数理解析研究所講究録
第 1832 巻 2013 年 139-142

体系 $C\lambda_{I\lambda}$ に関する予想の証明

千葉大学 理学研究科 基盤理学専攻
松田 直祐
Matsuda Naosuke
Division of Fundamental Sciences, Graduate School of Science, Chiba University

体系 $C\lambda_{I\lambda}$ の予想に証明を与える．体系については山川さんの資料を参考にする．
M, N :λ-term , R :$C\lambda$-term とする時, 目標は次の定理の証明である．

$$N \text{ が } M \text{ の} \beta\text{-nf} \;\Rightarrow\; M^* \to N$$

以降の話題では,$C\lambda_{I\lambda}$ の reduction $\to$ の他に, ラムダ計算における β-reduction が登場する．混同する恐れがあるため, 後者を $\mapsto_\beta$ で表記することにする．また特に,reduction-記号の右下に数字が書いてある場合, その回数分の簡約が起こっているものと考えることにする．例えば, $M \mapsto_{3\beta} N$ と書いたら M から N へ 3 回の β-簡約で達することを表している．また, $\equiv$ を α-同値を表す記号として用いる．

1 準備，証明方針

まずは, 変換 $I_\lambda 1, I_\lambda\beta$ が次のように働くことを述べておく．
(1) I_λ1-変換

$$\begin{aligned}(\lambda x.M)^* &\equiv I_\lambda \lambda^* x.M^* \\ &\to_{1I_\lambda 1} \lambda x.(\lambda^* x.M^*)x \\ &\to_{S,K} \lambda x.M^*\end{aligned}$$

(2) $I_\lambda\beta$-変換

$$\begin{aligned}((\lambda x.M)N)^* &\equiv I_\lambda(\lambda^* x.M^*)N^* \\ &\to_{1I_\lambda\beta} (\lambda^* x.M^*)N^* \\ &\to_{S,K} ([N/x]M)^*\end{aligned}$$

このように $I_\lambda\beta$-変換は,term の小さい部分だけを見ると非常にきれいな動きをするのだが, 複雑な $C\lambda$-term の中では, 思い通りの動きをしてくれないことがある ($M \mapsto_\beta N$ でも $M^* \mapsto_\beta N^*$ とならないことがある)．大きな問題の一つは,λ^*-抽象が term の構造を破壊す

ることである. 例えば,

$$((\lambda x.xy)y) \equiv I_\lambda(SI(Ky))y \ \to (yy)^*$$

$$\begin{aligned}(\lambda y.(\lambda x.xy)y)^* &\equiv I_\lambda \lambda^* y.((\lambda x.xy)y)^* \\ &\equiv I_\lambda(S(S(KI_\lambda)(S(K(SI))K))I) \not\to (\lambda y.yy)^*\end{aligned}$$

このような問題点を,I_λ1-変換を使ってどのように解決するかが証明の鍵となってくる. 今回は, 左側から順に I_λ を消していくことで問題を解決していく. つまり, 外側の λ^*-抽象を λ-抽象に直してやって, 内側の term をきれいな形に戻していくのである.

$(\lambda y.(\lambda x.xy)y)^* \to \lambda y.yy$ の道のり

$$\begin{aligned}(\lambda y.(\lambda x.xy)y)^* &\equiv I_\lambda \lambda^* y.((\lambda x.xy)y)^* \\ &\to_{1I_\lambda 1} \lambda y.(\lambda^* y.((\lambda x.xy)y)^*)y \\ &\to_{S,K} \lambda y.((\lambda x.xy)y)^* \\ &\equiv \lambda y.I_\lambda(\lambda^* x.xy)y \\ &\to_{1I_\lambda\beta} \lambda y.(\lambda^* x.xy)y \\ &\to_{S,K} \lambda y.yy\end{aligned}$$

2 証明

Lemma 2.1

$$((\lambda x.M)N)^* \to_{1I_\lambda\beta} ([N/x]M)^*$$

Proof

$$\begin{aligned}&((\lambda x.M)N)^* \equiv I_\lambda(\lambda^* x.M^*)N^* \to_{1I_\lambda\beta} (\lambda^* x.M^*)N^* \\ &\to_{S,K} [N^*/x]M^* \equiv ([N/x]M)^*\end{aligned}$$

