

# 三体相互作用を持つ位相振動子ネットワークに生じる 複数の「連続的」なアトラクタについて

太田絵一郎, 田中琢真<sup>†</sup>, 青柳富誌生

京都大学情報学研究科, JST CREST

<sup>†</sup> 東京工業大学総合理工学研究科

Kaiichiro Ota, Takuma Tanaka<sup>†</sup>, and Toshio Aoyagi

Graduate School of Informatics, Kyoto University & JST CREST

<sup>†</sup> Department of Computational Intelligence and Systems Science, Tokyo Institute of Technology

## 1 導入

蔵本モデルに代表される結合位相振動子系については数多くの研究が報告されてきたが(例えば [1] を参照), 各振動子間の相互作用としては, 主に二体間のものだけが考慮されてきた. その一方で, 神経系のシナプス結合などにおいては, 三体以上の間でなされる複雑な相互作用の存在が知られている. そのような多体間の相互作用を持つ系では, より複雑な現象の発生が予想される [2]. この問題は, 解析的な取り扱いの困難さなどもあってほとんど研究されてこなかったが, 脳・神経系のような現実の系に関連してだけでなく, 数理的な観点からも興味深い問題と思われる. そこで本論では, 多体相互作用が力学系に及ぼす影響の一端を理解するために, 自己連想記憶として働く結合振動子系に三体相互作用を導入し, その影響を議論する. 自己連想記憶系は神経回路の理論で長く研究されてきた力学系モデルで, 結合系の特定の状態パターンを点アトラクタとして記憶することで, 不完全なパターン(初期条件)から正しいパターンを復元するモデルである. 今回, 三体相互作用の導入によって, それらの点アトラクタそれぞれが「連続的」な構造を持つアトラクタの群れに変化するという興味深い結果が得られた. 本論の次の通りである. まず第 2 節で三体相互作用を含む自己連想記憶の結合振動子モデルを導入し, 第 3 節でモデルの典型的な挙動とアトラクタ構造について考察する. その後第 4 節で, 関連する神経科学の実験事実を踏まえて, モデルの持つ「連続的」なアトラクタ構造が持ちうる機能的意義について議論し, 第 5 節で結論を述べる.

## 2 モデル

まず出発点として、以下の二体相互作用のみを含む結合位相振動子系を考える：

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j \neq i}^N J_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i + \beta_{ij}). \quad (1)$$

上式で  $\phi_i$  は位相変数で、 $2\pi$  の変動が一振動周期に対応する。また  $\omega_i$  は振動子  $i$  の自然振動数である。以下では簡単のために  $\omega_i$  が  $i$  によらず一定値をとる場合を考えるが、 $\omega_i$  が狭い範囲で分布する場合でも、得られる現象はほぼ同じであることを確認している。上式の右辺第 2 項は振動子間の結合を表しているが、その中のパラメータ  $J_{ij}$  および  $\beta_{ij}$  を

$$J_{ij} = |C_{ij}|, \beta_{ij} = \arg C_{ij}, C_{ij} = \sum_{\mu=1}^P e^{i(\theta_i^\mu - \theta_j^\mu)} \quad (2)$$

と定める。ここで  $\theta_i^\mu$  は、振動子  $i$  の  $\mu$  番目の記憶パターンを表す。上記のように結合を定めることで、( $\mu$  でインデックス付けされた)  $P$  個の振動子の状態  $\phi_i = \theta_i^\mu + \text{const.}, \forall i$  がそれぞれ別個の点アトラクタとなる [3, 4]。ここで、系全体の状態としては  $\phi_1 - \phi_2$  などの位相差のみが本質的で、全ての位相変数が一様に並進しても結合には影響しないことに注意する。この系のアトラクタ構造を、位相の並進対称性を省いて模式的に図示したのが図 1a である。つまり、適当な初期条件から出発すると、系の状態は式 (2) で指定した  $P$  個の位相差パターンのうちのいずれかに漸近する (図では  $P = 2$  個のパターンのうち、 $\mu = 1$  番目のものに漸近している)。この作用は、不完全なパターン (初期条件) から特定の記憶パターン ( $\theta_i^\mu$ ) を想起していると見なせるため、神経科学との機能的アナロジーから自己連想記憶と呼ばれる。結合パラメータを決める式 (2) は、神経科学におけるシナプス学習則である Hebb 則を、位相を持つ周期発火状態の系に拡張したものに对应している [5, 6]。

