数理解析研究所講究録
第1830巻 2013年 64-75

Initial boundary value problem for model equations of resistive drift wave turbulence with Stepanov-almost-periodic initial data*

慶應義塾大学理工学部 近藤 信太郎 (Shintaro KONDO)†
Department of Mathematics, Keio University

概要: Fourier 級数論はあらゆる分野で活用されているが, それを一般化したものに概周期関数の Fourier 級数論がある. しかし, 概周期関数の Fourier 級数論を応用する方法を提示し, その証明に成功した先行論文は今に至るまでなかった. そのような中, 筆者は Bochner–Fejér 和の性質を用いることでその証明に成功した. 抵抗性ドリフト波乱流を記述する Hasegawa–Wakatani (HW) 方程式に対する数学研究の一環として, その研究をおこなった. つまり, 3次元円柱状領域において, その軸方向に Stepanov 概周期な初期値を考え, Das 達のモデル方程式 (HW 方程式+電子の拡散項) および HW 方程式に対する初期境界値問題の一意可解性を証明した.

1 Introduction

はじめにドリフト波乱流のきわめて簡単な説明と HW 方程式の紹介をする. その後, 先行論文と今回の結果を比較するため, HW 方程式についての先行論文の紹介と今回考える問題設定の説明をする. また概周期関数の応用研究に関する先行論文の中から, 研究のヒントになりそうな興味深い論文をいくつか紹介する. その後, 定義および主定理を紹介する. 以上の内容を第一節に記述した. 第二節では, 概周期関数についての基本的な命題と主定理の証明について解説をする. 一番面白いところは証明のアイデアだから, そこに焦点をしぼって解説をする.

---

* 本研究は, 谷温之名誉教授 (Atusi TANI, Keio University) との共同研究によるものである.

† e-mail: kondo_s@2005.jukuin.keio.ac.jp

ドリフト波乱流は, トカマク型（トーラス状の形状）核融合発電装置内のプラズマ中に生じる現象である ([1], [8]). 特にプラズマ抵抗値が正のとき, 抵抗性ドリフト波乱流とよぶ. ドリフト波乱流を抑制しプラズマの閉じ込めを改善することは, 核融合研究の主要な研究テーマであり, つぎのモデル方程式が提案されている.

抵抗性ドリフト波乱流を記述するため, 1983 年, Hasegawa と Wakatani はプラズマ密度の変動 n と静電ポテンシャル ϕ に対するつぎの方程式を導いた*1.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - (\nabla\phi \times \vec{e}) \cdot \nabla\right) \Delta\phi = -\dfrac{c_1}{n^*}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\phi - n) + c_2\Delta^2\phi, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - (\nabla\phi \times \vec{e}) \cdot \nabla\right)(n + \log n^*) = -\dfrac{c_1}{n^*}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\phi - n) \end{cases} \tag{1}$$

(HW 方程式). ここで, 一様な強磁場 $\mathbf{B} = B_0\vec{e}$ およびプラズマの平衡密度 $n^* = n^*(|x'|)$ $(x = (x_1, x_2, x_3) = (x', x_3))$ は与えられた関数, B_0 : 磁場の強さを表わす定数, $\vec{e} = (0, 0, 1)$. c_1 : プラズマ抵抗値の逆数, c_2 : 粘性係数, は正の定数と仮定する.

2005 年, Das, Sen, Kaw, Benkadda and Beyer は 磁場の曲率による Rayleigh–Taylor 不安定性を研究するため, プラズマ密度と静電ポテンシャルと磁気ポテンシャルに対するモデル方程式を導いた. 磁気ポテンシャルと重力ドリフトの効果を無視したとき, 彼らのモデル方程式はつぎのようになる.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - (\nabla\phi \times \vec{e}) \cdot \nabla\right) \Delta\phi = -\dfrac{c_1}{n^*}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\phi - n) + c_2\Delta^2\phi, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - (\nabla\phi \times \vec{e}) \cdot \nabla\right)(n + \log n^*) \\ \qquad = -\dfrac{c_1}{n^*}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\phi - n) + D\Delta(n + \log n^*) \end{cases} \tag{2}$$

ここで, D : 電子の拡散係数, は非負の定数と仮定する.

