

偏光の連続測定による結合確率分布の導出

広島大学・大学院先端物質科学研究科 飯沼昌隆

Masataka Iinuma

Graduate school of Advanced Sciences of Matter,
Hiroshima University

1. はじめに

量子力学をより深く理解するために、我々は通常とは異なるアプローチを使って量子状態を表す結合確率を実験から決定することを試みた[1]。通常行う量子状態の決定方法は、密度行列と測定確率との関係式を量子測定理論から求め、その線形な関係式を使って、測定された確率から密度行列を決定するものである。今回行った我々のアプローチは、あからさまに量子論を使わずに確率論と統計的考え方をを用いて線形な関係式を求め、その関係式を使って量子状態を表す結合確率分布を量子測定理論とは独立に求めるものである。このアプローチでは密度行列や状態ベクトルという量子論特有の概念は存在しないが、従来の確率論や統計的概念から量子状態を見直すことで、古典論との違いを明確にすることができる。求めた確率分布は、負の確率、あるいは一般的に複素数確率を含むため通常の古典論が示す統計とは全く異なる。これこそが量子力学的統計の本質的な部分と考えられる。実験では光子の直線偏光を測定対象に用いて、非可換な物理量の関係にある \hat{S}_{HV} ($\hat{\sigma}_Z$ に対応) と \hat{S}_{PM} ($\hat{\sigma}_X$ に対応) を連続して測定し、その測定された結合確率分布から測定の影響が排除された結合確率分布を求めた。従来の射影測定ではこのような測定は考えられなかったが、測定の強さを任意に制御できる Variable strength measurement (VSM) を実現したことによって、このような連続測定が可能となった。また初期状態の結合確率分布と直接測定された結合確率分布との関係式を与えるスピン反転モデル (SFM) を使って、量子論とは独立に初期量子状態を表す結合確率を求めた。実験から求めた結合確率分布は負の確率を含んでいたが、密度行列から理論的に導出されるカークウィッドタイプの結合確率分布[2]と統計誤差の範囲で一致した。これらの結果は、量子状態は負の値を含む拡張された確率分布で記述できることを示唆するとともに、それらは実験的に検証可能であることを示している。

ここでは最初に偏光測定量 \hat{S}_{HV} と \hat{S}_{PM} を簡単に説明し、我々の連続測定実験の概念を紹介する。さらに VSM と SFM の概念を簡単に紹介し、求めた結合確率分布について簡単に論じることにする。

2. 偏光測定量

偏光の測定物理量は、通常、 \hat{S}_{HV} 、 \hat{S}_{PM} 、 \hat{S}_{LR} の3種類あるが、ここでは直線偏光しか扱わないので、 \hat{S}_{HV} と \hat{S}_{PM} の紹介に留める。

偏光状態は二準位系として表せるため、二つの直交基底を固有状態として考えればよい。基底の取り方として一つは、水平方向(H)と垂直方向(V)を固有状態 $|H\rangle$, $|V\rangle$ とする取り方、もう一つとし

て 45° 方向(P)と 135° 方向(M)を固有状態 $|P\rangle, |M\rangle$ とする取り方がある。なお固有値は二値しか取りえないので ± 1 である。前者で表す測定物理量が \hat{S}_{HV} で後者を示すのが \hat{S}_{PM} である。式で書くと、

$$\begin{aligned}\hat{S}_{HV}|H\rangle &= +1|H\rangle & \hat{S}_{HV}|V\rangle &= -1|V\rangle \\ \hat{S}_{PM}|P\rangle &= +1|P\rangle & \hat{S}_{PM}|M\rangle &= -1|M\rangle\end{aligned}$$

となる。PM 基底は、明らかに以下の関係を満たす。

$$|P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \quad |M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$$

これらの基底を使えば、直線偏光を表す一般的な量子状態は状態ベクトル $|\psi\rangle$ を用いると、

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= C_H|H\rangle + C_V|V\rangle \\ |\psi\rangle &= C_P|P\rangle + C_M|M\rangle\end{aligned}$$