本論では、この自己連想記憶系に三体相互作用を導入した以下の系について検討する：

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j,k \neq i}^N J_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i + \beta_{ij}) J_{ik} \cos(\phi_k - \phi_i + \beta_{ik}). \quad (3)$$

この系は、各振動子  $i$  への入力 that 他の二つの振動子  $j, k$  の状態に依存して決まるような純粋な三体相互作用のみを含み、かつ含まれるフーリエモードを最低次に限定した比較的単純な結合の形を考えている。なお、この系において Hebb 則 (2) を適用する際のパターン数を  $P = 1$  個とすると、先行研究 [2] で検討された高い対称性を持つ系と等価となる。以下では、三体相互作用の導入によりアトラクタ構造がどのように変化したかについて述べ、その機能的意義について議論する。

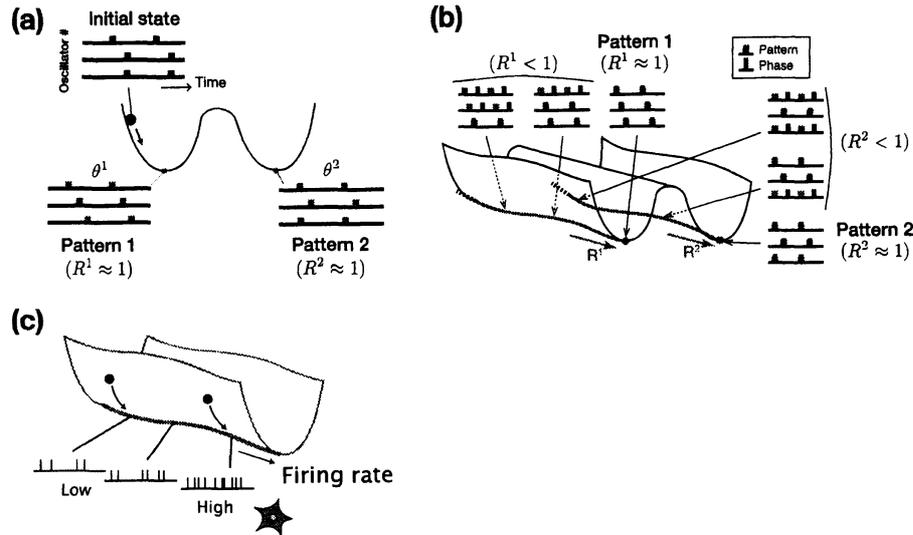


図1 (a) ランダムな位相パターンを  $P = 2$  個記憶させた連想記憶モデルのアトラクタ構造の模式図。ラスタ図では、 $\phi_i = 2n\pi$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) となる時刻に点を表示している。この場合、各パターンに対応する二つの点アトラクタが存在し、系の状態は常にそのどちらかに漸近する。その結果、対応する秩序パラメータ  $R^\mu$  の値は 1 へと近づく。(b) 三体相互作用を導入した系 (式 (3)) のアトラクタ構造の模式図。(a) での点アトラクタ ( $R^\mu \approx 1$ ) に加え、パターンが部分的に変化した ( $R^\mu < 1$ ) 多数の点アトラクタが存在する。これらは  $N \rightarrow \infty$  の極限では、 $R^\mu$  の値について稠密に存在する。(c) 神経科学で提唱された連続的なライン・アトラクタの模式図。線状のアトラクタに沿って、神経細胞の発火頻度が変化する構造を持つ。

### 3 結果

三体相互作用を導入した系を様々な初期状態から時間発展させると、図 1a に示したような、記憶パターンに一致する状態の点アトラクタの他に、数多くの定常状態が存在することがわかる。そこで、それらの定常状態がどのような状態であるかを特徴づけるため、系の状態  $\{\phi_i\}_i$  と各パターン  $\{\theta_i^\mu\}_i$  との相関の大きさを表す同期度パラメータを

$$R^\mu = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N e^{i(\phi_i - \theta_i^\mu)} \right| \quad (\mu = 1, \dots, P) \quad (4)$$

と定義する。 $R^\mu$  は、系全体の状態と  $\mu$  番目のパターンとの相関を表し、0 (無相関) から 1 (一致) までの値を取る (例えば図 1a に示した点アトラクタでは、 $R^\mu \approx 1$  となっている)。

