関数  $U_0^*(\phi)$  は次のアジョイント方程式に従うことがわかる:

$$\omega \frac{d}{d\phi} U_0^*(\phi) = -\hat{J}^*(\phi) U_0^*(\phi). \quad (\text{A22})$$

以上、位相方程式の導出を参考文献 [12] に基づいて述べた。位相記述法の別の定式化やその様々な応用例については参考文献 [1, 2] に詳しく解説されている。

## B 非線形 Fokker-Planck 方程式で記述される集団振動の位相縮約

式 (3) から式 (4) を導出するのに使われる位相縮約法を参考文献 [12] に基づいて詳しく述べる。実際に、式 (3) から式 (4) を導出する過程については、参考文献 [8–12] を参照していただきたい。

### B.1 時間周期解と Floquet 型の線形演算子

次のような単一の非線形 Fokker-Planck 方程式を考える:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\phi, t) = -\frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \left\{ v(\phi) + \int_0^{2\pi} d\phi' \Gamma(\phi, \phi') f(\phi', t) \right\} f(\phi, t) \right] + D \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} f(\phi, t). \quad (\text{B1})$$

式 (3) における単一の方程式は次の場合に相当する:  $v(\phi) = \omega$ ,  $\Gamma(\phi, \phi') = \Gamma(\phi - \phi')$ . 式 (B1) の時間周期解  $f_0(\phi, \Theta)$  は次のように表すことができる:

$$f(\phi, t) = f_0(\phi, \Theta), \quad \dot{\Theta}(t) = \Omega. \quad (\text{B2})$$

ここで、 $\Theta$  が集団位相であり、 $\Omega$  が集団振動数である。式 (B2) を式 (B1) に代入すると、時間周期解  $f_0(\phi, \Theta)$  は次の方程式を満たすことがわかる:

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \Theta} f_0(\phi, \Theta) = -\frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \left\{ v(\phi) + \int_0^{2\pi} d\phi' \Gamma(\phi, \phi') f_0(\phi', \Theta) \right\} f_0(\phi, \Theta) \right] + D \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} f_0(\phi, \Theta). \quad (\text{B3})$$

ここで、時間周期解からのずれ  $u(\phi, \Theta, t)$  を次のように考える:

$$f(\phi, t) = f_0(\phi, \Theta) + u(\phi, \Theta, t). \quad (\text{B4})$$

式 (B4) を式 (B1) に代入して、 $u(\phi, \Theta, t)$  について線形化する:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\phi, \Theta, t) = \hat{L}(\phi, \Theta) u(\phi, \Theta, t). \quad (\text{B5})$$

このとき、線形演算子  $\hat{L}(\phi, \Theta)$  は次のように書くことができる:

$$\hat{L}(\phi, \Theta) u(\phi, \Theta) = \left[ \hat{J}(\phi, \Theta) - \Omega \frac{\partial}{\partial \Theta} \right] u(\phi, \Theta). \quad (\text{B6})$$

ここで,  $\hat{J}(\phi, \Theta)$  は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} \hat{J}(\phi, \Theta)u(\phi, \Theta) = & -\frac{\partial}{\partial\phi} \left[ v(\phi)u(\phi, \Theta) \right] - \frac{\partial}{\partial\phi} \left[ u(\phi, \Theta) \int_0^{2\pi} d\phi' \Gamma(\phi, \phi') f_0(\phi', \Theta) \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial\phi} \left[ f_0(\phi, \Theta) \int_0^{2\pi} d\phi' \Gamma(\phi, \phi') u(\phi', \Theta) \right] + D \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} u(\phi, \Theta). \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

線形演算子  $\hat{L}(\phi, \Theta)$  は  $\Theta$  を通して時間周期的なため Floquet 型である. ここにおいて, 次のような内積を定義する:

$$\left[ u^*(\phi, \Theta), u(\phi, \Theta) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi u^*(\phi, \Theta) u(\phi, \Theta). \quad (\text{B8})$$

そして, 線形演算子  $\hat{L}(\phi, \Theta)$  の随伴演算子を次のように導入する:

$$\left[ u^*(\phi, \Theta), \hat{L}(\phi, \Theta)u(\phi, \Theta) \right] = \left[ \hat{L}^*(\phi, \Theta)u^*(\phi, \Theta), u(\phi, \Theta) \right]. \quad (\text{B9})$$

部分積分により, 随伴演算子  $\hat{L}^*(\phi, \Theta)$  は次のように与えられることがわかる:

$$\hat{L}^*(\phi, \Theta)u^*(\phi, \Theta) = \left[ \hat{J}^*(\phi, \Theta) + \Omega \frac{\partial}{\partial\Theta} \right] u^*(\phi, \Theta). \quad (\text{B10})$$

