

教師に必要な数学的素養の育成 ～教科内容の背景にある数学～

中部大学・現代教育学部 金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)
College of Contemporary Education
Chubu University

鹿児島大学・教育学部 安井孜 (Tsutomu Yasui)
Faculty of Education
Kagoshima University

奈良教育大学・数学教室 花木良 (Ryo Hanaki)
Department of Mathematics
Nara University of Education

奈良教育大学・数学教室 河上哲 (Satoshi Kawakami)
Department of Mathematics
Nara University of Education

大阪府立大学大学院・理学系研究科 山中聡恵 (Satoe Yamanaka)
School of Science
Osaka Prefecture University

0. 序

研究チーム第3班は、小学校・中学校・高等学校の数学教師に必要な数学的素養の育成を目的とした。

教員養成系大学に勤めている数学教員として、学生の教育実習や現職教員の授業を参観することがある。そこで、生徒の質問に適切に答えられていない場面を目にすることが多い。数学の授業において、教師が教科書に書いてある内容の伝達に留まっており、数学の体系を意識して教えられていなかったり、数学の深い理解ができていなかったりする。

The Mathematical Education of Teachers やヴィゴツキーは次のように主張している。数学教師希望者には彼らが教える数学の深い理解を発展させる数学コースが必要であること、体系的概念の形成についての認識を重視し、将来をも見据えた体系的性と演習問題を解くことなどのバランスを考えた教育が必要である。

数学教師になるためには、大学の教育において、数学を発展・創造させる経験、数学の体系的理解が必要不可欠であると考えられる。そのためには、数学を学

生自ら一般化したり、小学校・中学校・高等学校で学習する数学内容で証明されていない事柄の証明や背景を知ったりする授業を展開することが必要である。

以上のように、学校教育の教科内容の背景にある数学を体系的に理解しておくことは、数学教師の数学観、教材分析力・開発力の向上に有効である。

研究チーム第3班は、平成22年9月発行の数理解析研究所講究録1711「数学教師に必要な数学能力に関する研究」において第8論文で学校教育の教科内容の背景にある数学の事例を紹介した。

本講究録においては、5人による下記の4編の論文において、教師に必要な数学的素養の育成に寄与する教材、特に教科内容の背景にある数学の事例を提起する。

目次

1. 算数・数学におけるいくつかの教材の背景と体系的概念 … 金光 三男
2. 大学の数学は学校教育、社会生活における数学の背景となっているか1
～面積の場合～ … 安井 孜
3. オイラーの多面体公式の数学的背景とその応用 … 花木良
4. 平均と不等式 … 河上 哲・山中 聡恵

1. においては、数学教育と体系的概念、教科書を中心とした三平方の定理とその逆、教材の素材として三平方の定理とグラフ理論について説明する。

2. においては、面積の概念について、小学校・中学校・高等学校の教科書を分析し、大学で使われているテキストの内容を調査し、その分析結果と主張について述べる。

3. においては、平面グラフと多面体、オイラーの多面体公式の証明と応用、ピックの定理を紹介する。

4. においては、相加平均と相乗平均の大小関係の一般化について、その背景にある関数の凸性の概念との関係について、体系的な理解ができることを紹介する。

1. 算数・数学におけるいくつかの教材の背景と体系的 概念

中部大学現代教育学部 金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)

College of Contemporary Education,
Chubu University

1. はじめに

G. ポリアは、[9](ポリア、1964年)において「教員は適当なレベルで創造的な数学の仕事を行う機会が与えられることが重要である。」と述べている。教員のみならず子どもの指導についても、算数・数学に対して創造性の育成・創造的実践力の重要性を記載した内容をあちこちの文献(例えば、[11](数学教育研究会編、2010年))で見ることができる。問題の発展的な指導、多様な考え方やオープンエンドで見られる多様な解答は発展性のある子どもの育成に必要であることが以前から叫ばれ、実践されつつある。これはまた算数・数学科の教科書に書かれた例や問いを理解しやすく指導するだけでは十分といえず、その背景や体系的な概念などを教師側は把持する必要あることを示している。

ここではまず、ヴィゴツキーの言う「科学的概念と生活的概念」([7](中村和夫、2004年))や[1, 2](朝日新聞、2011年)の内容についての紹介と関連した考察をしよう。

また、中学の教科書にある三平方の定理と逆及びその周辺についての内容の発展・背景について述べてみる。更に、これをグラフ理論の題材を使用して教材の素材の作成に向けて考察してみよう。

2. 数学教育と体系的概念

心理学のモーツアルトと呼ばれているロシアの心理学者ヴィゴツキー([7](中村和夫、2001年))が生活的概念と科学的概念の発達の違いについて述べている内容の紹介を中心として考察してみよう。

科学的概念は子どもが学校で科学的知識の体系を習得することにより発達するが、生活的概念は子どもの個人的な体験の中で、体系性を欠いたまま発達するという。体系の在る無しが決定的で、体系の外の概念では、対象自身の間の経験的結合だけに限られる。ところが、一定の体系の中に在るときは、対象と他の概念との関係を経由した概念と概念の間接的な関係が生まれ、対象に対する概念の全く別の経験を越えた結合が可能になり、別の関係が出てくる。

この点について、数学教育で積極的な配慮することが必要である。特に教員希望の大学生については、個々の演習問題を低レベルで解くことのみで終始する教育で

はなく、体系的概念の形成についての認識を重視し、将来をも見据えた体系性と演習問題を解くことなどのバランスを考えた教育が必要である。

具体的な知識は、先ず普遍化され学ぶことができるように体系化され、ヴィゴツキーのいう科学的概念の位置付けを理解して具体的な数学はその体系的概念を考慮に入れて理解することが重要である。このことから、数学の内容の背景を考察することの意義が伺われる。

更に、[1](朝日新聞(の記事佐藤学)、2011年)の「…これまで採り入れてきたディベートや、わからない子にわかる子が教える『学びあい』ではなく、互いに考えをひびきあわせ、共同で創造する授業にもっと転換すべきだ」ということも数学に関しては意義のあることである。ヴィゴツキーのいう他者との対話によって思考が生まれるという立場に立てば、個々の子どもに対する数学の「発達の最近接領域」に関して対話(新学習指導要領で言われている算数・数学的活動にも関連している)が重要となる。

また[1](朝日新聞、2011年)に記載してある2人の先生が、多くの教師を生徒と見て行った模擬授業で、「円柱の展開図は何と何でできていますか?」という投げかけに、一連の問答「円と長方形」「ほかにないですか?」「…」「立方体や直方体の展開図は辺で切りますね。なぜ円柱は辺がないのに、長方形と円にするんですか。ルール違反だと思いませんか」。クラスの子どもたちの円柱の紙を切り開いた図には、長方形の部分が平行四辺形で円の部分は数個の円の部分に分割されて切ったものを見せて(トイレットペーパーやラップの芯を例にして、斜めに切れ目が入っていることを指摘、将来役立つのは、長方形と円の展開図だけとは限らないことを強調されている)「どれも正解。図形の発想が豊かになります」。

この例のように、「決まった方法で、速く正確に答える」という授業とは異なる視点の授業が期待される。

これに関連することとして[6](黒田恭史、2010年)の序文に「算数の問題を正確に素早く解くことの可否だけでなく、児童が算数を創る力や、他者に発表・交流する力といった新たな算数教育の評価のあり方について、具体的な項目…」の記述がある。もう一つの例として良く行われている授業であるが敢えて下記に述べておこう。

実際に小学校の教育で言えば、[6](原和夫、2010年)にあるように、算数では「教えるべきことはきちんと教え、教えたがたいことは教えない(子どもに発見させる)ことが、算数好きの子どもを増やすコツです」という内容を心に留める必要がある。

ヴィゴツキーの最近接領域に関連して、現在はさほど出来は良くなくても潜在的には数学の学力を持っている子どもの数学学力の開発や、創造性の育成・創造的実践ができる数学的内容は至る所に存在していて、それを意識するかどうかも大切だと思われる。

また朝日新聞記事([2]、2011年)に記載されたクリッカーで授業が盛況という記事がある。理系、医薬系の授業での使用が多く、学生の授業への参加意識と集中力が高まる可能性があり、挙手のように周りの雰囲気を感じずに自分の意見を反映できることがメリットである。「今の学生は考えを持っているけれど、うまく表現できないだけ。発言のきっかけになるんです」と記事にある。