となり(直線偏光のみを考えているため、これらの係数は実数に限定している)、この量子状態に対して \hat{S}_{HV} と \hat{S}_{PM} を測定したときの期待値は、

$$\begin{aligned}\langle \hat{S}_{HV} \rangle &= p_H - p_V = \langle \psi | \hat{S}_{HV} | \psi \rangle = |C_H|^2 - |C_V|^2 \\ \langle \hat{S}_{PM} \rangle &= p_P - p_M = \langle \psi | \hat{S}_{PM} | \psi \rangle = |C_P|^2 - |C_M|^2\end{aligned}$$

となる。量子状態を決定するとは、これらの係数(密度行列の各要素と対応)を実験から決定することであるが、実験からは確率しか求まらない。例えば \hat{S}_{HV} の測定は、HV 基底で固有値 $+1$ と -1 を取る確率を測定することに対応する。このとき $p_H = |C_H|^2$ 、 $p_V = |C_V|^2$ の数値から C_H と C_V の絶対値は求まるが、符号は定まらない。したがって係数を符号も含めて完全に決定するには PM 基底での測定、つまり \hat{S}_{PM} の測定も必要となる。

なお \hat{S}_{HV} と \hat{S}_{PM} の表現は HV を基底にとるとパウリ行列の $\hat{\sigma}_Z$ と $\hat{\sigma}_X$ に対応しているため、以下のように書くことができる。

$$\hat{S}_{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \hat{S}_{PM} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

両者は、次のように非可換な物理量の関係にあるため、同時に測定することはできない。

$$[\hat{S}_{HV}, \hat{S}_{PM}] \neq 0$$

したがって通常の量子トモグラフィでは、両者をそれぞれ独立に射影測定して二つの確率分布を測定し、その確率分布に対し量子測定理論を使って得られる関係式を使って初期量子状態を決定する。一方今回の我々のアプローチは、 \hat{S}_{PM} の測定に対し測定の強さを制御できるVSMを使って \hat{S}_{PM} と \hat{S}_{HV} の連続測定を行い、測定された結合確率分布からSPMによる関係式を使って初期状態を表す結合確率分布を求めるものである。いずれにしても、 \hat{S}_{PM} と \hat{S}_{HV} の両方の測定が必要となる。

3. \hat{S}_{PM} と \hat{S}_{HV} の連続測定実験

3-1. Variable Strength Measurement (VSM)

\hat{S}_{PM} の測定について、我々は測定に強さを任意に制御できるVSMを実現することに成功した[3]。その概念図を図1に示す。

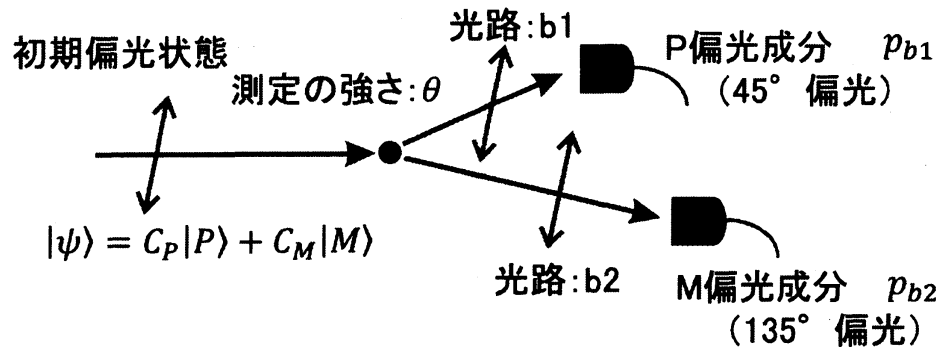


図1: Variable Strength Measurement (VSM)