ここで,  $\hat{J}^*(\phi, \Theta)$  の具体的な表式は次のようになる:

$$\begin{aligned} \hat{J}^*(\phi, \Theta)u^*(\phi, \Theta) = & v(\phi) \frac{\partial}{\partial\phi} u^*(\phi, \Theta) + \left[ \int_0^{2\pi} d\phi' \Gamma(\phi, \phi') f_0(\phi', \Theta) \right] \frac{\partial}{\partial\phi} u^*(\phi, \Theta) \\ & + \int_0^{2\pi} d\phi' \Gamma(\phi', \phi) f_0(\phi', \Theta) \frac{\partial}{\partial\phi'} u^*(\phi', \Theta) + D \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} u^*(\phi, \Theta). \end{aligned} \quad (\text{B11})$$

## B.2 Floquet ゼロ固有関数

以下の計算では左右の Floquet ゼロ固有関数のみが必要であり, それらは次のように与えられる:

$$\hat{L}(\phi, \Theta)u_0(\phi, \Theta) = \left[ \hat{J}(\phi, \Theta) - \Omega \frac{\partial}{\partial\Theta} \right] u_0(\phi, \Theta) = 0, \quad (\text{B12})$$

$$\hat{L}^*(\phi, \Theta)u_0^*(\phi, \Theta) = \left[ \hat{J}^*(\phi, \Theta) + \Omega \frac{\partial}{\partial\Theta} \right] u_0^*(\phi, \Theta) = 0. \quad (\text{B13})$$

式(B3)を  $\Theta$  で微分することで確かめられるように, 右ゼロ固有関数  $u_0(\phi, \Theta)$  は次のように書くことができる:

$$u_0(\phi, \Theta) = \frac{\partial}{\partial\Theta} f_0(\phi, \Theta). \quad (\text{B14})$$

右ゼロ固有関数(B14)との内積(B8)を用いて, 左ゼロ固有関数  $u_0^*(\phi, \Theta)$  は次のように規格化することができる:

$$\left[ u_0^*(\phi, \Theta), u_0(\phi, \Theta) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi u_0^*(\phi, \Theta) u_0(\phi, \Theta) = 1. \quad (\text{B15})$$

ここにおいて、次のよう等式が成り立つことに注意する:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \Theta} \left[ \int_0^{2\pi} d\phi u_0^*(\phi, \Theta) u_0(\phi, \Theta) \right] \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \left[ u_0^*(\phi, \Theta) \frac{\partial}{\partial \Theta} u_0(\phi, \Theta) + u_0(\phi, \Theta) \frac{\partial}{\partial \Theta} u_0^*(\phi, \Theta) \right] \\
&= \frac{1}{\Omega} \int_0^{2\pi} d\phi \left[ u_0^*(\phi, \Theta) \hat{J}(\phi, \Theta) u_0(\phi, \Theta) - u_0(\phi, \Theta) \hat{J}^*(\phi, \Theta) u_0^*(\phi, \Theta) \right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B16}$$

よって、左ゼロ固有関数  $u_0^*(\phi, \Theta)$  は次のように各集団位相ごとに規格化することができる:

$$\int_0^{2\pi} d\phi u_0^*(\phi, \Theta) u_0(\phi, \Theta) = 1. \tag{B17}$$

### B.3 摂動項を持つ非線形 Fokker-Planck 方程式

以上のことをふまえて、次のような摂動項を持つ単一の非線形 Fokker-Planck 方程式を考える:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} f(\phi, t) &= - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \left\{ v(\phi) + \int_0^{2\pi} d\phi' \Gamma(\phi, \phi') f(\phi', t) \right\} f(\phi, t) \right] + D \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} f(\phi, t) \\
&\quad - \epsilon \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \mathbf{Z}(\phi) f(\phi, t) \right] \cdot \mathbf{p}(t).
\end{aligned} \tag{B18}$$

摂動  $\epsilon \mathbf{p}(t)$  は十分に小さいとして、次のような射影を考える:

$$\dot{\Theta}(t) = \int_0^{2\pi} d\phi u_0^*(\phi, \Theta) \frac{\partial}{\partial t} f(\phi, t) \simeq \Omega - \epsilon \int_0^{2\pi} d\phi u_0^*(\phi, \Theta) \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \mathbf{Z}(\phi) f_0(\phi, \Theta) \right] \cdot \mathbf{p}(t). \tag{B19}$$