(2) および (1) に対する数学解析の先行結果を紹介する. 2011 年, Kondo and Tani ([9]) によって, 初期値が 3 次元円柱状領域でその軸方向に周期的なとき, (2) および (1) に対する初期境界値問題の一意可解性が証明された. 2011 年, Kondo and Tani ([10], [11])

*1 通常の MHD 方程式についてコメントをする. MHD 方程式ではドリフト波乱流の記述は不可能だという指摘がある ([19]). そのため HW 方程式が提案されたと筆者は考えているが, つぎの研究も興味深いと思う. MHD 方程式に Hall 効果と Ion-slip 効果をつけ加えたモデル方程式があるが, 1995 年, Mulone and Solonnikov([15]) によって初期境界値問題に対する解の存在定理が証明された.

によって, [9] でえられた HW 方程式 (1) に対する *a priori* 評価を改良することで, プラズマ抵抗値の零極限 ($c_1 \to \infty$) をとったとき, HW 方程式の解が, プラズマ抵抗値を零とする HW 方程式の解に強収束することが証明された.

本稿では, つぎの初期条件と境界条件下, $\omega \times \mathbf{R} \times (0, \infty)$ で (2) または (1) をみたす初期境界値問題を考える.

$$\begin{cases} \phi(x,0) = \phi_0(x), \quad n(x,0) = n_0(x) \quad \text{for } x \in \Omega, \\ \\ \phi(x,t) = \Delta\phi(x,t) = n(x,t) = 0 \quad \text{for } x \in \Gamma,\ t > 0 \end{cases} \tag{3}$$

ただし, 初期値は $\vec{e}$ 方向に Stepanov 概周期とする (Stepanov 概周期関数：概周期関数を局所的 p 乗可積分な関数に拡張したもの). ここで $\Omega = \omega \times \mathbf{R}$, $\omega = \{x' = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x'| < R\}$, $\partial\omega = \{x' = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x'| = R\}$, $\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x' \in \partial\omega\}$, R は正の定数.

筆者の知るかぎり, 概周期関数の Fourier 級数論を応用する方法を提示し, その証明に成功した先行論文は今に至るまでなかった. そこで先行論文を調べたら, 周期関数に対して成立する Riesz–Fischer の定理が, 概周期関数に対しては成立しないことがわかった ([2]). 筆者が考えた証明方法は第二節で解説することにして, ここでは Fourier 級数論を用いないで解の存在証明をした先行論文を紹介する.

概周期関数は Navier–Stokes 方程式の研究に応用されている. 外力が時間に関して Stepanov 概周期かつ十分小さいとき, 非圧縮 Navier–Stokes 方程式に対する初期境界値問題の解に対して Stepanov 概周期な解の存在と一意性を証明した論文としては, 1962 年の Foias ([6], 空間 3 次元), 1963 年の Prouse ([17], 空間 2 次元) がある. 圧縮性 Navier–Stokes 方程式に対する類似の結果は, 1985 年, Marcati and Valli ([14], 空間 3 次元) によってえられた. それらの論文は, 基本的につぎの手順で証明されている: i) 初期値 0 で $[0, +\infty)$ における時間大域解の存在を示す; ii) $(-\infty, +\infty)$ における時間大域解の存在を示す; iii) 解の Stepanov 概周期性を背理法で示す. また, Stepanov 概周期な初期値に対する非圧縮 Navier–Stokes 方程式の初期値問題を考えたものとして 2006 年の Maekawa and Terasawa ([13]) があるが, 証明は本質的に類似の方法でなされている.

概周期関数は Schrödinger 作用素の研究にも応用されている. Schrödinger 作用素の概周期ポテンシャルが $\cos x + \cos(\alpha x + \theta)$ (α, θ:パラメータ) で与えられた空間一次元問題に対しては 1990 年の Fröhlich, Spencer and Wittwer [7], 1987 年の Sinai [18], 空間二次元への拡張に関しては 2002 年の Bourgain, Goldstein and Schlag [3] がある. 証明には, $\cos x + \cos(\alpha x + \theta)$ の α が有理数から遠い無理数であるという条件が用いられている.

また, 概周期関数は音響信号の一般化調和解析 (Generalized Harmonic Analysis) にも応用されている. コンピューターの性能が向上したため, N.Wiener により提案された一般化調和解析の研究が近年行われている. 参考文献として, 1997 年の山崎芳男 [20], 2004 年の中沢誠 [16] を挙げておく.

