

Bifurcation structure of stationary layers for generalized Allen-Cahn equations with nonlocal constraint *

電気通信大学・情報理工学研究科 久藤 衡介 (Kousuke Kuto) †
Graduate School of Informatics and Engineering
The University of Electro-Communications

1 積分条件を伴う Allen-Cahn 方程式の境界値問題

次の非線形常微分方程式に対する 2 点境界値問題

$$\begin{cases} -du'' = f(u, \lambda), & x \in (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

を積分条件

$$\int_0^1 g(u, \lambda) dx = \mu \quad (1.2)$$

の下で考える。ここで, $d > 0$, $\lambda \in (a, c)$ および $\mu \in \mathbb{R}$ はパラメーターであって, 非線形項 $f(u, \lambda)$ は

$$f(u, \lambda) := u(1 - u)(u - m(\lambda)) \quad (1.3)$$

とする。なお, $m \in C^1(a, c)$, $g \in C^1(\mathbb{R} \times (a, c))$ は与えられた関数であって, m は次の条件をみたすとする:

$$\frac{d}{d\lambda} m(\lambda) > 0 \quad (a < \lambda < c), \quad \lim_{\lambda \downarrow a} m(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \uparrow c} m(\lambda) = 1. \quad (1.4)$$

問題 (1.1)-(1.2) は空間 1 次元の自励系で, 単調増加な解 $u(x)$ に対する適当なスケーリングとその折り返しをつなぎ合わせることによって, すべての解を網羅することができる。そこで以下では, 単調増加な解のみを扱うことにする。

* 辻川 亨 氏 (宮崎大学工学部) との共同研究に基づく。

† e-mail address: kuto@e-one.uec.ac.jp

積分条件 (1.2) を課さない境界値問題 (1.1) は, 固定された各 $\lambda \in (a, c)$ に対して, 定数解 $u = 0, m(\lambda), 1$ ($0 < m(\lambda) < 1$) をもつ. (1.1) に関連するエネルギー汎関数の観点から, $u = 0$ と $u = 1$ が安定な定数解で, それらに挟まれる $u = m(\lambda)$ は不安定な定数解であることが知られている. その意味で, $f(u, \lambda)$ は双安定型の非線形項であって, (1.1) の第 1 式は空間 1 次元の定常 Allen-Cahn 方程式と呼ばれる.

境界値問題 (1.1) の非定数解についても大域分岐構造が知られている ([12, 10, 11] 等). 任意に固定された $\lambda \in (a, c)$ に対して, (1.1) の単調増加な解の集合 $\Gamma(\lambda)$ は, d でパラメーター表示される単純曲線

$$\Gamma(\lambda) = \left\{ (u, d) \in C^2([0, 1]) \times \mathbb{R} \mid u = \phi(\cdot; d, \lambda), \quad 0 < d < d_*(\lambda) := \frac{m(\lambda)(1 - m(\lambda))}{\pi^2} \right\} \quad (1.5)$$

を形成する. この曲線 $\Gamma(\lambda)$ は, $d = d_*(\lambda)$ において定数解 $u = m(\lambda)$ から分岐して, 任意の $(\phi(\cdot; d, \lambda), d) \in \Gamma(\lambda)$ は

$$0 < \phi(x; d, \lambda) < 1, \quad x \in [0, 1]$$

をみます. 曲線 $\Gamma(\lambda)$ に沿った特異極限 $\lim_{d \rightarrow 0} \phi(\cdot; d, \lambda)$ は, 非線形項の積分

$$I(\lambda) = \int_0^1 f(u, \lambda) du, \quad \lambda \in (a, b)$$

の符号によって分類されることが知られている. (1.4) より,

$$\exists b \in (a, c); \quad m(b) = \frac{1}{2}, \quad I(\lambda) \begin{cases} > 0, & \lambda \in (a, b), \\ = 0, & \lambda = b, \\ < 0, & \lambda \in (b, c) \end{cases} \quad (1.6)$$

であることが容易に分かる (図 1 参照). よって, $d > 0$ が小さいときの特異摂動解 $\phi(\cdot; d, \lambda) \in \Gamma(\lambda)$ の形状は, λ と b の大小に応じて次のように分類される:

- (i) $\lambda \in (a, b)$ のとき, $\phi(x; d, \lambda)$ は境界 $x = 1$ の左近傍の左側では 0 に近く, $x = 1$ の左近傍には境界遷移層をもつ.
- (ii) $\lambda = b$ のとき, $\phi(x; d, \lambda)$ は $x = 1/2$ の近傍の左側では 0 に近く, 右側では 1 に近い. $x = 1/2$ の近傍では内部遷移層をもつ.
- (iii) $\lambda \in (b, c)$ のとき, $\phi(x; d, \lambda)$ は境界 $x = 0$ の右近傍の右側では $u = 1$ に近く, $x = 0$ の右近傍では境界遷移層をもつ.