ここでのポイントは、 \hat{S}_{PM} の測定を光路 b1 と b2 での光子の測定に置き換えているところにある。初期偏光状態の光子は、光路 b1 と光路 b2 に分けられ、光路 b1 が P 偏光成分に対応し、光路 b2 が M 偏光成分に対応する。したがって光路 b1 で測定される光子の検出確率 p_{b1} が P 偏光成分の確率を示し、光路 b2 で測定される光子の検出確率 p_{b2} が M 偏光成分の確率を表すことになる。これは \hat{S}_{PM} の固有状態 $|P\rangle, |M\rangle$ を測定基底とするそれぞれの確率を測定することに対応している。さらにこの測定では、測定の強さ θ によってこの選別のシャープさに変化を与えることができる。この測定の強さ θ は実験上での制御パラメータで、 $\theta=0^\circ$ が初期偏光状態の P 偏光成分と M 偏光成分の割合に依らず等確率で選別、つまり測定しない状態に対応し、 $\theta=22.5^\circ$ で初期偏光状態の P 偏光成分と M 偏光成分の割合で選別、つまり射影測定に対応する。この θ によって変化する選別のシャープさが測定の分解能(ε)と呼ばれるものである。 ε は $\theta=0^\circ$ のとき $\varepsilon=0$ 、 $\theta=22.5^\circ$ のとき $\varepsilon=1$ の値を取る。この測定では一般に $\varepsilon=1$ とは限らないので、M 偏光成分を光路 b1 で誤って測定される誤り確率 p_{PM} が存在し、この p_{PM} は ε を使って以下のように表される。なお p_{PM} は、P 偏光成分を光路 b2 で誤って測定される確率とも等しくなる。

$$p_{PM} = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) \quad \varepsilon \equiv \frac{p_{b1} - p_{b2}}{\langle \psi_{in} | \hat{S}_{PM} | \psi_{in} \rangle}$$

ここで $|\psi_{in}\rangle$ は任意の偏光状態で、純粋状態ならばどんな状態でも良い。 p_{b1} と p_{b2} はその偏光状態で測定された確率を示す。 ε の評価のためにP偏光の光子を入力すれば、 $\varepsilon = p_{b1} - p_{b2}$ となる。

3-2. \hat{S}_{PM} と \hat{S}_{HV} の連続測定

光路 b1 と b2 の後に偏光板をH方向、またはV方向に向けて置けば、 \hat{S}_{PM} の選別の後に \hat{S}_{HV} を測定することになる。これは \hat{S}_{PM} と \hat{S}_{HV} の連続測定になる。その概念図を図2に示す。