$n(x,t)+\log n^*(|x'|)-\log n^*(R)$ および $n_0(x)+\log n^*(|x'|)-\log n^*(R)$ を, $n(x,t)$ および $n_0(x)$ で置き直すと, (1) および (2) は

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}-(\nabla\phi\times\vec{e})\cdot\nabla\right)\Delta\phi=-\dfrac{c_1}{n^*}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\phi-n)+c_2\Delta^2\phi, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}-(\nabla\phi\times\vec{e})\cdot\nabla\right)n=-\dfrac{c_1}{n^*}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\phi-n) \quad \text{for } x\in\Omega,\ t>0 \end{cases} \tag{4}$$

および

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}-(\nabla\phi\times\vec{e})\cdot\nabla\right)\Delta\phi=-\dfrac{c_1}{n^*}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\phi-n)+c_2\Delta^2\phi, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}-(\nabla\phi\times\vec{e})\cdot\nabla\right)n=-\dfrac{c_1}{n^*}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\phi-n)+D\Delta n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for } x\in\Omega,\ t>0, \end{cases} \tag{5}$$

となるが, (3) は変わらない.

本研究の目的は, 初期値が $\vec{e}$ 方向に Stepanov 概周期なとき, (5), (3) および (4), (3) を Sobolev–Slobodetskiĭ空間で解くことである.

主結果を紹介する前に, 関数空間および概周期関数の定義を紹介する.

$\Omega:\mathbf{R}^m$ における領域 $(m=1,2,3,\ldots)$ とし, $W_2^l(\Omega)$ $(l\in\mathbf{R},\ l\geq 0)$ で,

$$\|u\|^2_{W_2^l(\Omega)}=\sum_{|\alpha|<l}\|\mathrm{D}_x^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u\|^2_{\dot{W}_2^l(\Omega)},$$

をノルムにもつ Banach 空間を表わす. ただし,

$$\|u\|^2_{\dot{W}_2^l(\Omega)}=\begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|=l}\|\mathrm{D}_x^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{if } l\in\mathbf{Z}, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|=[l]}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|\mathrm{D}_x^\alpha u(x)-\mathrm{D}_y^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{m+2(l-[l])}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{if } l\notin\mathbf{Z}. \end{cases}$$

$[l]$ は l の整数部分, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$ は多重指数, $\mathrm{D}_x^\alpha u=\partial^{|\alpha|}u/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}$ は次数 $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m$ の一般導関数. $1\leq p\leq\infty$, $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ でルベーグ空間 $L^p(\Omega)$ におけるノルムを定める.

Anisotropic Sobolev–Slobodetskiĭ 空間 $W_2^{l,l/2}(Q_T)$ $(Q_T \equiv \Omega \times (0,T))$ は, 以下のノルムをもつ $L^2(0,T;W_2^l(\Omega)) \cap L^2(\Omega;W_2^{l/2}(0,T))$ と定義する.

$$\|u\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_T)} = \|u\|^2_{W_2^{l,0}(Q_T)} + \|u\|^2_{W_2^{0,l/2}(Q_T)}$$

$$\equiv \int_0^T \|u(t)\|^2_{W_2^l(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \int_\Omega \|u(x)\|^2_{W_2^{l/2}(0,T)}\,\mathrm{d}x$$

X : ノルム $\|\cdot\|_X$ をもつ Banach 空間とし, $C(\mathbf{R};X)$: $\mathbf{R}$ から X への連続関数全体のなす空間とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$E_\varepsilon(f) \equiv \left\{\sigma \in \mathbf{R} \mid \sup_{x\in\mathbf{R}} \|f(x+\sigma) - f(x)\|_X \le \varepsilon\right\}$$

が $\mathbf{R}$ で相対的に稠密 (relatively dense), つまり, ある定数 $L = L(\varepsilon) > 0$ が存在し, 任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して $E_\varepsilon(f) \cap (a, a+L) \ne \emptyset$ が成立するとき, $f(x) \in C(\mathbf{R};X)$ は概周期 (almost-periodic) 関数であるという.