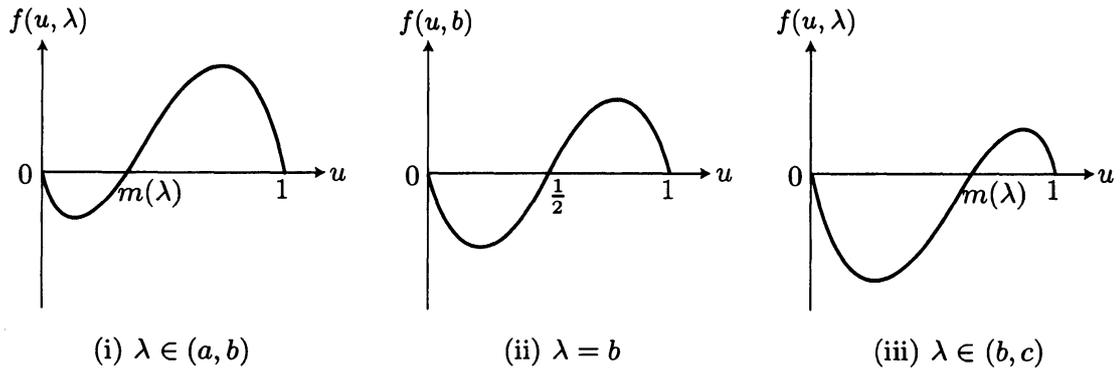


図1 非線形項 $u \mapsto f(u, \lambda)$ のグラフ

本稿で扱う問題 (1.1)-(1.2) は, 境界値問題 (1.1) の単調増加な解の集合 $\bigcup_{\lambda \in (a, c)} \Gamma(\lambda)$ から積分条件 (1.2) をみたす関数を選び出すことである. ここで, d に加えて $\lambda \in (a, c)$ もパラメーターとして扱うことに注意する. (1.5) は, (d, λ) -平面上の有界集合

$$\mathcal{R} := \{(d, \lambda) \in (0, d_*(\lambda)) \times (a, c)\}$$

と $\bigcup_{\lambda \in (a, c)} \Gamma(\lambda)$ が一対一対応であることを意味する. よって, (1.1)-(1.2) は, 各 $\mu \in \mathbb{R}$ に応じて, 積分条件 (1.2) をみたす (d, λ) の集合を \mathcal{R} 内に描く問題に帰着される.

本稿では, 反応拡散モデルへの応用の観点から, 次の条件を $g(u, \lambda)$ に課す:

- (g1) $g_\lambda(0, \lambda) < 0$ ($a < \lambda < b$), $g_\lambda(1, \lambda) < 0$ ($b < \lambda < c$);
- (g2) $g(0, b) < g(1, b)$;
- (g3) 関数 $\lambda \mapsto g(m(\lambda), \lambda)$ は $\lambda \in (a, c)$ に関して単調;
- (g4) ある定数 $M > 0$ に対して, $g(u, b) + g(1 - u, b) = 2M$ ($0 \leq u \leq 1$).

これらの条件をみたす $g(u, \lambda)$ の例として,

$$g(u, \lambda) = \frac{u+1}{m(\lambda)+2}, \quad g(u, \lambda) = \frac{u+2}{m(\lambda)+1}$$

が挙げられ, (g3) の $\lambda \mapsto g(m(\lambda), \lambda)$ は前者では単調増加, 後者では単調減少になる.

上記の (g1)-(g4) の下では, (1.1)-(1.2) の単調増加な解の集合は, 定数解から分岐して特異極限に向かう曲線のみならず, 異なる特異極限をつなぐようなサドルノード型の分岐曲線を形成することが分かった. 詳しく述べると, 積分条件 (1.2) のレベル μ に応じて, (1.1)-(1.2) の単調増加な解の集合は

- ・ 定数解
- ・ 境界遷移層をもつ特異摂動解
- ・ 内部遷移層をもつ特異摂動解

の任意の2つをつなぐような分岐曲線を含む. この場合, 内部遷移層の位置は区間の中央 ($x = 1/2$) とは限らず, μ の値に依存して, 区間 $(0, 1)$ 内で連続的に変化することも分かった. 特に $(g3)$ の $\lambda \mapsto g(m(\lambda), \lambda)$ が単調減少の場合, μ を適当に選ぶと, 十分小さい $d > 0$ に対して, (1.1)-(1.2) は単調増加な解を3個 (境界遷移層をもつ解を2個と内部遷移層をもつ解を1個) をもつ (定理 2.2 と図 2 参照).