3. 教科書を中心にした三平方の定理とその逆

良く知られていることではあるが、三平方の定理の歴史について先ず述べて次に教科書での扱いなどを見て考察しよう。

歴史については、[10](佐藤修一、1998年)に詳しく述べてあるが概要について復習してみよう。

ミュージカル「オズの魔法使い」に出てくるワラのかかしは、頭脳を授かってから最初の言葉が三平方の定理の内容であった。平安時代の大工さんが直角を作るとき、3:4:5の長さの紐を作った。もっと昔のエジプト人は土地の測量に経験的に辺の長さが3:4:5の直角三角形が存在することを知っていたと言われている。バビロニアでは3:4:5のみでなく、5:12:13も知られていてこれが、エジプトに伝来して、測量に使用されるようになったという。このことは、インドや中国でも古くから知られていた。

三平方の定理はピタゴラスの定理と呼ばれていたが、第2次世界大戦中の敵性用語使用禁止によって、末綱恕一が案として出し、昭和17年に「三平方の定理」と命名された。ピタゴラスはイタリアで活躍したので敵国ではないが「横文字」という理由で使用禁止になったと言われている。中国から輸入された「勾股弦の定理」という名称も存在していた。

現在では、ピタゴラスの定理とだけ言うと内容の理解ができない大学生も見られ三平方の定理という必要がある。

古くは、三平方の定理は面積に関する定理であるとだけ認識されていて、近年のような辺の長さの平方に関する定理であるという意識はなかった。近代的な数概念が発達して文字の使用により辺の長さの平方に関する定理と認識されてきた。

さて、中学校の数学の教科書[8](岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武他38名、2008年)から、三平方の定理がどのように記載されているか調べてみよう。三平方の定理は中学校の図形の学習の中での1つの到達点である。

この教科書では、新しい内容を学習するきっかけとなる問題として、最初に直角三角形を色々書き、その三辺の外側に正方形をそれぞれ作り、方眼紙で読み取り見当を付ける。帰納的に類推させている。また、教科書[8](岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武他38名、2008年)には、歴史的な内容が「数学展望台」というコラム的な内容や、「もっと知りたい 三平方の定理の逆」などの頁が設けられている。

証明1 (本文、ピタゴラス自身による証明) 直角を挟む2辺 a, b の長さで斜辺 c の長さの直角三角形4個を用意する。この4枚を正方形の外側の周りに1辺が $a+b$ の正方形の枠内に貼って2種類のパターンを考える。この面積 R が他の辺の外側に作った正方形 P, Q の面積の和になることを証明する。演繹的推論による。

この教科書の「もっとくわしく 三平方の定理の証明」の頁には以下のような証明方法を示すための図が掲載してある。

証明 2 ユークリッド原論にあるピタゴラス (紀元前 570 頃～紀元前 490 年頃エーゲ海のサモス島で生まれた) による正統的な証明法

この三平方の定理の証明法が、中学校の数学で理解が難しいとされ、数学嫌いや論証嫌いが始まるという人もある。

証明 3 江戸時代の和算家の建部賢弘 (徳川吉宗に仕えた) の証明法

証明 4 インドのバースカラ (1114～1185 年頃) が彼の著書で「見よ」とだけ書いた証明図による方法

その他、この教科書には記載してないが、[Sa](佐藤修一、1998 年) に記載してある三平方の定理の証明法として、

証明 5 アメリカの第 20 代の大統領ガーフィールドによる証明

証明 6 アインシュタインが小学生のとき見つけた証明法

証明 7 垂線を下して三角形の相似から証明する方法

証明 8 円を描き接弦定理から三角形の相似に持ち込み証明する方法

証明 9 その他 (数百種類あると言われている)

次に三平方の定理とその逆について中学校・高等学校の教科書を中心にして応用例を列挙してみよう。

- (1) 1 辺の長さが与えられた正三角形の高さを求めるとき
- (2) 1 組の三角定規に関連して種々の長さを求めるとき
- (3) 半径の与えられた円の中心からの距離も与えてある弦の長さを求めるとき
- (4) 2 点間の距離を求めるとき
- (5) 直方体の対角線の長さを求めるとき
- (6) 正四角錐で、底面が正方形でその 1 辺の長さが与えられ、また他の辺の長さも与えられてすべて等しい正四角錐の高さと体積を求めるとき
- (7) 底面の半径と側面の長さが与えられたとき、円錐の高さと体積を求めるとき
- (8) \sqrt{n} の作図に利用
- (9) 円の接線や弦の長さを求めるとき
- (10) 中線定理 (パップスの定理) に利用
- (11) 立体の切り口の長さや面積を求めるとき
- (12) 球の切り口の円の半径を求めるとき
- (13) その他 (多数あり)

三平方の定理の拡張、応用としては、良く知られているように

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

- 余弦定理

- フェルマーの大定理

などがある。

三角形 ABC で $\angle A$ が直角でない場合、三平方の定理に相等する定理として $\triangle ABC$ において、頂点 C から辺 AB またはその延長に引いた垂線との交点を D とする。このとき、

(a) $\angle A > 90^\circ$ なら、 $BC^2 = ab^2 + AC^2 + 2AB \cdot AD$ 。

(b) $\angle A < 90^\circ$ なら、 $BC^2 = ab^2 + AC^2 - 2AB \cdot AD$ 。

これは余弦定理の特別の場合である。

[5](古藤怜、1991年)に記載してある「 $1+2=3$ を拡張せよ」という問題がある。勿論答えは一つとは限らない。一例として、

$$1+2+\cdots+14=15+16+\cdots+20=105 \text{ というのがある。}$$

これを一般化すると、下記の問題となる。

問題： $1+2+3+\cdots+k=(k+1)+(k+2)+(k+3)+\cdots+n$ を満たす整数 k と n を求めよ。

この問題は Do Math の指導にも関連して、この問題の背景にはピタゴラス数や Farey 級数に関係してくる。ここで Farey 級数の定義を復習しよう。

正の整数 n を超えない分母・分子を有する既約分数を大きさの順序に並べて、それを n に対応する Farey 級数 (Farey 数列と呼ぶべきかも知れないがここでは Farey 級数としておく) という。例えば、最初の方を書くと、

$$n=1; \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$$

$$n=2; \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

$$n=3; \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$$

$$n=4; \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$$

$$n=5; \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

$$n=6; \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$$

この Farey 級数を見て何か規則性を見つけるとき、「これが正解」というものがないので、児童一人一人が多様な解を見つけることができるだろう。

例えば、 $\varphi(n)$ を n に対する Euler 関数、 $\phi(n)$ を n に対する Farey 級数の元の個数、 $f(n)$ を n に対応する Farey 級数の元の和とすると、

$$n \geq 2 \text{ のとき、} \phi(n) - \phi(n-1) = \varphi(n),$$

$$f(n) - f(n-1) = \frac{\varphi(n)}{2}$$

などが成立することを見出すかも知れない。

Do Math 指導の内容では、三平方の定理に関連して、斜辺の長さ c 、他の2辺の長さを a, b とする直角三角形において、各辺の外側に辺の長さを1辺とする正方形を付けて斜辺に対応する正方形の面積を S_1 、他の2辺につけた正方形の面積を S_2, S_3 とすると、 $S_1 = S_2 + S_3$ が成立する (教科書に見られるユークリッドによる三平方の定理の証明法)。ここで正方形を、正三角形、直角二等辺三角形、半円や $\frac{1}{4}$ 円など3つとも相似な図形で置き換えて出来る面積を同様に S_1, S_2, S_3 としても、同様に $S_1 = S_2 + S_3$ が成立することは良く知られている。

4. 三平方の定理とグラフ理論—教材の素材—

先にも述べたように、昔は三平方の定理は面積に関する定理とされていたが、数や式の概念の発達によって辺の長さの平方に関する定理という見方に変化した。この長さを実数のみ考察するのではなく、有限な数 (整数の剰余類) で考えたときどのような性質があるかを考察しよう。

ここで有限な数 (剰余類) について簡単に復習しておく ([4](石橋康徳、2006年))。

数の周期あるいは数の循環などの例として、四季、月の移り変わり、曜日、時刻や天体の運動などがある。このような循環する数の世界での足し算、引き算、掛算の基本計算を取り扱う。