$S^p(\mathbf{R};X)$ (または $S^p(X)$) $(1 \le p < \infty)$: つぎのノルムをもつ $L^p_{loc}(\mathbf{R};X)$ の部分空間を表わす.

$$\|u\|^p_{S^p(X)} \equiv \sup_{s\in\mathbf{R}} \int_s^{s+1} \|u(x)\|^p_X\,\mathrm{d}x$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$G_\varepsilon(g) \equiv \left\{\sigma \in \mathbf{R} \mid \sup_{s\in\mathbf{R}} \left(\int_s^{s+1} \|g(x+\sigma) - g(x)\|^p_X\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le \varepsilon\right\}$$

が $\mathbf{R}$ で相対的に稠密なとき, $g(x) \in L^p_{loc}(\mathbf{R};X)$ は Stepanov 概周期 (Stepanov-almost-periodic, S^p 概周期) 関数であるという. $S^p_{ap}(\mathbf{R};X)$ (または $S^p_{ap}(X)$) : $\mathbf{R}$ から X への S^p 概周期関数すべてのなす空間を表わす.

$\omega_T \equiv \omega \times (0,T)$, $k,l \in \mathbf{Z}$, $k,l \ge 0$. つぎの空間を導入する:

$$\widetilde{S}^l(X) \equiv \left\{u \in S^2(X) \mid \|u\|^2_{\widetilde{S}^l} \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{l} \|\mathrm{D}_x^\alpha u\|^2_{S^2(X)} < \infty\right\},$$

$$\widetilde{S}^l_{ap}(X) \equiv \left\{u \in \widetilde{S}^l(X) \mid \mathrm{D}_x^\alpha u \in S^2_{ap}(X),\ |\alpha| = 0,1,\ldots,l\right\},$$

$$\widetilde{S}^{l,l/2}(\omega_T) \equiv \widetilde{S}^l(L^2(\omega_T)) \cap \widetilde{S}^0(L^2(\omega;W_2^{l/2}(0,T))),$$

$$\widetilde{S}^{l,l/2}_{ap}(\omega_T) \equiv \widetilde{S}^l_{ap}(L^2(\omega_T)) \cap \widetilde{S}^0_{ap}(L^2(\omega;W_2^{l/2}(0,T)))$$

また, つぎのノルムを定義する.

$$\|u\|^2_{\widetilde{S}^{l,l/2}_T} \equiv \|u\|^2_{\widetilde{S}^l(L^2(\omega_T))} + \|u\|^2_{\widetilde{S}^0(L^2(\omega;W_2^{l/2}(0,T)))}$$

初期値が $\vec{e}$ 方向に Stepanov 概周期なとき, (5), (3) および (4), (3) に対してつぎの主定理が成立する ([12]).

Theorem 1.1 $D>0$, $n^*(|x'|) \in W_2^2(\omega)$, $n^*(|x'|) \geq n_*$ (n_* : 正の定数) とし, $(\phi_0, n_0) \in \widetilde{S}^4_{ap}(\omega) \times \widetilde{S}^2_{ap}(\omega)$ は整合条件 $\phi_0(x) = \Delta\phi_0(x) = n_0(x) = 0$ for $x \in \Gamma$ をみたすとする. そのとき, 初期境界値問題 (5), (3) は, 任意の $T>0$ に対して, 一意な解 $(\phi, n) \in \left(\widetilde{S}^5_{ap}(\omega; L^2(0,T)) \cap \widetilde{S}^2_{ap}(\omega; W_2^{3/2}(0,T))\right) \times \widetilde{S}^{3,3/2}_{ap}(\omega_T)$ をもつ.

Theorem 1.2 $n^*(|x'|)$, (ϕ_0, n_0) は Theorem1.1 と同じ条件をみたすとする. そのとき, 初期境界値問題 (4), (3) はある $T>0$ に対し, 一意な解 $(\phi, n) \in \left(\widetilde{S}^4_{ap}(\omega; L^2(0,T)) \cap \widetilde{S}^2_{ap}(\omega; W_2^1(0,T))\right) \times \widetilde{S}^{2,1}_{ap}(\omega_T)$ をもつ.