2 解集合の大域分岐構造

問題 (1.1)-(1.2) の単調増加な解の集合の大域分岐構造を述べる. その前に, 積分条件 (1.2) を課さない境界値問題 (1.1) の単調増加な解に対する既存の結果を紹介しておこう:

補題 2.1 ([12, 10, 11]). 関数 $m \in C^1(a, c)$ は (1.4) をみたすとする. このとき, 各 $\lambda \in (a, c)$ に対する (1.1) の単調増加な解の集合 $\Gamma(\lambda)$ は, (1.5) のように $d \in (0, d_*(\lambda))$ でパラメーター表示される単純曲線を形成する. 次の意味で, $\Gamma(\lambda)$ は $d = d_*(\lambda)$ において定数解 $m(\lambda)$ から分岐している:

$$\lim_{d \uparrow d_*(\lambda)} \phi(\cdot; d, \lambda) = m(\lambda) \text{ in } C^2([0, 1]). \quad (2.1)$$

さらに, 特異極限 $\lim_{d \downarrow 0} u(\cdot; d, \lambda)$ は λ と b の大小に応じて, 次のように分類される:

(i) $\lambda \in (a, b)$ のとき, $\int_0^1 f(u, \lambda) du = 0$ をみたす $\eta(\lambda) \in (0, 1)$ に対して,

$$\lim_{d \downarrow 0} \phi(x; d, \lambda) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ \eta(\lambda), & x = 1. \end{cases}$$

(ii) $\lambda = b$ のとき, $\phi(x; d, b) + \phi(1-x; d, b) = 1$ ($(x, d) \in (0, 1) \times (0, d_*(b))$) であって,

$$\lim_{d \downarrow 0} \phi(x; d, b) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2}, \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

(iii) $\lambda \in (b, c)$ のとき, $\int_\zeta^1 f(u, \lambda) du = 0$ をみたす $\zeta(\lambda) \in (0, 1)$ に対して,

$$\lim_{d \downarrow 0} \phi(x; d, \lambda) = \begin{cases} \zeta(\lambda), & x = 0, \\ 1, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

補題 2.1 の (i)-(iii) の分類が, 前節の特異摂動解 $\phi(x; d, \lambda)$ の形状の分類に対応している. また, $\mathcal{R} = \{(d, \lambda) \in (0, d_*(\lambda)) \times (a, c)\}$ に属する (d, λ) が, (1.1) の解 $\phi(x; d, \lambda)$ と

一対一に対応していて、 \mathcal{R} が (1.1) の単調増加な解が一意存在するための必要十分な領域を与えている。

それでは、各 μ に対して、問題 (1.1)-(1.2) の単調増加な解の集合

$$\mathcal{S}(\mu) := \{(u, d, \lambda) \in \Gamma(\lambda) \times (a, c) \mid (u, d, \lambda) \text{ は (1.1)-(1.2) の解}\}$$

の大域分岐構造を述べる. (g1) より $\lim_{\lambda \downarrow a} g(0, \lambda) > g(0, b)$ かつ $g(1, b) > \lim_{\lambda \uparrow c} g(1, \lambda)$ であり, (g2) と (g4) より $g(0, b) < M < g(1, b)$ が分かる.

まずは, (g3) の $\lambda \mapsto g(m(\lambda), \lambda)$ が単調減少であって,

$$g_{1c} < g_{0b} < M < g_{1b} < g_{0a} \tag{2.2}$$

のケースを扱う. ただし, $g_{1c} = \lim_{\lambda \uparrow c} g(1, \lambda)$, $g_{0b} = g(0, b)$ などと略記した. (g1),(g3) より, $\lambda \mapsto g(0, \lambda), g(1, \lambda), g(m(\lambda), \lambda)$ はいずれも逆関数をもつが, それらの逆関数をそれぞれ $g_0^{-1}, g_1^{-1}, g_*^{-1}$ と表す.