等間隔に円周上にある3つのバス停 A, B, C が時計の回る順にこの順番に並んでいるとする。A を 0、B を 1、C を 2 とする。各バス停を時計廻りで次のバス停に移動するとき 1 とし、反対廻りに移動するとき -1 とする。従って、バス停 A から B を経由して C に時計廻りで行くとき、A から B に移動することで 1、B から C に移動することで 1 だから、合わせて $1+1=2$ となり、2 はバス停 C であるから C のバス停にいることになる。掛算は足し算の同数累加と考えればよい。今の例では、整数環 \mathbf{Z} のイデアル (3) による剰余環 \mathbf{Z}_3 の剰余類 $\{0, 1, 2\}$ の計算をしていることになる。本当は剰余類 $0, 1, 2$ は $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ などと $0, 1, 2$ とは区別して表現すべきかもしれないがここでは、略記して同じ数字で表すことにする。

同様に整数環 \mathbf{Z} のイデアル (n) による剰余環 $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$ を考える。但し、 $n \geq 0$ としておく。

三平方の定理は $X^2 + Y^2 = Z^2$ において、変数 X, Y, Z が \mathbf{Z}_n の元のことを考えよう。

剰余環 \mathbf{Z}_n の零因子全体を $Z(\mathbf{Z}_n)$ とし、この零因子の集合から 0 を除いたものを $Z^*(\mathbf{Z}_n)$ とおく。

頂点集合を $Z^*(\mathbf{Z}_n)$ 、 \mathbf{Z}_n の元 a を固定する。異なる2頂点 x, y が $x^2 + y^2 = a^2$ を満たすとき x, y を結ぶ辺とする。このようなグラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_n)$ を a -ピタゴラスグラフということにする。

例, $n = 15$ に対して、 $\mathbf{Z}_{15} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 12, 13, 14\}$ 。

単元の個数はオイラー関数 $\varphi(15) = 15(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 8$ 。よって $|Z^*(\mathbf{Z}_{15})| = 15 - 8 - 1 = 6$ 。但し、 $||$ はその集合の元の個数を表すものとする。

実際、 $Z^*(\mathbf{Z}_{15}) = \{3, 5, 6, 9, 10, 12\}$ 。 $Z^*(\mathbf{Z}_{15})$ においては、 $9 = -6, 10 = -5, 12 = -3$ である。

剰余類の計算は、通常の計算をして15で割り余りを求めればよい(いつでも途中で15で割り余りを求めてもよい)から、この方式で2乗を計算すると、

$$0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 1, 5^2 = 10, 6^2 = 6, 7^2 = 4, 8^2 = 4, 9^2 = 6,$$

$$10^2 = 10, 11^2 = 1, 12^2 = 9, 13^2 = 4, 14^2 = 1$$

零因子についての2乗を抜き出すと、

$$3^2 = 9, 5^2 = 25 = 10, 6^2 = 36 = 6, 9^2 = 6, 10^2 = 10, 12^2 = 9。$$

0-ピタゴラスグラフ

0-ピタゴラスグラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_{15})$ において隣接している頂点は、3と6、3と9、6と12、9と12で、4つの辺ができる。

このグラフでは、三角形はできない。また四角形は1個、2-マッチング(2辺が頂点を共有しないときこの2辺の組みを2-マッチングという)の個数は2個である。このことから大学初年級の題材としてグラフの固有多項式 $f(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^4$ であることがいえる。更に、彩色数は2である。

式とグラフの関連を示していて、丁度このことは新学習指導要領でより重視されている「算数的活動」の中の「具体物を用いたり、言葉、数、式、図、数直線を用いたりして、説明する活動」の大学版といえる。

0-ピタゴラスグラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_{15})$ から多様な問題を見つけることができるので教材化できる。

1-ピタゴラスグラフ

この1-ピタゴラスグラフの隣接している頂点の作る辺は、5と6、5と9、6と10、9と10の4つである。0-ピタゴラスグラフと殆ど同じ形のグラフである。

2-ピタゴラスグラフ

この2-ピタゴラスグラフの隣接している頂点の作る辺は、3と5、3と10、5と12、10と12の4つである。0-ピタゴラスグラフや1-ピタゴラスグラフと殆ど同じ形のグラフである

3, 5, 6-ピタゴラスグラフ

このグラフはどれも空グラフである。

a -ピタゴラスグラフはこのどれかに帰着される。従って、四辺形1個と孤立点2個から成るグラフか、空グラフの2種類しかない。従って、彩色数は1か2である。

参考文献

- [1] 朝日新聞、1月1日の記事(教育あしたへ1)、2011年 朝日新聞社
- [2] 朝日新聞、2月21日の記事(クリッカーで授業盛況)、2011年 朝日新聞社
- [3] 原一夫、新任教師のしごと 算数科授業の基礎基本、2010年 小学館
- [4] 石橋康徳、算数学—学習材と理論—、2006年 日本評論社
- [5] 古藤怜・上越数学教育研究会Z会、算数・数学におけるDo Mathの指導、1991年、東洋館出版社
- [6] 黒田恭史、初等算数科教育法—新しい算数科の授業をつくる—、2010年、ミネルヴァ書房
- [7] 中村和夫、ヴィゴツキー心理学—完全読本—、2004年 新読書社
- [8] 岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武他38名、楽しさ広がる数学3、2008年、新興出版社啓林館
- [9] G. ポリア(柴垣和三雄・金山靖夫訳)、数学の問題の発見的解き方1、1964年、みすず書房
- [10] 佐藤修一、自然にひそむ数学—自然と数学の不思議な関係—、1998年、講談社
- [11] 数学教育研究会編、新訂 算数教育の理論と実際、2010年、聖文新社

2. 大学の数学は学校教育，社会生活における数学の背景となっているか—1

—面積の場合—

鹿児島大学教育学部 安井 孜 (Tsutomu Yasui)
Faculty of Education, Kagoshima University

1 動機

The Mathematical Education of Teachers[1]によれば，アメリカでは，「学校で教えられるトピックスは大変基本的なので，それらを教えるのは簡単だとしばしば思われている [1, Preface].」日本でも，数学を専門としない大学の教員ですらそのように思っている者が多くないだろうか．さらに，[1, Chapter 9]は魅惑的まことしやかな言葉として「標準的数学専攻のコースワークが高校数学をうまく教えるために必要な論証技術を発展させる。」と述べ，続いて「これは teacher effectiveness の研究で支持されてこなかった．National Center for Research in Teacher Education は，彼らが教えている科目を専攻した教師はしばしば，他の教師よりその科目の基本的概念をうまく説明できるわけではないことを見つけた。」と述べている．

このようなデータが日本にもあるかどうか分らないが，この魅惑的な予定調和論は日本でも広く信じられていないだろうか．

[1]の11個の提言のうち，提言1で次のように述べている．

「数学教師希望者は彼らが教える数学の深い理解を発展させる数学コースを必要とする．

全てのレベルで教師に必要な数学の知識は重要で，他の数学に関する職業を求める学生に要求されるものとは大変異なる．」

日本の場合，教員養成系大学・学部の授業内容は，高い立場から初等・中等教育の数学を見据えているのだろうか．分野，テーマによっては，単に難しくなっているだけで，面積はその例ではないのかと思い調べてみた．

鹿児島大の現状：線形代数，解析幾何，ベクトル解析で，面積の求め方(公式の証明)は紹介する．微積分では，高校の知識を仮定する．小学校専門科目の中で，ユークリッドの原論の中の面積の性質は紹介する．学生の方，概念的な話題には関心が薄く見える．他専修の学生には特にその傾向を強く感じる．積分の応用としての面積の公式(後述する分析の項目の式(*))については，図で説明するに止めると担当者は言うが，数人の学生に確認したところ，全員がきちんと証明を聞いたと証言した．証明についても，教員と学生の間には認識の差があった．

2 教科書による分析

ここでは初等・中等教育の特定の教科書 [2], [3], [4] と、大学の授業で現在使われると思われるテキストの内容を比べる。

2.1 小学校・中学校・高等学校の教科書

1. 小学校では：量としての面積は、小学4年で、単位正方形を用いて長方形に対して与えられる。ここで、辺の大きさは自然数に限定される。小数×小数や分数×分数の計算は学ぶが、辺の大きさが小数で与えられるものは扱わない。[2]では、真分数×真分数の説明に面積で説明するが、面積として扱ってはいない。しかし、辺の大きさが分数で与えられる長方形の面積が扱われるかどうかは教科書による。続いて、ユークリッドの「原論」の発想で、平行四辺形、三角形、多角形の面積が与えられる。