Theorem 1.1 はつぎの手順で証明する: i) 初期値が磁場方向に Stepanov 概周期なとき, (5), (3) に対して Stepanov 概周期な解が時間局所的, 一意に存在することを, Galerkin 法と逐次近似法で証明する; ii) D に依存する解の *a priori* 評価をえることで, 任意の時間まで解を延長する. Theorem 1.2 はつぎの手順で証明する: i) D に関して一様な *a priori* 評価をえることで, T まで解を延長する; ii) 極限 $D \to 0$ をとることによって解の存在を証明する; iii) 解の Stepanov 概周期性を示す.

本稿では Theorem 1.1 の証明 i) を簡単に紹介する. 概周期関数についての基本的な命題を紹介した後, 証明の概要を紹介する.

2 Theorem 1.1 の証明 i)

2.1 基本的命題

X: Hilbert space, $\psi \in S^2_{ap}(X)$ とする. このとき, ψ は Bohr–Fourier 級数で一意に表現できることを確認しておく. 任意の $\xi \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\psi_\xi = \mathcal{M}\{\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x_3}\} \equiv \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} \psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x_3}\,\mathrm{d}x_3$$

が X において存在することがわかっている ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$). このことより, ψ に対して Bohr–Fourier 係数 ψ_ξ が求まることがわかる.

$\{\xi_k\}_{k\in\mathbf{N}}$: $\mathbf{R}$ に値を取る数列, $k \neq k'$ なら $\xi_k \neq \xi_{k'}$ とする. このとき, $m \in \mathbf{N}$ に対してつぎの等式が成立することがわかる.

$$\mathcal{M}\left\{\left\|\psi(x_3) - \sum_{k=1}^{m} \psi_{\xi_k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\xi_k x_3}\right\|_X^2\right\} = \mathcal{M}\{\|\psi(x_3)\|_X^2\} - \sum_{k=1}^{m} \|\psi_{\xi_k}\|_X^2$$

よって

$$\sum_{k=1}^{m} \|\psi_{\xi_k}\|_X^2 \leq \mathcal{M}\{\|\psi(x_3)\|_X^2\}.$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\|\psi_{\xi_k}\|_X > \varepsilon$ をみたす ξ_k は高々有限個存在することが, この不等式からわかる. このことより, すべての $\|\psi_{\xi_k}\|_X$ $(\neq 0)$ は,

$$\|\psi_{\xi_k}\|_X > 1, \quad \frac{1}{m} \geq \|\psi_{\xi_k}\|_X > \frac{1}{m+1} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定まる加算集合の一つに属し, 各々の集合を高々有限個の ξ_k がみたしていることがわかる. 以上より, 高々加算個の $\xi \in \mathbf{R}$ に対して $\|\psi_\xi\|_X \neq 0$ であることがわかる. $\sigma(\psi) = \{\xi \in \mathbf{R} \mid \|\psi_\xi\|_X \neq 0\}$ を ψ のスペクトル, $\sum_{\xi\in\sigma(\psi)} \psi_\xi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi x_3}$ を ψ の Bohr–Fourier 級数といい, つぎのように書く.

$$\psi \sim \sum_{\xi\in\sigma(\psi)} \psi_\xi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi x_3}$$

このとき, つぎの命題が成立することがわかっている.

Lemma 2.1 もし, ψ, $\psi' \in S^2_{ap}(X)$ が同じ Bohr–Fourier 級数をもつなら,

$$\|\psi - \psi'\|_{S^2(X)} = 0.$$

Lemma 2.2 任意の $\psi \in S^2_{ap}(X)$ に対して, Parseval の等式

$$\mathcal{M}\{\|\psi(x_3)\|_X^2\} = \sum_{\xi\in\sigma(\psi)} \|\psi_\xi\|_X^2$$

が成立する.

以上で, ψ は Bohr–Fourier 級数で一意に表現できることの確認ができた. 重要な点は, Lemmas 2.1-2.2 に関しては, 周期関数の場合と同等の結論がえられていることである. つぎは, 一般化三角多項式

$$\sum_{\xi\in\Lambda} a_\xi \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi x} \tag{6}$$

(Λ; $\mathbf{R}$ の加算部分集合, $\{a_\xi\}_{\xi\in\Lambda}\subset\mathbf{C}$) が与えられたとき, f の Bohr–Fourier 級数 =(6) をみたす $f\in S^p_{ap}(X)$ $(1<p<\infty)$ が存在するか否かを考える. $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbf{N}}$: Λ の basis, (6) に属する Bochner–Fejér sum $\mathcal{S}^m(x)$ をつぎで定義する.