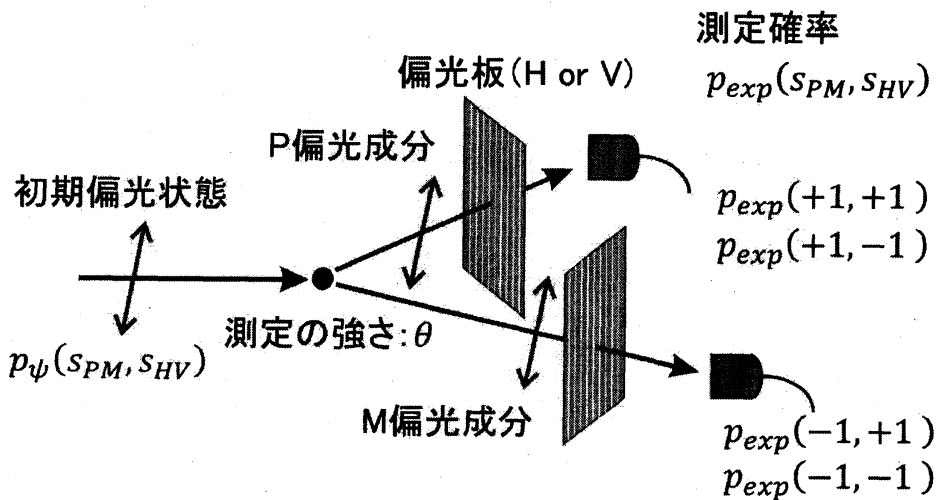


図 2: \hat{S}_{PM} と \hat{S}_{HV} の連続測定

光路 b1 はP偏光成分に対応するため、これは \hat{S}_{PM} の固有値 $s_{PM} = +1$ を測定することに対応し、光路 b2 はM偏光成分に対応するため、 \hat{S}_{PM} の固有値 $s_{PM} = -1$ を測定することに対応する。さらに偏光板をH方向に向ければ、 \hat{S}_{HV} の固有値 $s_{HV} = +1$ を測定することになり、偏光板をV方向に向ければ、 \hat{S}_{HV} の固有値 $s_{HV} = -1$ を測定することになる。したがって実験では、結合確率分布 $p_{\psi}(s_{PM}, s_{HV})$ の初期偏光状態の光子を多数個入力し、 (s_{PM}, s_{HV}) の組み合わせで得られる光子数を計測して、その度数分布から測定確率分布 $p_{exp}(s_{PM}, s_{HV})$ を得ることになる。つまり偏光板の方向をH方向またはV方向に切り替えることによって、光路 b1 では結合確率 $p_{exp}(+1, +1)$ と $p_{exp}(+1, -1)$ 、光路 b2 では結合確率 $p_{exp}(-1, +1)$ と $p_{exp}(-1, -1)$ が得られる。ところがこの確率分布には、 \hat{S}_{PM} 測定の影響が含まれており、測定確率 $p_{exp}(s_{PM}, s_{HV})$ は初期状態の結合確率 $p_{\psi}(s_{PM}, s_{HV})$ と等しくならない。もし $\theta = 0^\circ$ ならば、光路 b1 と b2 への選別は偏光に依存せずに初期偏光状態を保ったまま等確率でおこるため、偏光板で初期偏光状態のH偏光成分とV偏光成分の確率を測定できる。しかし θ が大きくなるにつれ偏光の選別がシャープになるため、光路 b1 でのP偏光成分の割合と光路 b2 でのM偏光成分の割合が大きくなる。もし $\theta = 22.5^\circ$ ならば光子はP偏

光とM偏光に完全に射影されて選別されるため、光路b1の光子は完全にP偏光、光路b2の光子は完全にM偏光になってしまう。このPまたはM偏光で偏光板をH方向またはV方向に向けても、H偏光成分の確率とV偏光成分の確率は等しくなっており、初期偏光状態のHV成分の確率分布は完全にわからない。これがいわゆる測定の反作用(η)と呼ばれるものである。 $\theta=0^\circ$ のとき $\eta=0$ 、 $\theta=22.5^\circ$ のとき $\eta=1$ の値を取る。このとき光子が光路b1か光路b2に選別されることによって、初期偏光のH偏光成分がV偏光成分に反転する確率 p_{HV} が存在する。この p_{HV} は η を使って以下のように表される。なおこの反転確率 p_{HV} は、V偏光成分がH偏光成分に反転する確率とも等しい。

$$p_{HV} = \frac{\eta}{2} \quad 1 - \eta \equiv \frac{\{p_{exp}(+1, +1) + p_{exp}(-1, +1)\} - \{p_{exp}(+1, -1) + p_{exp}(-1, -1)\}}{\langle \psi_{in} | \hat{S}_{HV} | \psi_{in} \rangle}$$

ここで $|\psi_{in}\rangle$ は任意の偏光状態で、純粋状態であればどんな状態でも良い。 p_{exp} はその偏光状態で測定された確率を示す。 η の評価のためにH偏光の光子を入力すれば、 $1 - \eta = \{p_{exp}(+1, +1) + p_{exp}(-1, +1)\} - \{p_{exp}(+1, -1) + p_{exp}(-1, -1)\}$ となる。一方得られた p_{exp} を使うと、 ε は以下のように書き直すことができる。

$$\varepsilon \equiv \frac{\{p_{exp}(+1, +1) + p_{exp}(+1, -1)\} - \{p_{exp}(-1, +1) + p_{exp}(-1, -1)\}}{\langle \psi_{in} | \hat{S}_{PM} | \psi_{in} \rangle}$$