■

Lemma 2.2

$$(\lambda\vec{x}.M)^* \to \lambda\vec{x}.M^*$$

Proof

$\vec{x}$ の長さについて帰納的に示す. 長さ 0 の時は明らか. 長さ 1 以上の時は $\vec{x} = (y, \vec{z})$

として

$$(\lambda y.\lambda\vec{z}.M)^* \equiv I_\lambda \lambda^* y.(\lambda\vec{z}.M)^*$$
$$\to_{1I_\lambda 1} \lambda y.(\lambda\vec{z}.M)^* \to \lambda y.\lambda\vec{z}.M^*$$

■

Lemma 2.3

$$M \equiv \lambda\vec{y}.(\lambda x.M_0)M_1M_2\ldots M_n \mapsto_{1h\beta} \lambda\vec{y}.[M_1/x]M_0M_2\ldots M_n$$

であるとする. ただし, $\mapsto_{h\beta}$ で head reduction を表す. この時, 次が成り立つ.

(1) $M^* \to \lambda\vec{y}.([M_1/x]M_0M_2\ldots M_n)^*$

(2) $N \equiv \lambda\vec{y}.\lambda\vec{z}.N_1$ の時, $M^* \to \lambda\vec{y}.\lambda\vec{z}.N_1^*$

Proof

(1)

補題 2.1,2.2 を用いればよい.

(2)

(1) より $M^* \to \lambda\vec{y}.(\lambda\vec{z}.N_1)^*$ が言えるので, 後は補題 2.2 を用いればよい. ■

Corollary 2.4

$M \mapsto_{h\beta} N \equiv \lambda\vec{v}.N_1$ (N_1 は抽象でない) とする. この時, $M^* \to \lambda\vec{v}.N_1^*$.

Proof

$M \mapsto_{nh\beta} N$ であるとし, n についての帰納法で示す.

(1) $n = 0$ の時

補題 2.2 そのものである.

(2) $n \geq 1$ の時

$$M \mapsto_{(n-1)h\beta} R \mapsto_{1h\beta} N \quad , \quad R \equiv \lambda\vec{y}.R_1 \quad , \quad N \equiv \lambda\vec{y}.\lambda\vec{z}.N_1$$

であるとする. 帰納法の仮定から $M^* \to \lambda\vec{y}.R_1$. また, $R_1 \mapsto_{1h\beta} \lambda\vec{z}.N_1$ なので, 補題 2.3 より $R^* \to \lambda\vec{z}.N_1^*$. 従って, $M^* \to \lambda\vec{y}.\lambda\vec{z}.N_1^*$. ■

Theorem 2.5

M, N を λ-term とする. この時, $M \mapsto_\beta N$ ならば $M^* \to N$.

Proof

N の長さについての帰納法を用いる.

(1) $N \equiv x$ の時

$M \mapsto_{h\beta} x$ が知られている. 従って, 系 2.4 より $M^* \to x$.

(2) N が変数でない時

M から N への最左 β-簡約列が存在する. その列を眺めると, $M \mapsto_{h\beta} R \mapsto_{i\beta} N$ なる R が現れる (ただし, $\mapsto_{i\beta}$ は inner reduction を表す). 加えて, $R \equiv \lambda\vec{y}.zM_1\ldots M_n$, $N \equiv$

$\lambda\vec{y}.zN_1\ldots N_n$ $(M_i \mapsto_\beta N_i)$ という形である．帰納法の仮定より $M_i^* \to N_i$, 系 2.4 より $M^* \to \lambda\vec{y}.zM_1^*\ldots M_n^*$ がそれぞれ言えるので，$M^* \to N$ である． ■

3 β-正規形を求めるための具体的な手続き (まとめ)

次のような２つの変換 f :λ-term →Cλ-term , g :Cλ-term →Cλ-term を考える．ただし，以下の定義で複数の条件に引っかかるケースは若い番号を適用するものとする．

$$(f1)\ f(x) \equiv x$$
$$(f2)\ f(MN) \equiv f(M)f(N)$$
$$(f3)\ f(\lambda x.M) \equiv I_\lambda \lambda^* x.f(M)$$

$(g1)$ $g(xA_1\ldots A_n) \equiv xg(A_1)\ldots g(A_n)$

$(g2)$ $g(I_\lambda M) \equiv g(N)$ (N は M の S,K-正規形)

$(g3)$ $g(I_\lambda MNA_1\ldots A_n) \equiv g(RA_1\ldots A_n)$ (R は MN の S,K-正規形)

また，変換 F :λ-term →Cλ-term を $F(M) \equiv g(f(M))$ で定める．すると，上の証明を見ればわかるように，正規形 N を持つような λ-term M に対しては，$F(M)$ の計算は止まり，結果 N を返してくる．この計算途中で α-変換は１度も起こらない．