上の式変形で、次の等式を用いた:  $\int_0^{2\pi} d\phi u_0^*(\phi, \Theta) \frac{\partial}{\partial \phi} f_0(\phi, \Theta) = \Omega \int_0^{2\pi} d\phi u_0^*(\phi, \Theta) u_0(\phi, \Theta) = \Omega$ .  
よって、集団位相方程式は次のように書くことができる:

$$\dot{\Theta}(t) = \Omega + \epsilon \boldsymbol{\zeta}(\Theta) \cdot \mathbf{p}(t). \tag{B20}$$

ここにおいて、集団位相感受関数  $\boldsymbol{\zeta}(\Theta)$  は次のように与えられる:

$$\boldsymbol{\zeta}(\Theta) = \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{Z}(\phi) \left[ f_0(\phi, \Theta) \frac{\partial}{\partial \phi} u_0^*(\phi, \Theta) \right]. \tag{B21}$$

また、式 (B13) から、左ゼロ固有関数  $u_0^*(\phi, \Theta)$  は次のアジョイント方程式に従うことがわかる:

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \Theta} u_0^*(\phi, \Theta) = -\hat{J}^*(\phi, \Theta) u_0^*(\phi, \Theta). \tag{B22}$$

以上、集団位相方程式の導出を参考文献 [12] に基づいて述べた。付録 B の式変形は付録 A の式変形と一対一に対応していることに注意したい。非線形 Fokker-Planck 方程式は偏微分方程式であり、力学系としては無限次元力学系である。つまり、偏微分方程式 (無限次元力学系) の時間周期解も常微分方程式 (有限次元力学系) の時間周期解と同様に位相縮約できる場合がある。実際、熱対流系の時間周期解 (つまり振動対流) に対する位相記述法を定式化できることがわかっている [15].

## 謝辞

本研究集会で講演する機会を与えて下さいました山口義幸先生に感謝いたします。また、本原稿は参考文献 [8–12] に基づくものです。共同研究者である蔵本由紀先生、中尾裕也先生、郡宏博士、新井賢亮博士に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer, New York, 1984).
- [2] 蔵本由紀・河村洋史, 同期現象の数理 – 位相記述によるアプローチ (培風館, 2010).
- [3] K. Okuda and Y. Kuramoto, *Prog. Theor. Phys.* **86**, 1159 (1991).
- [4] E. Montbrió, J. Kurths, and B. Blasius, *Phys. Rev. E* **70**, 056125 (2004).
- [5] E. Ott and T. M. Antonsen, *Chaos* **18**, 037113 (2008).
- [6] E. Ott and T. M. Antonsen, *Chaos* **19**, 023117 (2009).
- [7] E. Ott, B. R. Hunt, and T. M. Antonsen, *Chaos* **21**, 025112 (2011).
- [8] Y. Kawamura, H. Nakao, and Y. Kuramoto, *Phys. Rev. E* **75**, 036209 (2007).
- [9] Y. Kawamura, H. Nakao, K. Arai, H. Kori, and Y. Kuramoto, *PRL* **101**, 024101 (2008).
- [10] Y. Kawamura, H. Nakao, K. Arai, H. Kori, and Y. Kuramoto, *Chaos* **20**, 043109 (2010).
- [11] Y. Kawamura, H. Nakao, K. Arai, H. Kori, and Y. Kuramoto, *Chaos* **20**, 043110 (2010).
- [12] Y. Kawamura, H. Nakao, and Y. Kuramoto, *Phys. Rev. E* **84**, 046211 (2011).
- [13] D. Haim, O. Lev, L. M. Pismen, and M. Sheintuch, *J. Phys. Chem.* **96**, 2676 (1992).
- [14] I. Z. Kiss, Y. Zhai, and J. L. Hudson, *Phys. Rev. E* **77**, 046204 (2008).
- [15] Y. Kawamura and H. Nakao, submitted. [arXiv:1110.1128]
- [16] H. Nakao, T. Yanagita, and Y. Kawamura, *Procedia IUTAM* **5**, 227 (2012).
- [17] H. Kori, Y. Kawamura, H. Nakao, K. Arai, and Y. Kuramoto, *PRE* **80**, 036207 (2009).
- [18] N. Masuda, Y. Kawamura, and H. Kori, *Phys. Rev. E* **80**, 046114 (2009).
- [19] N. Masuda, Y. Kawamura, and H. Kori, *New J. Phys.* **12**, 093007 (2010).
- [20] H. Kori, Y. Kawamura, and N. Masuda, *J. Theor. Biol.* **297**, 61 (2012).

## 付記

本原稿は 2012 年 9 月 26 日 (水) – 9 月 28 日 (金) にかけて開催された数理解析研究所研究集会「力学系の作る集団ダイナミクス – 保存系・散逸系の枠組みを越えて –」の講究録である。