この実験での重要なポイントは、直接測定される $p_{exp}(s_{PM}, s_{HV})$ は ε と η の影響を含むため測定の強さ θ に依存するが、初期偏光状態を直接表す $p_{\psi}(s_{PM}, s_{HV})$ は明らかに測定の影響を含まないため、測定の強さ θ に依存しない点にある。直接得られる $p_{exp}(s_{PM}, s_{HV})$ から $p_{\psi}(s_{PM}, s_{HV})$ を求めるためには、測定が及ぼす不確定性を考慮して測定の影響を排除する必要がある。

3-3. 測定の不確定性関係

測定の強さ θ を強くすると、測定の分解能 ε は向上するが同時に測定の反作用 η も大きくなる。逆に θ を小さくすると、 ε も η も小さくなる。理論から ε と $1 - \eta$ との関係は、

$$\varepsilon^2 + (1 - \eta)^2 \leq 1$$

が成立する。これがいわゆる、測定の分解能 ε と測定の反作用 η との間に成り立つ測定の不確定性関係である。理論計算から ε 、 η と θ の間には以下の関係式が成立する。

$$\varepsilon = V_{HV} \sin 4\theta \quad 1 - \eta = V_{PM} \cos 4\theta$$

ここで V_{HV} と V_{PM} は実験の不完全性を表すパラメータで、 $V_{HV} = 1$ 、 $V_{PM} = 1$ が理想の場合である。我々の実験では、 $V_{HV} = 0.85$ 、 $V_{PM} = 0.9997$ であった。ここで大事なことは、測定の強さ θ を決定

すれば、これらのパラメータの値を使って ε と η が自動的に決定されることである。さらに ε と η は θ のみに依存し、純粋状態に限るが、どんな初期状態にも依存しない。

3-4. スピン反転モデル(SFM)

$p_{exp}(s_{PM}, s_{HV})$ と $p_{\psi}(s_{PM}, s_{HV})$ との関係を記述する式を得るために、 ε による誤り確率 p_{PM} と η による反転確率 p_{HV} に着目する。偏光は二値の値 ± 1 しか取りえないから、誤りや反転は $s_{PM} \rightarrow -s_{PM}$ 、 $s_{HV} \rightarrow -s_{HV}$ のように符号を反転させるだけである。さらに θ が決まれば ε と η は決まるため、そのときの誤り確率 p_{PM} と反転確率 p_{HV} に従って、 (s_{PM}, s_{HV}) の組み合わせがランダムに混在したものが統計的に測定される。したがって $p_{exp}(s_{PM}, s_{HV})$ は、以下のように書ける。

$$p_{exp}(s_{PM}, s_{HV}) = (1 - p_{PM})(1 - p_{HV}) \cdot p_{\psi}(s_{PM}, s_{HV}) + (1 - p_{PM})p_{HV} \cdot p_{\psi}(s_{PM}, -s_{HV}) \\ + p_{PM}(1 - p_{HV}) \cdot p_{\psi}(-s_{PM}, s_{HV}) + p_{PM}p_{HV} \cdot p_{\psi}(-s_{PM}, -s_{HV})$$

実験では、4つの結合確率 $p_{exp}(+1, +1)$ 、 $p_{exp}(+1, -1)$ 、 $p_{exp}(-1, +1)$ 、 $p_{exp}(-1, -1)$ が直接得られるため、上記の式を用いると、初期偏光状態を表す4つの結合確率 $p_{\psi}(+1, +1)$ 、 $p_{\psi}(+1, -1)$ 、 $p_{\psi}(-1, +1)$ 、 $p_{\psi}(-1, -1)$ を逆に求めることができる。この式で $p_{exp}(s_{PM}, s_{HV})$ と $p_{\psi}(s_{PM}, s_{HV})$ は、両方とも結合確率として定義されており、以下の関係式を満たしている。

$$\sum_{s_{PM}=\pm 1, s_{HV}=\pm 1} p_{exp}(s_{PM}, s_{HV}) = \sum_{s_{PM}=\pm 1, s_{HV}=\pm 1} p_{\psi}(s_{PM}, s_{HV}) = 1$$