$$\mathcal{S}^m(x)=\sum_{\nu_1=-(m!)^2}^{(m!)^2}\cdots\sum_{\nu_m=-(m!)^2}^{(m!)^2}\left(1-\frac{|\nu_1|}{(m!)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{|\nu_m|}{(m!)^2}\right)$$
$$\times a^*_\xi \exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m}\nu_j\frac{\gamma_j}{m!}\,x\right)$$

ただし, $\xi\in\Lambda$ に対して a^*_ξ をつぎで定める.

$$a^*_\xi=\begin{cases} a_\xi & \text{if} \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\nu_j\frac{\gamma_j}{m!}=\xi, \\ 0 & \text{if} \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\nu_j\frac{\gamma_j}{m!}\neq\xi \end{cases}$$

Λ に収束する Λ の増加対称数列 $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ を考える. つまり $-\Lambda_m=\Lambda_m$, $\Lambda_m\subset\Lambda_{m+1}$ および $\Lambda=\cup_m\Lambda_m$ をみたすものを考える. このとき $\mathcal{S}^m(x)$ は以下のように書ける.

$$\mathcal{S}^m(x)=\sum_{\xi\in\Lambda_m} d^{(m)}_\xi a_\xi \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi x}$$

ここで, 定数 $d^{(m)}_\xi$ はつぎをみたす. $0\le d^{(m)}_\xi\le 1$ かつ $\lim_{m\to\infty}d^{(m)}_\xi=1$. 重要な点は, $d^{(m)}_\xi$ は ξ と m に依存するが, a_ξ には独立な点である.

以下が成り立つとき, $\mathcal{F}\subset S^p_{ap}(X)$ は S^p-equi-almost-periodic であるという. 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\mathbf{R}$ の相対的に稠密な部分集合 E_ε が存在し, つぎが成り立つ.

$$\sup_{s\in\mathbf{R}}\int_s^{s+1}\|f(x+\sigma)-f(x)\|^p_X\,\mathrm{d}x<\varepsilon \quad \text{for } f\in\mathcal{F},\ \sigma\in E_\varepsilon$$

$S^p_{ap}(X)$ $(1\le p<\infty)$ に対しては Riesz–Fischer の定理が成り立たないが, つぎの補題が成立する ([2], [4], [5]).

Lemma 2.3 一般化三角多項式 (6) がある関数 $f \in S^p_{ap}(X)$ $(1 < p < \infty)$ の Bohr–Fourier 級数となるための必要十分条件は, (6) に属する Bochner–Fejér sums $\{\mathcal{S}^m(x)\}_{m\in\mathbf{N}}$ が $S^p(X)$ で有界かつ S^p-equi-almost-periodic であること.

Lemma 2.3 について少し解説する. これの優れた点は, (6) よりもずっと評価し易い $\{\mathcal{S}^m(x)\}_{m\in\mathbf{N}}$ を評価すれば十分だといっている点にある. また, この命題中で本質的なところは S^p-equi-almost-periodic であり, [2] に示されている反例はこの条件をみたさない.

2.2 証明の概要

Theorem 1.1 の証明 i) に登場する Proposition 2.1 を簡単に紹介する. Proposition 2.1 の証明は非線形偏微分方程式に対しても有効だが, 今回は証明の見やすさを重視して, Propositions 2.1-2.2 で線形偏微分方程式に対する解の存在を証明し, 逐次近似法で非線形偏微分方程式に対する解の存在を証明することにした.

Proposition 2.1 $D > 0$, $n^\diamond(|x'|) \in W^2_2(\omega)$. $(\psi_0, n_0) \in (\widetilde{S}^2_{ap}(\omega))^2$ は整合条件 $\psi_0(x) = n_0(x) = 0$ for $x \in \Gamma$ をみたすとする. そのとき, 任意の $(f, g) \in (\widetilde{S}^{1,1/2}_{ap}(\omega_T))^2$ に対して, つぎをみたす一意な解 $(\psi, n) \in (\widetilde{S}^{3,3/2}_{ap}(\omega_T))^2$ が存在する.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} - c_2\Delta\psi - n^\diamond\dfrac{\partial^2 n}{\partial x_3^2} = f, \\[2ex] \dfrac{\partial n}{\partial t} - D\Delta n - n^\diamond\dfrac{\partial^2 n}{\partial x_3^2} = g \quad \text{for } x \in \Omega,\ t > 0, \\[2ex] \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad n(x,0) = n_0(x) \quad \text{for } x \in \Omega, \\[2ex] \psi(x,t) = n(x,t) = 0 \quad \text{for } x \in \Gamma,\ t > 0 \end{cases} \tag{7}$$

