

# F-Divergence に関連する問題について

神奈川大学・工学部 進藤 晋

Susumu Shindoh

Faculty of Engineering, Kanagawa University

## 1 はじめに

確率・統計や情報理論で現れる divergence (relative entropy, cross entropy) は, 2つの確率分布  $p$  と  $q$  の間の違いの度合いを表す量として定義される [2]. 一方, Csiszár[3] が定義した f-divergence は, さまざまな divergence を特別な場合として含んでいる [12]. 最適化の分野でも, f-divergence を目的関数とする制約付き最適化 (最大化) 問題が考察されている [4, 5].

本論文の目的は, f-divergence を定義する際に現れる adjoint に関する性質をとりまとめ, さらに Hiriart-Urruty らが考察した関数方程式 [9] について解説することである.

## 2 Adjoint

$(0, \infty)$  で定義された凸関数のクラスを  $\mathcal{F}$  とする.  $f \in \mathcal{F}$  に対して,

$$f(0) = \lim_{t \downarrow 0} f(t)$$

が存在することに注意する.

$f \in \mathcal{F}$  に対して,  $f$  の adjoint を以下のように定義する [1] ([11] では, \*-adjoint とよばれている).

定義 1  $f \in \mathcal{F}$  とする. このとき,  $f$  の adjoint  $f^*$  を

$$f^*(t) = tf\left(\frac{1}{t}\right)$$

で定義する.

$f$  の adjoint  $f^*$  は次の性質をもつ [1].

定理 2  $f \in \mathcal{F}$  に対して,

(1)  $(f^*)^* = f$

(2)  $f^*$  は凸関数

(3)  $f(1) = 0$  ならば,  $f^*(1) = 0$

$$(4) f^*(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t}$$

特に、2番目の性質が重要である。凸性の証明は、[8]にあるが、直接的な証明は見当たらないので述べておく。

(証明)  $t_1, t_2 > 0, 0 < \alpha, \beta < 1, \alpha + \beta = 1$  に対して、

$$\begin{aligned} f^*(\alpha t_1 + \beta t_2) &= (\alpha t_1 + \beta t_2) f\left(\frac{1}{\alpha t_1 + \beta t_2}\right) \\ &= (\alpha t_1 + \beta t_2) f\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha t_1 + \beta t_2}\right) \\ &= (\alpha t_1 + \beta t_2) f\left(\frac{\alpha t_1}{(\alpha t_1 + \beta t_2)t_1} + \frac{\beta t_2}{(\alpha t_1 + \beta t_2)t_2}\right) \\ &\leq (\alpha t_1 + \beta t_2) \left\{ \frac{\alpha t_1}{\alpha t_1 + \beta t_2} f\left(\frac{1}{t_1}\right) + \frac{\beta t_2}{\alpha t_1 + \beta t_2} f\left(\frac{1}{t_2}\right) \right\} \\ &= \alpha t_1 f\left(\frac{1}{t_1}\right) + \beta t_2 f\left(\frac{1}{t_2}\right) \\ &= \alpha f^*(t_1) + \beta f^*(t_2) \end{aligned}$$

上の不等式の部分は、 $f$  の凸性を用いている。□

例 3

$$1. f(t) = t \log t \text{ のとき, } f^*(t) = -\log t$$

$$2. f(t) = (1 - \sqrt{t})^2 \text{ のとき, } f^*(t) = f(t)$$

### 3 F-divergence

f-divergence の定義からはじめる。

定義 4  $f(1) = 0$  を満たす凸関数  $f \in \mathcal{F}$  に対して、 $I_f : R_+^n \times R_+^n \rightarrow R$  を

$$I_f(p, q) = \sum_{i=1}^n q_i f\left(\frac{p_i}{q_i}\right)$$

で定義する。 $I_f$  を **f-divergence** という。ここで、 $R_+^n = \{p = (p_1, \dots, p_n) : p_i \geq 0 \text{ for all } i\}$ 。

上の定義で、 $0f\left(\frac{0}{0}\right) = 0$ ,  $0f\left(\frac{a}{0}\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon f\left(\frac{a}{\epsilon}\right)$  ( $a > 0$ ) と考えることにする。また、変数が確率密度関数のときは、 $I_f$  は積分で定義される。