なおこのモデルは量子論をあからさまに使っていない。あくまでも測定の統計的性質と確率論から定式化したものである。

4. 測定結果と解析結果

$p_{exp}(s_{PM}, s_{HV})$ の測定結果と、同じ測定データから SFM によって得られた $p_{\psi}(s_{PM}, s_{HV})$ の解析結果をまとめたものを表に示す。このとき測定した初期偏光状態は純粋状態で、垂直方向から 22.5° の角度で傾けた直線偏光である。

		θ の値(単位 $^\circ$)					
		2.2	6.6	11.0	13.2	17.6	19.8
(s_{PM}, s_{HV}) の組み 合わせ	(+1,+1)	0.09354	0.1532	0.2258	0.2608	0.3332	0.3659
	(-1,+1)	0.04918	0.02280	0.01743	0.02240	0.05040	0.07151
	(+1,-1)	0.4515	0.4788	0.4834	0.4793	0.4508	0.4294
	(-1,-1)	0.4055	0.3452	0.2734	0.2375	0.1656	0.1333

表1: $p_{exp}(s_{PM}, s_{HV})$ の測定結果

		θ の値 (単位°)						理論値
		2.2	6.6	11.0	13.2	17.6	19.8	
(s_{PM}, s_{HV}) の組み合 わせ	(+1,+1)	0.2392	0.2408	0.2470	0.2454	0.2511	0.2566	0.2500
	(-1,+1)	-0.1007	-0.1025	-0.1040	-0.1039	-0.09786	-0.09030	-0.1036
	(+1,-1)	0.6079	0.6072	0.6060	0.6080	0.6023	0.5958	0.6036
	(-1,-1)	0.2537	0.2545	0.2509	0.2505	0.2444	0.2380	0.2500

表2: $p_{\psi}(s_{PM}, s_{HV})$ の測定結果

表1は直接測定して得た結合確率分布、表2は表1の値をそのまま機械的に SFM で求めた値を示している。表1では $p_{exp}(s_{PM}, s_{HV})$ が明らかに θ に依存している一方で、表2では $p_{\psi}(s_{PM}, s_{HV})$ が θ に依らずほぼ一定であることがわかる。ここでは記していないが統計誤差を考慮すると、求めた $p_{\psi}(s_{PM}, s_{HV})$ は統計誤差の範囲内で θ に依らず一定であり、理論値と一致していた。

5. 議論

表1と表2の結果からわかる重要なメッセージは、以下の3つである。一つは SFM によって θ に依存しない結合確率を得たことである。 θ に依らないということは測定の強さに依らないことを意味するので、測定の影響が排除されていることが分かる。したがって求めた結合確率分布は、初期量子状態の結合確率分布と解釈できる。二つ目のメッセージは、実験値は理論値と統計誤差の範囲内で一致したことである。ここで示した理論値は、以下に示したカークウィッドタイプの確率分布をこの実験に当てはめた値である。

$$K_{\rho}(s_{PM}, s_{HV}) = \langle s_{HV} | s_{PM} \rangle \langle s_{PM} | \hat{\rho} | s_{HV} \rangle \quad \hat{\rho} = |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (|\psi_i\rangle = \sin 22.5 |H\rangle + \cos 22.5 |V\rangle)$$

SFM によって求めた表2の値は理論とは独立に求めた値であるから、そのまま理論値と比較できる。この比較から、求めた初期状態の結合確率分布はカークウィッドタイプの確率分布と等しいことが今回初めて確認できた。三つ目のメッセージは、確率分布の一つが負の確率になったことである。負の確率の物理的解釈の問題は残っているが、このような線形で単純な統計モデルを適用しただけで負の結合確率が得られたこと、さらに符号も含めて実験値が理論値と一致したことは驚きであった。今回の初期偏光状態では $p_{\psi}(-1, +1)$ が負の確率となったが、初期偏光状態によっては他の確率が負になることもありうる。つまり4つの確率は矛盾のない形で量子状態を表す一つの確率分布として与えていることになるため、負の確率だけ棄却するというものではない。実際、今回の結合確率の導出も、確率分布として4つの確率が同時に求めた。つまり量子力学は負の確率を容認しているように思われる。しかし直接測定しようとする測定の不確定性による誤り確率が存在するため、測定すれば表1のようになり負の確率は見えてこない。つまり負の確率の直接測定は容認していない。表1と表2は同じ測定データであるから、表1は負の確率による特異な統計性を内在しているが、測定の不確定性によってその特異な統計性は見えなくなってしまったと考えることができる。