さらに, この解はつぎをみたす.

$$\|\psi\|_{\widetilde{S}^{3,3/2}_T} + \|n\|_{\widetilde{S}^{3,3/2}_T} \le c\Big(\|\psi_0\|_{\widetilde{S}^2} + \|n_0\|_{\widetilde{S}^2} + \|f\|_{\widetilde{S}^{1,1/2}_T} + \|g\|_{\widetilde{S}^{1,1/2}_T}\Big)$$

Proposition 2.2 $\psi \in \widetilde{S}^{3,3/2}_{ap}(\omega_T)$. そのとき,

$$\begin{cases} \Delta\phi = \psi \quad \text{for } x \in \Omega,\ t > 0, \\[2ex] \phi(x,t) = 0 \quad \text{for } x \in \Gamma,\ t > 0 \end{cases}$$

は一意な解 $\phi \in \widetilde{S}^5_{ap}(\omega; L^2(0,T)) \cap \widetilde{S}^2_{ap}(\omega; W_2^{3/2}(0,T))$ をもち, つぎをみたす.

$$\|\phi\|_{\widetilde{S}^5(\omega;L^2(0,T))} + \|\phi\|_{\widetilde{S}^2(\omega;W_2^{3/2}(0,T))} \le c\|\psi\|_{\widetilde{S}_T^{3,3/2}}$$

Proposition 2.1 の証明. $\Lambda \equiv \sigma(\psi_0) \cup \sigma(n_0) \cup \sigma(f) \cup \sigma(g)$, $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathbf{N}}$: Λ に収束する増加対称数列. 近似解

$$(\mathcal{S}_\psi^m, \mathcal{S}_n^m)(x,t) = \Big(\sum_{\xi\in\Lambda_m} d_\xi^{(m)} \psi_\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x_3}, \sum_{\xi\in\Lambda_m} d_\xi^{(m)} n_\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x_3}\Big)(x,t)$$

の存在を示すことが証明の第一ステップである（形式的には (7) を x_3 成分に関して Fourier 級数展開してえられた式から ψ_ξ, n_ξ を決める). つぎは, m に関して一様な $(\mathcal{S}_\psi^m, \mathcal{S}_n^m)$ の *a priori* 評価をえる. また, 任意の $\sigma \ne 0$ に対して

$$(\mathcal{V}_{\psi\sigma}^m, \mathcal{V}_{n\sigma}^m)(x,t) = (\mathcal{S}_\psi^m, \mathcal{S}_n^m)(x', x_3+\sigma, t) - (\mathcal{S}_\psi^m, \mathcal{S}_n^m)(x', x_3, t)$$

と定め, m に関して一様な $(\mathcal{V}_{\psi\sigma}^m, \mathcal{V}_{n\sigma}^m)$ の *a priori* 評価をえる. えられた評価式を用いて, $(\mathcal{S}_\psi^m, \mathcal{S}_n^m)$ が $(\widetilde{S}^{3,3/2}(\omega_T))^2$ で有界かつ $(\widetilde{S}^{3,3/2}(\omega_T))^2$-equi-almost-periodic であることを示し, Lemmas 2.3 を適用することが, 証明の第二ステップである. 以上が証明のエッセンスだが, 証明中にはつぎの命題も用いる.

X : Banach space. 任意の $\psi \in S^p_{ap}(X)$ $(1 \le p \le \infty)$ に対してつぎが成り立つ:

$$\|\mathcal{S}_\psi^m\|_{S^p(X)} \le \|\psi\|_{S^p(X)},$$

$$\|\mathcal{S}_\psi^m - \psi\|_{S^p(X)} \to 0 \quad \text{as } m \to \infty$$

また, つぎの補題が成立する.