5年で円の面積を、内面積と外面積の平均をとることにより計算する。

2. 中学校では：立体の表面積を学ぶ。相似な図形の面積の比は相似比の2乗という記述は現れない。

中学校では、もはや長方形、三角形の面積は扱わないが、現れる場合でも、辺の大きさは**実数**になっている。

3. 高校では：まず、三角関数を用いて三角形の面積の表現を学ぶ(数学 I)。数学 II, 数学 IIIでは、 $f(x) \geq 0$ $[a, b]$ のとき、このグラフ、 x 軸、 $x = a$, $x = b$ で囲まれる面積を S を、定積分の応用として学ぶ。

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (*)$$

証明のアイディアは、直観的で、指定された区域で面積が確定することを前提に、 a から x までの面積 $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数になることを示す [4]。教科書によっては、連続関数が閉区間で最大値・最小値を持つこと(最大値・最小値の定理)を証明なしに記述し、中間値の定理を証明なしに記述し、面積を持つことを前提に、これらを用いて公式(*)を証明するものもある。

もちろん、ここに記述された定理の証明は、高校数学の範囲を超えている。

中学・高校では、面積の定義は現れない。高校までは、面積は存在(確定)が前提となっている。連続関数の基本的な性質は述べるに止まる。

2.2 大学では

平成 22 年度 RIMS 共同研究「数学教師に必要な数学能力に関連する諸問題」第 1 班は、教員養成系大学・学部で授業されている講義内容を調べている (2010 年 12 月)。面積を項目に含むものは以下の通りである。

線形代数学 1 - 06(アファイン部分空間, 内積等),
 1 変数の微分積分学 2 - 13(回転体の体積と表面積),
 多変数の微分積分学から 2 - 23(曲面積の計算法),
 初等幾何・球面幾何から 5 - 09(球面三角形の面積公式),

初等幾何, 解析幾何, 1 変数の微積分に面積の項目はなかった。

大学生向けのテキスト:

1. 線形代数学

2つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} で定まる平行四辺形の面積は, 外積の大きさ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ で決まる。証明には, 底辺を1つ指定し“底辺×高さ”を用いるが, $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ なので, どちらの辺を底辺にとっても面積は一つだけ決まることになっているのだが, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ の形を見れば, 底辺と高さの取り方に依存しないことが分かる。空間内の平行四辺形とみて座標を入れても, 面積は底辺の取り方に依存していないことが分かる。

教員養成系の学生には, ベクトルや座標を用いる表現から, 平行四辺形, 三角形の面積の面積の公式“底辺×高さ”, “(底辺×高さ)÷2”が, 単に計算方法だけでなく, 底辺の取り方に依存しないという概念的な内容を強調したい。

線形代数学では, 空間の幾何学が一応でき上がっているものとして話を進めている。3次元 Euclid 空間, およびそこにおける直線, 平面, 平行, 角, (平行四辺形の)面積等の概念が既に確立されているものとして議論している。これらの概念を明確にし, それに基づいて上記の諸概念に明確な‘定義’を与え, 必要な命題を“証明”しなければならない(佐竹一郎著, 行列と行列式 [8] から要約)。

2. 解析幾何学でも, 上記と同じことが言える。

3. 微分・積分学

積分の応用としての面積の単元に面積の定義を載せないテキストがほとんど全てであったが, 近年は, 高校数学Ⅱに現れる面積の公式(*)の証明すら載せないで, 高校の結果を直接引用するテキストが近年増えてきている。

鹿児島大学教育学部では, 担当者によると, 高校で学んだことにして, 図による説明にとどめている。しかし, 学生は証明が与えられたと思っているようである。

曲面積の場合, 重積分の単元で, $P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D$ の曲面積 $\mu(S)$ は次のように与えられる: S の小面分 ΔS は, $P_u \Delta u, P_v \Delta v$ によって張られる平行四辺形の面積で近似される。したがって,

$$\mu(S) = \iint_D \|P_u \times P_v\| du dv.$$

学生の感覚では、これは事実上、定義と思われていないだろうか。

4. ルベーク積分または測度論では、面積の概念が拡張されるが、第1班の今年度の中間報告を見ると、測度論、ルベーク積分論は扱われていない。教員養成系の大学ではもはや扱っていないということか。鹿児島大学では講義していない。

5. 球面幾何学を授業する目的は、三角形の面積の公式を比べることにより、目に見える非ユークリッド幾何が容易に理解できる点にあり、面積を求めるのは目的ではないであろう。

2.3 高木貞治著，解析概論 [9] から

第3章積分法，29. 微分法以後の求積法において，数学Ⅱの公式(*)は $y = f(x) (\geq 0)$ ， f が連続のとき，面積の存在を仮定して証明されている。

第8章積分法(多変数)，91. 面積・体積の定義において，内面積・外面積を用い，本質的にルベーク [5] と同じ定義を採用している [9, pp. 326-327]。そして，こう述べている。

「面積不確定なる区域の存在を無視することは，理論上許されない。緊要なのは，面積は天賦でなくて，我々が自ら定義して，自ら始末せねばならないことの認識である。」 [9, pp.330]

続けて，例1で有限個の滑らかな曲線により囲まれた領域は面積確定であること，例2で数学Ⅱ(*)に現れる領域の面積は確定することを証明している。さらに，互いに合同な図形の内積は相等しいことを証明している。

3 分析結果と主張

1. 分析の結果

面積の定義もせず，面積の確定することも述べず，連続関数の定義とその基本的性質(最大値・最小値の定理，中間値の定理)も記述せず，高校で学んだからと，公式(*)の証明もしないならば，大学の解析の授業に現れる面積は，小・中・高の数学に現れる面積の数学的背景になっているとは言い難い。実際そのようなテキストがある。

一方，線形代数における面積の扱いは，2.2節で述べたように，小・中・高校における平行四辺形，三角形の面積の“well-definedness”を示している。

2. 主張

線形代数，微積分の講義で面積の概念的な扱いをするのは範囲外と思う。

小学校専門科目の授業で90分くらい面積に関する概念的な講義，ユークリッドの原論に近い扱いと，ルベークの扱い [5] とをしたい。前者は小学4年，5年で現れる

線形な図形の面積の基になっており、後者は5年で現れる円の面積の基になる考え方が紹介できる。

教育学部の数学専修の学生に、面積の確定していない図形の例を見せることにより、いつでも面積が決まるものではないことを教えることは必要かもしれない。その上で、公式(*)の仮定の下では公式(*)が成立することの証明(のアイデア)を紹介したい。これにより、連続関数の原始関数が常に存在するが、初等関数といえど、その原始関数は必ずしも初等関数としては表せないことを強調しておきたい。初等関数の原始関数が初等関数で表されると誤解している学生が多いので。

小学校における算数的活動の一つとして、住んでいる市町村の面積を測るのは、面積の概念を実感させる例になるのではないかと思う。2万5千分の1の地図を1平方cmに分割し、地図に含まれる最大のマスの数と、含む最小のマス数を数え相加平均をとればよい。

国土地理院によれば、市町村の面積は、「国土地理院発行2万5千分1地形図により計測した値を基準」とHPにある。

参考文献

- [1] The mathematical Education of Teachers, CBMS Issues in Mathematics Education Vol. 11, AMS in cooperation with MAA, 2001
- [2] 平成17年度用, みんなと学ぶ小学校算数, 1年~6年下, 学校図書
- [3] 平成14年度中学校用, 新しい数学, 1~3, 東京書籍
- [4] 数学I~III, A~C, 東京書籍, 平成16年発行
- [5] ルベーク(柴垣和三雄訳), 量の速度, みすず書房1976年
- [6] 砂田利一, 分割の幾何学, 日本評論社, 2000年
- [7] ボルチャンスキー(木村君男ほか訳), 面積と体積, 東京書籍, 1994年
- [8] 佐竹一郎, 行列と行列式, 裳華房, 1964年
- [9] 高木貞治, 解析概論, 改訂第3版, 岩波書店, 1963年
- [10] 新井仁之, ルベーク積分0の不思議な図形たち, 数学通信第7巻, 第3号, pp.4-17(2002年)

3. オイラーの多面体公式の数学的背景とその応用

奈良教育大学数学教室 花木 良 (Hanaki Ryo)

Department of Mathematics
Nara University of Education

1 はじめに

多面体に関する話題は、小学校第2学年「箱の形をしたものについて知る事」、第4学年「立方体」、第5学年「角柱、円柱」、中学校第1学年及び高等学校数学A「空間図形」が挙げられる。高校の学習指導要領解説 [3]p.50 には、『多面体に関する基本的な性質としては、オイラーの定理を用いて正多面体が5種類しかないことを扱うことなどが考えられる。』と書かれている。オイラーの多面体公式の証明は扱われないようであるが、数学教師は、その証明や背景を知っておくべきであろう。そこで本稿では、グラフ理論を用いて、多面体公式の証明と、そこからわかる多面体の性質を考察する。具体的には、奇数個の奇数角形のみで構成される多面体や六以上の角形のみで構成される多面体が存在しないことを示す。また、一つの応用としてピックの定理を紹介する。