ランダムな位相パターンを  $P = 2$  個記憶させた三体相互作用系を様々な初期条件のもとで走らせると、様々な定常状態に至る。そこで定常状態での  $R^1$  の値を見ると、ある範囲で分布

することがわかる (図 2a). 図では縦軸が最終状態における  $R^1$  の値に対応し, 図中の “UB” と “LB” で示した点の間の区間で, 様々な値を取っていることがわかる. この結果は, この範囲の  $R^1$  の値に対応する非常に多数の点アトラクタが存在することを示している. 同様の結果は  $R^2$  についても確認できる. より詳細な数値的検討の結果, 振動子数  $N$  が大きい極限では, これらの点アトラクタがさらに  $R^\mu$  の区間内に稠密に存在することも確認できる. このように  $N \rightarrow \infty$  で区間内に稠密にアトラクタ点群が並ぶ状況を, 以降は「連続的」とカッコ付きで表現することにする. 数学的には連続でないのにも関わらずこのように表現する理由は, 次節で議論するような連続値の符号化という機能を実現する観点からは, 可算無限程度の点があれば実際上十分であると考えられるからである. 以上より, この系には多数の点アトラクタが存在し, それらに対応する  $R^\mu$  の値で並べたとすると, 「連続的」に並ぶ一続きの構造を持つことがわかった (図 1b). 記憶パターン数  $P$  を 2 から増やし, 同様の検証を行った結果を図 2b に示した. ここでは図 2a で示した区間の両端 UB, LB に対応する点のみをプロットしている. 記憶パターン数  $P$  を増加しても, 系のサイズ  $N$  が十分大きければある  $R^\mu$  の区間で稠密にアトラクタが存在すると思われる. すなわち, 「連続的」なアトラクタ構造は, 記憶させたパターンのそれぞれについて  $R^\mu$  のある区間をカバーする形で存在する.

これらの結果は系への弱い摂動 (雑音, 結合パラメータや自然振動数の分布) に対して構造安定であることも数値的に確認している. また, 同様の現象が周期発火する神経細胞モデルに適当な形の三体相互作用を導入した結合系でも再現できることも確認した. つまり, 縮約された位相振動子モデルに特有の現象ではなく, 摂動を含む現実的な系でも同様の現象は実現される.

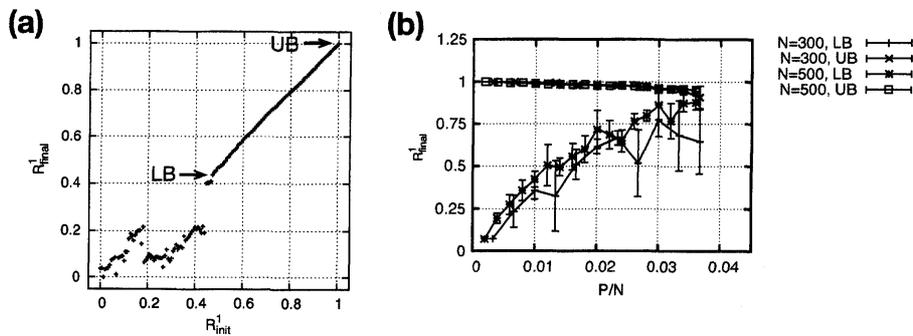


図 2 (a) 三体相互作用を導入した系 (式 (3)) を, 様々な初期条件で数値計算した結果. 横軸に初期のパターン 1 との相関  $R_{init}^1$  と, 縦軸に十分時間が経った定常状態における値  $R_{final}^1$  を示す. 二体相互作用のみの系と対照的に,  $R_{final}^1$  はある範囲 (図中 LB から UB まで) において連続的に見える様々な値を取る. (b) 記憶パターン数  $P$  を増やした場合, 秩序パラメータの値で見たアトラクタの存在領域.  $N = 300, 500$  で, それぞれ 5 回の試行の結果をプロットしている. UB, LB はそれぞれ, アトラクタの存在領域 (図 a も参照) での  $R_{final}^1$  の最大値と最小値である.