6. 量子力学における確率について

今回の解析から求めた初期状態の結合確率分布は、直接測定できない確率分布である。負の確率を直接測定することは不可能であり、量子力学は負の確率を容認しているが直接測定は容認していない。この直接測定できないという観点からみれば、通常の量子トモグラフィと事情は同じである。量子トモグラフィでは量子状態を複数の基底で同時に測定できないために、さまざまな基底で測定された複数個の確率分布から初期量子状態の密度行列を推定することを行っている。しかし得られた密度行列、特に非対角要素の統計的意味がはっきりしないため、古典統計との違いがすぐには分からない。その一方で負の確率を認めれば、負の確率は古典的統計とは全く異なった統計を示すのは明白である。その統計性の違いが、量子と古典との根本的な違いや量子パラドックスを生み出しているのかもしれない。密度行列や状態ベクトルなどの量子論特有の概念に頼らず、負の値を含む拡張された確率分布や統計的性質を考えることによって、古典と量子の違いがより一層明白になる。

我々の日常でよく使われる確率は、すでに起こった事象の状態について情報がいないために、その状態を確率として表現する場合と、起こる前の傾向性あるいは潜在性を確率として表現する場合の両方が混在している。さらに起こる前の傾向性や潜在性を表す確率が、起こった事象の数(度数)から直接求まる確率と完全に等しいと考える場合が多い。前者の例として例えばコインを考え、落ちてきたコインを両手で受けた後もコインを手で覆ったままの場合、上が表か裏か情報がないために表の確率が $1/2$ 、裏の確率が $1/2$ と表す場合に対応する。その一方で後者の例では、投げあげたコインを両手で受ける前に、上が表となる潜在性や傾向性を確率 $1/2$ として表現する場合に対応する。さらにこの場合、コインを両手で受ける前の潜在性の確率は、両手で受けた後の度数分布から求まる確率と完全に等しいと考える。しかし量子力学はそれらすべてを区別しているように見える。例えば、非局所性における隠れた変数の議論は、起こった事象について情報が無いとしてその状態を確率で表現し、統計性を説明する議論である。ベルの不等式の破れに象徴されるように、隠れた変数の議論はさまざまな場面で否定されているが、それらは起こった事象についての確率が系の統計性を示しているのではなく、起こる前の潜在性の確率が物理系の統計性を表しているからだと思われる。また測定で直接得られる確率は起こった事象を計測して頻度から得た確率であるが、今回の解析で見たように、避けられない測定の不確定性によって、それらが測定前の潜在性を表す初期状態の確率と完全に等しいとは限らない。しかもカークウィッドタイプの確率分布は、明らかに複素数である。直接測定できない量子状態を密度行列として表現するだけでなく、測定前の潜在性を表す複素数確率として考え直すことは[4]、量子力学への理解をより深める可能性があるように思われる。

7. 今後の課題

今回の解析は純粋状態のみであった。混合状態でも同じ解析が可能かどうか、興味のあるところである。また SFM はあくまでも仮定であるため、このモデルがどこまで正しいのか、統計的手法で検定できると面白い。

なおこの研究は、同じ広島大学大学院先端物質科学研究科の鈴木佑太郎氏、ホフマン・ホルガ氏との共同研究によるものです。

参考文献:

- [1] Yutaro Suzuki, Masataka Iinuma, and Holger F. Hofmann,
New Journal of Physics, Vol. 14 (2012) 103022
- [2] J. G. Kirkwood, Physical Review Vol. 44 (1933) 31
- [3] Masataka Iinuma, Yutaro Suzuki, Gen Taguchi, Yutaka Kadoya, and Holger F. Hofmann,
New Journal of Physics, Vol. 13 (2011) 033041
- [4] Holger F. Hofmann, New Journal of Physics, Vol. 14 (2012) 043031