2 グラフとは

グラフ (離散グラフ) [graph] G とは、頂点 [vertex] と呼ばれる元の集合 V とそれらの頂点を結ぶ辺 [edge] と呼ばれる元の集合 E から成るものである。これは図に表すことができ、例えば、図1のような路線図はグラフであると考えられる。図1の真ん中は、例えば、A,B,C,D,E,F という6人を頂点で表し、知り合い同士であるときに辺で結んだ人間関係を表したグラフと考えられる。ここで、グラフといったらイメージとして頂点と辺を結んでいるので、図の中で辺が交差していることは気にしないことに注意する。

図1の左のように、新宿と渋谷を結ぶ辺が2本あるとき、これらの辺を**多重辺** [multiple edge] とよぶ。図1の右のA自身を結ぶ辺、すなわち自分自身を結ぶ辺、を**ループ** [loop] とよぶ。今回は、頂点と辺の数は有限で、多重辺とループのないグラフのみを考える。

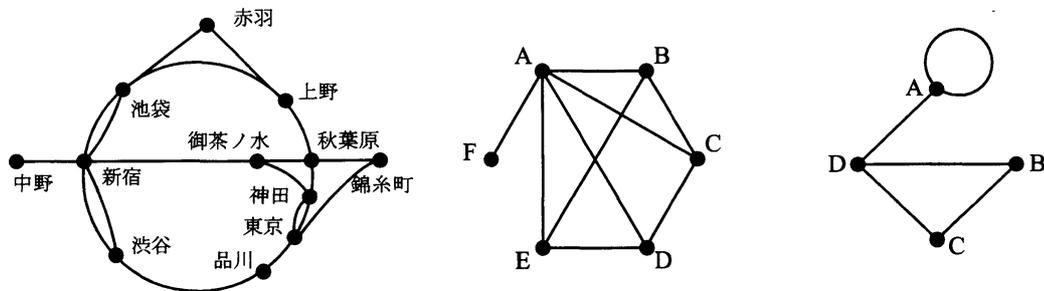


図 1: グラフの例

頂点 v から出ている辺の本数を、その頂点 v の**次数** [degree] といい、 $d(v)$ で表す。例えば、図1真ん中のグラフで、頂点Aの次数は5 ($d(A) = 5$)、頂点Bの次数は3 ($d(B) = 3$) である。そして、グラフの辺の本数と次数の総和の間には、次のような関係が成り立つ。

命題 1 (握手の補題) グラフの辺の本数を q とする。このとき、次が成り立つ。

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2q$$

この命題の成立は、各辺は両端で次数としてカウントされることからわかる。この命題から、次の系を得る。

系 2 グラフには、次数が奇数である頂点が偶数個ある。

この系の成立は、偶数は何個足しても偶数で、奇数は偶数個足さないと偶数にならないという事実からわかる。

3 木

グラフの中で、ある頂点から辺をたどって異なる頂点へいくもので、2度同じ辺や頂点を通らないもの、すなわち、頂点と辺の列 $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 \cdots e_{n-1} v_n$ で、各 e_i は v_i と v_{i+1} を結ぶ辺、各 v_i は異なり各 e_i も異なるもの、を**道** [path] と呼ぶ。このとき、 v_1 と v_n を道の端点と呼ぶ。グラフが**連結** [connected] であるとは、任意の2頂点を選ぶ道が存在するときをいう。グラフの中で、ある頂点から辺をたどってその頂点に戻ってくるもので、2度同じ辺や頂点を通らないものを**サイクル** [cycle] と呼ぶ。例えば、図1の真ん中のグラフで、頂点 ABCA とたどると、これはサイクルである。

グラフ G が**木** [tree] であるとは、 G が連結でサイクルをもたないグラフであるときをいう。図4(a), (b), (c), (d) はそれぞれ木の例である。(c) のように一頂点のみのグラフも木である。

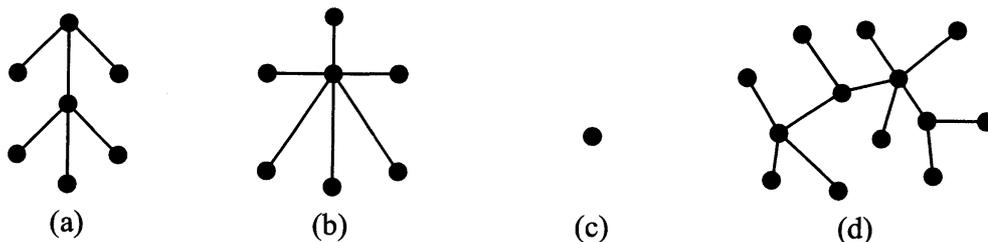


図 2: 木の例

辺をもつ木には、次のような頂点が存在することが知られている。これは、**数学的帰納法**を用いるときに有用となる。

命題 3 辺をもつ木には、次数が1の頂点が存在する。

証明. 辺の数は有限であるので、一番辺の本数の多い道 P が存在する（そのような道はひとつとは限らない）。 P の端点を u, v とする。 u, v は P にある頂点と辺で結ばれていない。何故なら、繋がっていたらサイクルができてしまうからである。また、 u, v は P 以外の頂点とも辺で結ばれていない。何故なら、繋がっていたらもっと長い道があることになるからである。よって、 u, v は次数が 1 となる。□

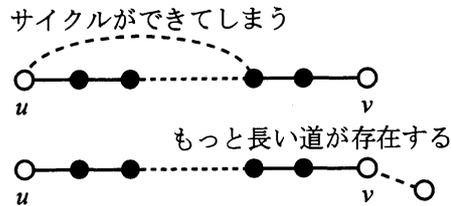


図 3: u の次数が 1 より大きいと

木の頂点の数と辺の数の間には、次が成り立つことがわかる。

命題 4 G を木とし、頂点の数を p 、辺の数を q とする。このとき、

$$p = q + 1$$

が成り立つ。

証明. 辺の数に関する数学的帰納法で証明する。
辺がないときは、頂点のみのグラフで、

$$p = q + 1$$

は成り立つ。

辺の数が p 本未満の場合、成り立つと仮定する。 G を辺の数が p 本であるグラフとする。 G の最も辺の数が多い道を P とする。命題 3 より、この道 P の端点は次数が 1 である。 H を G からその一つの端点とそこから出ている辺を取り除いて得られるグラフとする。 H は木であり、頂点の数は $q - 1$ で辺の数は $p - 1$ なので、帰納法の仮定より

$$p - 1 = (q - 1) + 1$$

が成り立つ。したがって、

$$p = q + 1$$

が成り立つ。□

4 オイラーの多面体公式

この章では、どの多面体においても、

$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 2$$

という関係式（オイラーの多面体公式）が成り立つことを示す。さらに、オイラーの多面体公式から得られる命題を紹介し、多面体についての考察を行う。

4.1 平面グラフと多面体

グラフを図形ととらえる. 与えられたグラフが, 平面に辺の交差なくかけるとき, そのグラフを**平面的グラフ** [planar graph] と呼び, 平面に描かれたグラフを**平面グラフ** [plane graph] と呼ぶ. 平面グラフは, 頂点と辺によって平面を分ける. その分けられた領域を**面** [face] と呼ぶ. 一番外の面は無限に広がる面である.

平面グラフと多面体には密接な関係がある. どの多面体も平面グラフとして描くことができる. 多面体は球面と同相である. このことは多面体を丸く膨らませれば球面になるということから直観的にわかる (図4). そして, 球面から1点を除くと, それは平面と同相になる. 正確に書くと, 次のようになる.

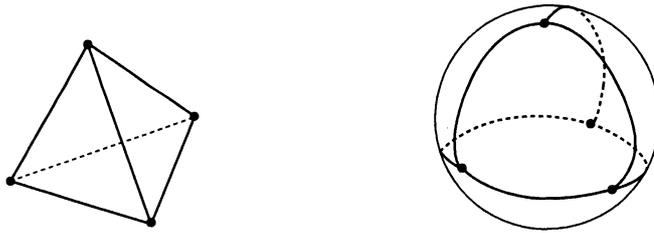


図4: 多面体を膨らませると球面になる

命題 5 S^2 を2次元球面とし, p_0 を S^2 の1点とすると, $S^2 - p_0$ は \mathbb{R}^2 と同相である.