$f(t) = t \log t$  とすると、 $I_f$  は Kullback-Leibler divergence,  $f(t) = |t - 1|$  とすると、 $I_f$  は変動距離 (variational distance),  $f(t) = (1 - \sqrt{t})^2$  とすると、 $I_f$  は Hellinger 距離 (の 2 乗) となる [1, 11, 12]。

f-divergence  $I_f$  の性質をまとめておく (証明は [1, 11] 等参照)。

命題 5

(1)  $I_f$  は変数  $p, q$  の凸関数である。

$$(2) I_f(p, q) = I_{f^*}(q, p)$$

(3)  $f(1) = 0$  を満たす  $f \in \mathcal{F}$  が  $t = 1$  で狭義凸, すなわち,  $t = 1$  の近傍で  $f$  が線形とならないとき,

$$I_f(p, q) = 0 \iff p = q$$

## 4 関数方程式

Hiriart-Urruty と Martinez-Legaz[9] は, 情報理論にしばしば現れる adjoint と f-divergence の対称性に着目し, 以下の問題を提起・考察した.

問題 6 関数方程式

$$f^* = f \tag{1}$$

を満たす凸関数を明らかにせよ.

関数方程式 (1) を満たす凸関数としては, 上記の例 3 の  $f(t) = (1 - \sqrt{t})^2$  のほかに,  $f(t) = |t - 1|$ ,  $f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$  等がある.

凸関数の性質から, 以下の命題が成り立つ.

命題 7  $f$  を関数方程式 (1) および  $f(1) = 0$  を満たす凸関数とするとき,  $f \geq 0$ . したがって, すべての  $(p, q) \in R_+^n \times R_+^n$  に対して,  $I_f(p, q) \geq 0$ .

Hiriart-Urruty らは, 凸解析の手法を用いて, 凸関数  $f$  に付随する閉凸集合  $C_f$  がある性質を満たすときに限り, 凸関数  $f$  が上の関数方程式 (1) を満たすことを示した [9]. ここで,  $C_f$  は以下のような集合である.

$$C_f = \{(x, y) \in R^2 : \text{すべての } s > 0, t > 0 \text{ に対して, } xs + yt \leq tf\left(\frac{s}{t}\right)\}$$

## 5 おわりに

最後に, 希望も含めて何点か補足しておく.

- Hiriart-Urruty らは, 関数方程式 (1) を満たす凸関数を具体的に求めているわけではない. したがって, (1) を満たす凸関数あるいは凸関数のクラスを知りたい.
- 関数方程式 (1) を満たす凸関数の性質を明らかにしたい.
- 凸関数の adjoint の性質をさらに理解したい.
- 関数方程式 (1) は,  $f(1) = 1$  の条件のもとで, positive linear operators の分野で頻繁に出現している [10, 7, 6]. この分野でも, 関数方程式 (1) を満たす解を知ることは有用であると考えられる.

[謝辞] 本研究は, 科研費補助金 (基盤 C, No.22510161) の支援を受けている.

## 参考文献

- [1] Ben-tal, A. et al.: Certainty equivalents and information measures : duality and extremal principles, *J. Math. Anal. Appl.*, 157, 211-236 (1991)
- [2] Cover, T.M and J.A.Thomas,: *Elements of Information Theory*, Wiley (2006).
- [3] Csiszár, I.: Information-type measures of difference of probability functions and indirect observations, *Studia Sci. Math. Hungar.*, 2, 299-318 (1977)
- [4] Csiszár, I. and F. Matus : On minimization of multivariate entropy functionals, *Proceedings ITW 2009 IEEE*, 96-100 (2009)
- [5] Gilardoni, G.L. : On the minimum f-divergence for given total variation, *C.R.Acad. Sci. Paris, Ser. I* 343, 763-766 (2006)
- [6] Hansen, F. : Characterizations of symmetric monotone metrics on the state space of quantum systems, *Quantum Information and Computation*, Vol.6, No. 7, 597-605 (2006)
- [7] 日高文雄, 柳研二郎 : ヒルベルト空間と線型作用素, 牧野書店 (1995)
- [8] Hiriart-Urruty, J.-B. and C.Lemarechal : *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, Springer (1996).
- [9] Hiriart-Urruty, J.-B. and J.-E. Martinez-Legaz: Convex solutions of functional equation arising in information theory, *J. Math. Anal. Appl.*, 328, 1309-1320 (2007).
- [10] Kubo, F. and T. Ando : Means of positive linear operators, *Math. Ann.* 246, 205-224 (1980)
- [11] Liese F. and I.Vajda : On divergences and informations in statistics and information theory, *IEEE Transactions on Information theory*, Vol.52, No.10, 4394-4412 (2006)
- [12] 須鎗弘樹 : 複雑系のための基礎数理, 牧野書店 (2010)