Lemma 2.4 $(\psi_0, n_0, f, g) \in (\widetilde{S}^2_{ap}(\omega))^2 \times (\widetilde{S}^{1,1/2}_{ap}(\omega_T))^2$. そのとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $E_\varepsilon = \Big\{\sigma \in \mathbf{R} \;\Big|\; \Big(\|\Psi_{0\sigma}\|^2_{\widetilde{S}^2} + \|N_{0\sigma}\|^2_{\widetilde{S}^2} + \|F_\sigma\|^2_{\widetilde{S}_T^{1,1/2}} + \|G_\sigma\|^2_{\widetilde{S}_T^{1,1/2}}\Big)^{1/2} \le \varepsilon\Big\}$ は $\mathbf{R}$ で相対的に稠密.

References

[1] H. Alfvén and C.-G. Fälthammar, “Cosmical electrodynamics: fundamental principles”, 2nd ed., Oxford University Press, 1963.

[2] A. S. Besicovitch, *On generalized almost periodic functions,* Proc. L. M. S., **2** (1926), 495-512.

[3] J. Bourgain, M. Goldstein and W. Schlag, *Anderson localization for Schrödinger operators on* $\mathbf{Z}^2$ *with quasi-periodic potential,* Acta Math., **188** (2002), 41-86.

[4] G. Bruno, R. Grande and R. Iannacci, *Almost-periodic multipliers,* Acta Appl. Math., **65** (2001), 137-151.

[5] R. Doss, *Contribution to the theory of almost-periodic functions,* Ann. Math., **46** (1945), 196-219.

[6] C. Foias, *Essais dans l'étude des solutions des équations de Navier–Stokes dans I'espace, L'unicité et la presque-periodicicté des solutions petites,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **32** (1962), 261-294.

[7] J. Fröhlich, T. Spencer and P. Wittwer, *Localization for a class of one-dimensional quasi-periodic Schödinger operators,* Comm. Math. Phys., **132** (1990), 5-25.

[8] P. Helander and D.J. Sigmar, "Collisional Transport in Magnetized Plasmas", Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[9] S. Kondo and A. Tani, *Initial boundary value problem for model equations of resistive drift wave turbulence,* SIAM J. Math. Anal., **43** (2011), 925-943.

[10] S. Kondo and A. Tani, *Initial boundary value problem of Hasegawa–Wakatani equations with vanishing resistivity,* Adv. Math. Sci. Appl., **21** (2011), 223-253.

[11] S. Kondo and A. Tani, *On the Hasegawa–Wakatani equations with vanishing resistivity,* Proc. Japan Acad., **87** (2011), 156-161.

[12] S. Kondo and A. Tani, *Almost-periodic solutions to initial boundary value problem for model equations of resistive drift wave turbulence* , Preprint.

[13] Y. Maekawa and Y. Terasawa, *The Navier–Stokes equations with initial data in uniformly local* L^p *spaces,* Differential Integral Equations, **19** (2006), 369-400.

[14] P. Marcati and A. Valli, *Almost-periodic solutions to the Navier-Stokes equations for compressible fluids,* Boll. Un. Mat. Ital., VI. Ser., **B4** (1985), 969-986.

[15] G. Mulone and V. A. Solonnikov, *On an initial boundary-value problem for the equation of magnetohydrodynamics with the hall and ion-slip effects,* Zap. Nauchn. Sem. POMI, **221** (1995), 167-184 (in Russian); English translation: J. Math. Sci., **87** (1997), 3381-3392.

[16] 中沢誠, "聴覚と信号の特徴に着目した音響信号の一般化調和解析", 早稲田大学大学

院博士論文, 2004.

[17] G. Prouse, *Soluzioni quasi-periodiche dell' equazione differenziale di Navier–Stokes in due dimensioni,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **33** (1963), 186-212.

[18] Ya. G. Sinai, *Anderson localization for one-dimensional difference Schrödinger operator with quasi-periodic potential,* J. Statist. Phys., **46** (1987), 861-909.

[19] 渡邉智彦, 洲鎌英雄, 微視的乱流シミュレーションとは J. Plasma Fusion Res. **81** (2005), 534-546.

[20] 山崎芳男, 音響信号の時間周波数分析, 日本音響学会誌, **53** (1997), 147-153.