解説. $p_0 = (0, 0, 1)$ とする. 2次元球面を,

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, 0 \leq z < 2\}$$

とし, $S^2 - p_0$ から \mathbb{R}^2 への同相写像 f を, $p = (x, y, z) \in S^2 - p_0$ に対して

$$f(p) = \left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z}, 0 \right)$$

とすると, この写像は同相写像になる. この写像の逆写像は,

$$f^{-1}(p') = \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2 + 4} \right)$$

である. \square

上の命題を利用すれば, どの多面体も平面に描くことができることがわかる. その描き方をもう少しわかりやすく描くと図6のような変形になる.

4.2 オイラーの多面体公式の証明

多面体を平面グラフに表すことで, オイラーの多面体公式を証明する. オイラーは, 1752年に多面体に関する論文を2本書いた. 一つの論文で, 立体のいくつかの族について成り立つことを示した. しかし, 一般的な多面体公式の正確な証明を与えることはできなかった. もう一つの論文では, 立体から四面体を切り出すという手法で証明を行っているが, 正確な証明にはなっていない. ルジャンドルは, 1794年に球面幾何を使った証明を与えている. 詳しくは, [2]を参照. ここでは, グラフを用いた証明を与える.

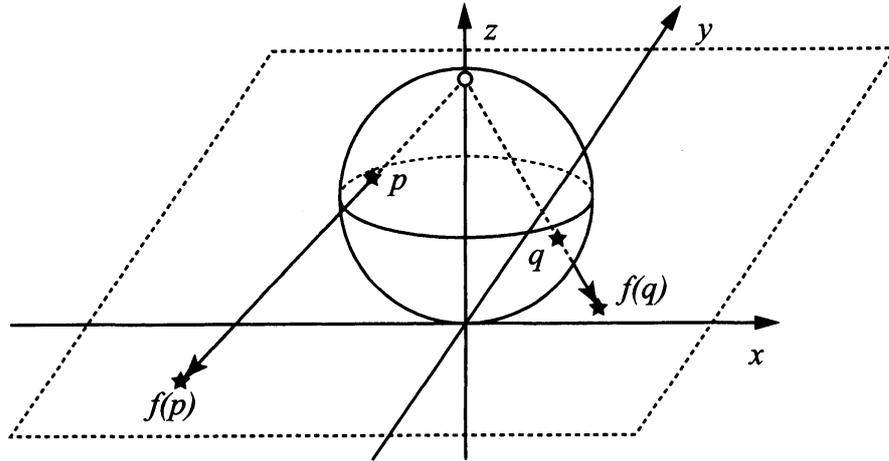


図 5: 1点を除いた球面から平面への同相写像

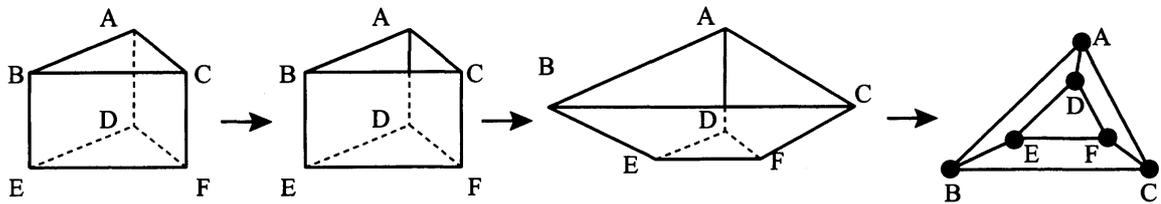


図 6: 上の面をひとつ取り除き、開いていく

定理 6 (オイラーの多面体公式) G を連結な平面グラフとし、 G の頂点の数を p 、辺の数を q 、面の数を r とすると、次が成り立つ。

$$p - q + r = 2$$

証明. サイクルの数による数学的帰納法で証明する。サイクルがないとき、つまり、グラフが木のとき、命題 4 より

$$p = q + 1$$

であり、面は一つしかないから

$$(q + 1) - q + 1 = 2$$

となり、成り立つ。

次に、サイクルの数が n 個未満のグラフでは、成り立つと仮定する。 G を n 個のサイクルをもつグラフとする。

グラフが木ではないとき、定義からサイクル C が存在する。ジョルダン閉曲線定理から、サイクルの各辺は面を境界線になっている。 e をサイクル C の一辺とする (図 7)。 H を G から e を取り除いて得られるグラフとする。 e を取り除くことで、面が一つ減る。 H のサイクルの数は n 個未満 ($n - 1$ 個とは限らない) なので、数学的帰納法の仮定から、

$$p - (q - 1) + (r - 1) = 2$$

が成り立つので、

$$p - q + r = 2$$

が成り立つ。□

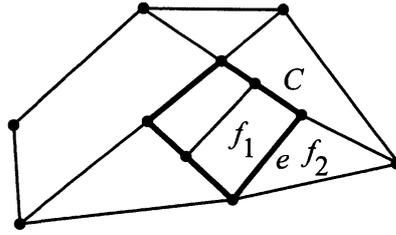


図 7:

4.3 オイラーの多面体公式の応用

頂点が3個以上の平面グラフが与えられたとき、平面性を保ちながら、辺を加えていくと、どの面も3本の辺で囲まれている状態になるまで辺を加えることができる(図8). また、これ以上、多重辺やループを加えたりせず平面性を保って、辺を加えることはできない.

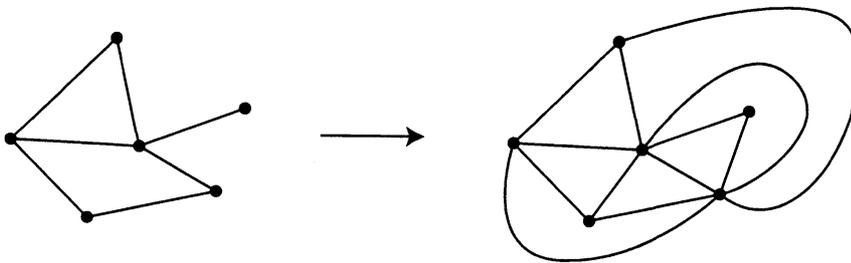


図 8:

定理 7 G を頂点数が3個以上で、どの面も3本の辺で囲まれている平面グラフとし、 G の頂点の数を p 、辺の数を q 、面の数を r とすると、次が成り立つ.

$$q = 3p - 6$$

証明. どの面も3本の辺をもっており、どの辺も2つの面と接しているので、

$$3r = 2q \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}q$$

となり、これを定理6に代入すると、

$$p - q + \frac{2}{3}q = 2 \Leftrightarrow q = 3p - 6 \quad \square$$

この定理から、次が得られる.

系 8 G を頂点が3個以上の平面グラフとし、 G の頂点の数を p 、辺の数を q 、面の数を r とすると、次が成り立つ.

$$q \leq 3p - 6$$

定理8のように平面グラフは、頂点に対して辺の本数の上限がある. 同じような意味として、次の定理がある.

定理 9 G を連結な平面グラフとし、 G の頂点の数を p 、辺の数を q 、面の数を r とする。 G には次数 5 以下の頂点が少なくとも一つ存在する。

証明. すべての頂点の次数が 6 以上とすると、命題 1 より、

$$2q = \sum_{v \in V} d(v) \geq 6p \Rightarrow q \geq 3p$$

これは定理 8 に矛盾するので、次数が 5 以下の頂点が存在する。□

上の定理を精密化したものとして、次の定理がある。

定理 10 G を 4 個以上の頂点をもち各頂点の次数が 3 以上の連結な平面グラフとし、 G の頂点の数を p 、辺の数を q 、面の数を r とし、 p_i を次数 i の頂点の数とすると、次が成り立つ。

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 \geq 12 + p_7 + 2p_8 + 3p_9 + 4p_{10} + \cdots$$

証明. 頂点数の関係から、

$$p = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + \cdots$$

辺の本数と次数の関係から、

$$2q = 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 + 9p_9 + 10p_{10} + \cdots$$

系 8 より

$$q \leq 3p - 6 \Rightarrow 2q \leq 6p - 12$$

である。この式に上の 2 式を代入すると、

$$\begin{aligned} & 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 + 9p_9 + 10p_{10} + \cdots \\ & \leq 6(p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + \cdots) - 12 \end{aligned}$$