## 4 議論

ここまで、三体相互作用を導入した自己連想記憶モデルでは、記憶させたパターンの個数に応じた「連続的」なアトラクタ群が生じることを見た。ここでは、このようなアトラクタ構造が担いえる神経科学的機能について、対応する実験事実を踏まえながら考察する。動物の神経回路において、連続的なアトラクタを活用してアナログ情報を保持していることを示唆する報告が多数なされている [7, 8]。例えば Aksay らの金魚を用いた実験研究では、Area I と呼ばれる神経核に存在する上位運動ニューロンの発火頻度が、眼球の水平方向位置（角度）と比例することが報告された [7]。この事実は、眼球位置というアナログ情報が、神経回路において発火率で符号化されていることを示唆している。眼球位置の情報は、神経系に内在する雑音に対してもある程度安定に保持されており、この安定性が眼球位置を一定に保つのに必要であることも指摘されている。このような神経回路によるアナログ情報の安定な保持を説明する為に、理論的な観点から、力学系としての神経回路に中立安定な連続的アトラクタ群（ライン・アトラクタ）が存在するという仮説が提唱された [9]（図 1c）。これは、系の状態が連続的なライン・アトラクタ上のどこにあるかによってアナログ情報を表現し、アトラクタの安定性により外乱の影響を抑えているという仮説である。この仮説に基づき、ライン・アトラクタを実現する様々な神経回路モデルが提唱されている [10–12]。これらは全て、ライン・アトラクタに沿って神経細胞の発火率が連続的に変化する、発火率符号化に基づくアナログ情報保持を説明するものである。これらに対し、本論で検討したモデルにおいては、同等の機能を持つ「連続的」なアトラクタ群が存在し、それらに沿って神経細胞スパイク列の時間的情報である同期度が増減した。すなわち、神経回路にある種の多体相互作用を導入することにより、複数のアナログ量を時間的符号化するという機能が備わる可能性を示唆している。このような時間的符号化を実証する実験報告は現時点で存在しないが、既存のものを含めた多細胞のスパイク列データを解析する上で、発火率以外に、多細胞間のスパイクの時間的情報に注目する視点の重要性を示唆する結果であると言える。

## 5 結論

本論では、結合振動子系における多体相互作用の影響を調べるため、従来研究されてきた自己連想記憶系のモデルに三体相互作用を導入したモデルを検討した。その結果、Hebb 学習則により記憶させたパターンのそれぞれに対応するアトラクタ群が生じ、それらが同期度パラメータで見て「連続的」に並ぶ構造（図 1b）を持つことを示した。これは神経科学において提唱されているライン・アトラクタと同等のアナログ値保持という機能が、従来と異なる時間的符号化によっても実現されうることを示唆しており、多体相互作用の持つ機能的意義の一つ

として興味深い。

## 参考文献

- [1] 蔵本 由紀, 河村 洋史. 同期現象の数理—位相記述によるアプローチ. 非線形科学シリーズ. 培風館, 2010.
- [2] T. Tanaka and T. Aoyagi. Multistable Attractors in a Network of Phase Oscillators with Three-Body Interactions. *Physical Review Letters*, 106(22):224101, 2011.
- [3] J. Cook. The mean-field theory of a Q-state neural network model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22:2057, 1989.
- [4] T. Aoyagi. Network of neural oscillators for retrieving phase information. *Physical Review Letters*, 74(20):4075–4078, 1995.
- [5] D. Hebb. *The Organization of Behavior*. Wiley, New York, 1949.
- [6] J. J. Hopfield. Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79(8):2554–2558, 1982.
- [7] E. Aksay, G. Gamkrelidze, H. S. Seung, R. Baker, and D. W. Tank. In vivo intracellular recording and perturbation of persistent activity in a neural integrator. *Nature Neuroscience*, 4(2):184–193, 2001.
- [8] C. D. Brody. Timing and Neural Encoding of Somatosensory Parametric Working Memory in Macaque Prefrontal Cortex. *Cerebral Cortex*, 13(11):1196–1207, 2003.
- [9] H. S. Seung. How the brain keeps the eyes still. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 93(23):13339, 1996.
- [10] P. Miller, C. D. Brody, R. Romo, and X. J. Wang. A recurrent network model of somatosensory parametric working memory in the prefrontal cortex. *Cerebral Cortex*, 13(11):1208–1218, 2003.
- [11] A. A. Koulakov, S. Raghavachari, A. Kepecs, and J. E. Lisman. Model for a robust neural integrator. *Nature Neuroscience*, 5(8):775–782, 2002.
- [12] Y. Loewenstein and H. Sompolinsky. Temporal integration by calcium dynamics in a model neuron. *Nature Neuroscience*, 6(9):961–967, 2003.