この式を変形すると、

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 \geq 12 + p_7 + 2p_8 + 3p_9 + 4p_{10} + \cdots$$

となる。□

上の定理を多面体に対して応用するために、平面グラフの双対を定義する。平面グラフ G に対して、 G の面を頂点とし、 G で面が共有しているときに限りそれらの頂点を辺で結んだグラフを G の双対グラフ [dual graph] といい、 G^* と表す。双対グラフも平面グラフになる。図 9 は正八面体のグラフの双対グラフである。この双対なグラフは、正六面体のグラフになっている。一般に、 G と双対グラフ G^* を比べると、 G の面が n 本の辺で囲まれているとき、 G^* でその面は頂点になりその頂点の次数は n である。このことを利用すると、多面体に関して次の定理が得られる。

定理 11 多面体には、奇数角形の面が偶数個存在する。□

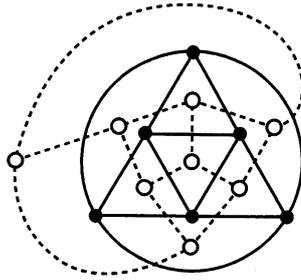


図 9:

証明. そのような多面体が存在すると仮定する. その多面体のグラフを G とし, G^* を G の双対グラフとする. 3 角形が 7 つで構成されているので, G^* は次数が 3 の頂点が 7 個 (奇数個) 存在することになる. しかし, これはグラフには次数が奇数の頂点が偶数個であるという系 2 に矛盾する. したがって, 存在しない. \square

同様の考えをすると, 定理 9 を用いることで, 次の定理が成り立つことがわかる.

定理 12 多面体の面の中には必ず 3 角形, 4 角形, 5 角形のうちの 하나가存在する.

証明. 多面体の面の中に 3 角形, 4 角形, 5 角形が存在しないとす. その多面体のグラフを G とし, G^* を G の双対グラフとする. ここで, G^* は平面グラフである. 一方, 仮定から G^* のすべての頂点は次数が 6 以上になる. しかし, これは定理 9 に矛盾する. したがって, 多面体の面の中には必ず 3 角形, 4 角形, 5 角形のうちの 하나가存在する. \square

正多面体が 5 つしかないことは, ユークリッド原論にあるように, 頂点に集まる面の形と数を考えれば示すことができる. ここでは, オイラーの多面体公式を用いて, そのことを証明する.

定理 13 正多面体は, 正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体と正二十面体以外には存在しない.

証明. 正多面体が存在したとし, 頂点の数を p , 辺の数を q , 面の数を r , 面の形を正 n 角形 ($n = 3, 4, 5, \dots$), 頂点に集まる辺の数を m ($m = 3, 4, 5, \dots$) とする. オイラーの多面体公式より,

$$p - q + r = 2$$

また, 頂点と辺の関係, 面と辺の関係は,

$$mp = 2q, nr = 2q$$

となる. これをオイラーの多面体公式に代入すると,

$$\frac{2q}{m} - q + \frac{2q}{n} = 2$$

この式の両辺を $2q$ で割ると,

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q} \tag{1}$$

この関係式を満たす m, n, q の組を求める。ここで、 $m \geq 3, n \geq 3$ より、 $q \geq 4$ である。

$m < n$ のとき、 $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$ であり、

$$\frac{2}{n} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{2}{m}$$

一方、

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

関係式 (1) と上の 2 式より、

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{m} \Rightarrow m < 4 \Rightarrow m = 3$$

関係式 (1) に $m = 3$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{q} > \frac{1}{6} \\ &\Rightarrow n < 6 \Rightarrow n = 4, 5 \end{aligned}$$

$m > n$ のときは、 $m < n$ のときと同様で、

$$n = 3, m = 4, 5$$

となる。

$m = n$ のとき、関係式 (1) は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{m} \\ m < 4 &\Rightarrow m = n = 3 \end{aligned}$$

今得られた 5 つの組から、関係式 (1) を用いて、辺の数を求める。

- $m = n = 3$ のとき、 $q = 6$ であり、これは正四面体に対応している
- $m = 3, n = 4$ のとき、 $q = 12$ であり、これは正六面体に対応している
- $m = 3, n = 5$ のとき、 $q = 30$ であり、これは正十二面体に対応している
- $m = 4, n = 3$ のとき、 $q = 12$ であり、これは正八面体に対応している
- $m = 5, n = 3$ のとき、 $q = 30$ であり、これは正二十面体に対応している

以上により、作られる凸な多面体は、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体と正二十面体のみである。□

4.4 ピックの定理

ピックの定理は、座標平面上にある格子点を結んでできる図形の面積を、その図形の内部と境界上にある格子点の個数から求めるというものである。学校図書の中学校2年生の教科書[4]には、ピックの定理が取りあげられている。

定理 14 座標平面上にある格子点を結んでできる多角形の面積は、

$$S = p_{int} + \frac{1}{2}p_{bd} - 1$$

ここで、 p_{int} は多角形の内部の格子点の数、 p_{bd} は多角形の境界上の格子点の数である。

これを用いると、図10の多角形は、 $p_{int} = 18, p_{bd} = 12$ より、

$$S = 18 + \frac{1}{2} \times 12 - 1 = 23$$

であることがわかる。

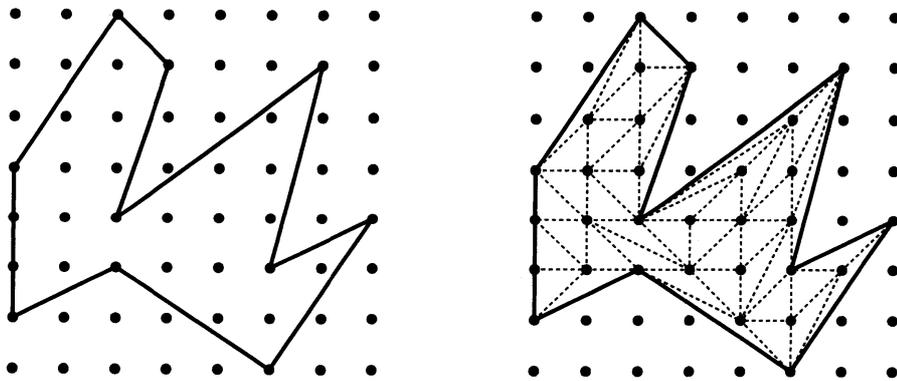


図 10:

証明には次の命題を用いる。基本三角形とは、3個の格子点を結んだ三角形でその内部には格子点を含まないものである。

命題 15 基本三角形の面積は $\frac{1}{2}$ である。

ピックの定理の証明を与える。

証明. 多角形を基本三角形に分割する（このことは証明が必要であるが割愛する）。そして、格子点を頂点、基本三角形の各辺を辺と考えると、これは平面グラフである。その頂点の数を p 、辺の数を q 、面の数を r とすると、オイラーの多面体公式より、

$$p - 2 = q - r$$

が成り立つ。ここで、この式は外部の面も含めていることから、基本三角形である面の数は $r - 1$ である。 q_{int} を両側に基本三角形がある辺の数、 q_{bd} を多角形の境界上にある辺の数とすると、 $q = q_{int} + q_{bd}$ である。また、基本三角形は3本の辺をもつので、

$$3(r - 1) = 2q_{int} + q_{bd} \Leftrightarrow r = 2(q - r) - q_{bd} + 3$$

となる。境界上にある頂点の数と辺の数は同じであることとオイラーの多面体公式から、

$$r = 2(q - r) - p_{bd} + 3 = 2(p - 2) - p_{bd} + 3 = 2p_{int} + p_{bd} - 1$$

各面の面積は $\frac{1}{2}$ であるので、多角形の面積 S は

$$S = p_{int} + \frac{1}{2}p_{bd} - 1$$

である。□

なお、この節の詳細は [1] に書かれている。

参考文献

- [1] M. アイグナー, G.M. ツィーグラ著, 蟹江 幸博訳, 天書の証明, シュプリンガー, 2002.
- [2] N.L. ビッグス著, 一松 信翻訳, グラフ理論への道, 地人書館, 1986.
- [3] 文部科学省, 高等学校学習指導要領 数学編 理数編, 実教出版, 2009.
- [4] 一松 信ほか 31 名, 中学校数学 2, 学校図書, 2006.

4. 平均と不等式

奈良教育大学・数学教室 河上 哲 (Satoshi Kawakami)

Department of Mathematics

Nara University of Education

大阪府立大学大学院・理学系研究科 山中聡恵 (Satoe Yamanaka)

School of Science

Osaka Prefecture University

1. はじめに

数学の授業を展開するにあたり、教科内容の背景にある数学を教師が把握し、それらを体系的に理解しておくことが大事である。数学教師は、問題の発展的な指導ができ、生徒達に多様な考え方を体験させる適切な教材を開発し、数学の活動を通して、生徒の創造性の育成に寄与する教育を実践することが求められている。その為には、数学のそれぞれの諸概念がどのようにお互いに関連しているのかを理解しておくことおよび数学における概念や公式の一般化がどのようになされるかということについて、教師自らができるだけ多く理解し、体験しておくことが重要であると思われる。この [一般化] と [概念の結びつき] の数学モデルとして、本稿では、「平均と不等式」を題材にとりあげて考察を進めていく。

相加平均と相乗平均の大小関係は良く知られているので、この公式の一般化を考える時、その不等式が成立する背景として、平均の概念の体系的理解と関数や図形の凸性の概念との結びつきが重要であることを述べる。

2. 相加平均と相乗平均の不等式の一般化

$x_1, x_2 > 0$ のとき、 $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ は相加平均 (または算術平均)、 $\sqrt{x_1 x_2}$ は相乗平均 (または幾何平均) と呼ばれている。相加平均、相乗平均の間には次の関係式がよく知られている。

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad (1)$$

また、等号成立は $x_1 = x_2$ のときに限る。

この不等式が数学の中でどのように一般化されるかについて考察する。

一般化その 1. $x_1, x_2, x_3 > 0$ のとき

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

が成り立つ。等号成立は $x_1 = x_2 = x_3$ のときに限る。

一般化その2. $p_1, p_2 > 0$ で $p_1 + p_2 = 1$ のとき、

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \leq p_1 x_1 + p_2 x_2$$

が成り立つ。等号成立は $x_1 = x_2$ のときに限る。

一般化その3. 実数 r ($r \neq 0$) と $x = (x_1, x_2)$ ($x_1 > 0, x_2 > 0$) に対して、

$$m_r(x) = \left(\frac{1}{2} x_1^r + \frac{1}{2} x_2^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (2)$$

とおき、 $m_0(x) := \lim_{r \rightarrow 0} m_r(x)$ とする。この時、ロピタルの公式により、 $m_0(x) = \sqrt{x_1 x_2}$ であることが容易に確かめられる。 $m_1(x)$ は明らかに相加平均なので、不等式 (1) は、

$$m_0(x) \leq m_1(x)$$

と書き換えることができる。また、

$$m_{-1}(x) = \left(\frac{1}{2} x_1^{-1} + \frac{1}{2} x_2^{-1} \right)^{-1}$$

は x_1 と x_2 の調和平均である。この時、

$$m_{-1}(x) \leq m_0(x) \leq m_1(x)$$

が成り立つ。これも、最初の不等式 (1) の一般化である。更に、次が知られている。

定理 $m_r(x)$ は r に関して単調増加であり、ある r_1 と r_2 ($r_1 < r_2$) で $m_{r_1}(x) = m_{r_2}(x)$ のとき、 $x_1 = x_2$ で、すべての r に対して、 $m_r(x) = x_1 = x_2$ である。

3. 平均の不等式と関数の凸性

関数の凸性を表す性質にはいろいろある。

関数 $f(x)$ が開区間 $I = (a, b)$ 上で上に凸とする。この時、次が成り立つ。

[1] 曲線 $y = f(x)$ 上の2点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) の中点は、曲線 $y = f(x)$ の下にある。つまり、 $x_1, x_2 \in I$ に対して

$$\frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) \leq f\left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2\right).$$

[2] 曲線 $y = f(x)$ 上の3点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を頂点とする三角形の重心は、曲線 $y = f(x)$ の下にある。つまり、 $x_1, x_2, x_3 \in I$ に対して

$$\frac{1}{3} f(x_1) + \frac{1}{3} f(x_2) + \frac{1}{3} f(x_3) \leq f\left(\frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3\right).$$

[3] 曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) を結ぶ線分は、曲線 $y = f(x)$ の下にある。2 点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) を結ぶ線分上の点 (\bar{x}, \bar{y}) は $(\bar{x}, \bar{y}) = (p_1x_1 + p_2x_2, p_1y_1 + p_2y_2)$ ($p_1, p_2 > 0$ で $p_1 + p_2 = 1$) と表されるので、 $\bar{y} \leq f(\bar{x})$ より、次が成り立つ。

$x_1, x_2 \in I$ に対して

$$p_1f(x_1) + p_2f(x_2) \leq f(p_1x_1 + p_2x_2).$$

[4] 曲線 $y = f(x)$ 上の n 個の点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ を頂点とする凸多角形の内部の点 (\bar{x}, \bar{y}) は、曲線 $y = f(x)$ の下にある。ここで、 $(\bar{x}, \bar{y}) = (p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n, p_1y_1 + p_2y_2 + \dots + p_ny_n)$ ($p_1, p_2, \dots, p_n > 0$ で $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$) と表されるので、 $\bar{y} \leq f(\bar{x})$ より、次が成り立つ。

$x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ に対し

$$\sum_{k=1}^n p_k f(x_k) \leq f\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right).$$

関数 $f(x) = \log x$ は $I = (0, \infty)$ 上で上に凸なので、上記の関係式を適用すると、下記の関連性が容易に確かめられる。

1. 不等式 (1) は、関数 $\log x$ の上に凸の性質 [1] から導かれる。
2. 不等式の一般化その 1 は、関数 $\log x$ の上に凸の性質 [2] から導かれる。
3. 不等式の一般化その 2 は、関数 $\log x$ の上に凸の性質 [3] から導かれる。
4. 関数 $\log x$ の上に凸の性質 [4] からは、次の不等式が導かれる。

一般化その 4. $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$ で $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ のとき、 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ に対し、

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \leq p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$$

が成り立つ。等号成立は $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のときに限る。

不等式の一般化その 3 で述べた定理も関数の凸性を用いて簡単に証明することができる。その証明のスケッチを下記に与える。

定理の証明

関数 $f(x) = x^r$ ($0 < r < 1$) は $I = (0, \infty)$ 上で上に凸の関数なので、関数の上に凸の性質 [1] より、

$$\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \leq f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right)$$

が成り立つ。つまり、

$$\frac{1}{2}x_1^r + \frac{1}{2}x_2^r \leq \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right)^r$$

が成り立つ。両辺を $\frac{1}{r}$ 乗すると

$$\left(\frac{1}{2}x_1^r + \frac{1}{2}x_2^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \quad (3)$$

$0 < r_1 < r_2$ の時、 $\frac{r_1}{r_2} = r$ とおいて (3) 式に代入すると、

$$\left(\frac{1}{2}x_1^{\frac{r_1}{r_2}} + \frac{1}{2}x_2^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{r_2}{r_1}} \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

従って、

$$\left(\frac{1}{2}x_1^{\frac{r_1}{r_2}} + \frac{1}{2}x_2^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right)^{\frac{1}{r_2}}$$

ここで、 $x_1^{\frac{1}{r_2}}$, $x_2^{\frac{1}{r_2}}$ を新たに x_1 , x_2 と思い直すと、

$$\left(\frac{1}{2}x_1^{r_1} + \frac{1}{2}x_2^{r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq \left(\frac{1}{2}x_1^{r_2} + \frac{1}{2}x_2^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}}$$

を得る。よって、 $0 < r_1 < r_2$ の時は $m_{r_1}(x) \leq m_{r_2}(x)$ が成り立つことが分かった。残りのケースも同様に示される。

上記の証明と全く同じ方法で関数の凸の性質 [4] を適用することで、次も成り立つことが容易に確かめられる。

一般化その 5. 実数 r ($r \neq 0$) と $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ に対し、

$$m_r(x) = (p_1x_1^r + p_2x_2^r + \dots + p_nx_n^r)^{\frac{1}{r}}$$

とおく。但し、 $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$ で $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ である。また、 $m_0(x) := \lim_{r \rightarrow 0} m_r(x)$ とおく。この時、

定理 $m_r(x)$ は r に関して単調増加である。更に、ある r_1 と r_2 ($r_1 < r_2$) で $m_{r_1}(x) = m_{r_2}(x)$ のとき、 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ で、すべての r に対して、 $m_r(x) = x_1$ である。

補足 上記の定理は、一般化その 1、その 2、その 3、その 4、等の一般化になっていることを補足しておく。