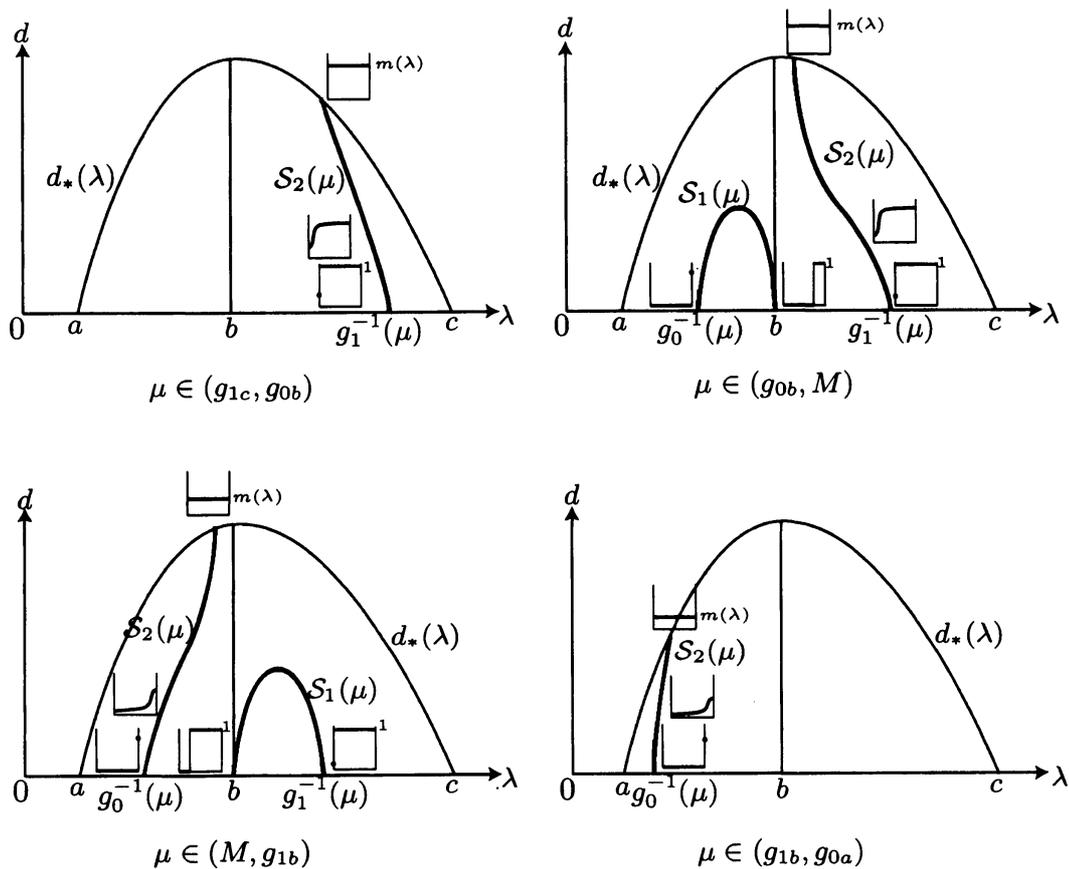


図2 定理 2.2 の分岐図 (太曲線は $\mathcal{S}_1(\mu), \mathcal{S}_2(\mu)$ の (d, λ) -平面への射影を表す. それらの曲線に沿って対応する解の形状を図示している)

定理 2.2. 関数 $g \in C^1(\mathbb{R} \times (a, c))$ は (g1)-(g4) をみたすとする. さらに, $\lambda \mapsto g(m(\lambda), \lambda)$ が単調減少であって, $g_{1c} < g_{0b} < M < g_{1b} < g_{0a}$ とする. このとき, $S(\mu)$ は次の性質をみたす:

- (i) ほとんど至るところの $\mu \in (g_{0b}, g_{1b})$ に対して, $S(\mu)$ は $s \in (0, 1)$ でパラメータ表示される単純曲線

$$\mathcal{S}_1(\mu) = \{ (u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) \in \Gamma(\lambda(s)) \times (a, c) \mid s \in (0, 1) \} \quad (2.3)$$

を含む. ここで, $\mathcal{S}_1(\mu)$ は内部遷移層をもつ特異摂動解と境界遷移層をもつ特異摂動解をつなぐサドルノード型の分岐曲線である: $\mathcal{S}_1(\mu)$ の $s \rightarrow 1$ の端点の近くで, $(u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) \in \mathcal{S}_1(\mu)$ は内部遷移層をもつ特異摂動解であって,

$$\lim_{s \rightarrow 1} u(x; s) = \begin{cases} 0, & x \in [0, l(\mu)), \\ 1, & x \in (l(\mu), 1], \end{cases} \quad \lim_{s \rightarrow 1} (d(s), \lambda(s)) = (0, b) \quad (2.4)$$

をみたす. ここで, 内部遷移層の位置 $l(\mu) \in (0, 1)$ は $\mu \in (g_{0b}, g_{1b})$ に関して単調減少であって, $\lim_{\mu \downarrow g_{0b}} l(\mu) = 1$ および $\lim_{\mu \uparrow g_{1b}} l(\mu) = 0$ をみたす. 一方で, $\mathcal{S}_1(\mu)$ の $s \rightarrow 0$ の端点の近くで, $(u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) \in \mathcal{S}_1(\mu)$ は境界遷移層をもつ特異摂動解であって, 特異極限は μ と M の大小に応じて次のように分類される:

- (a) $\mu \in (g_{0b}, M)$ ならば, $\lambda(s) \in (a, b)$ ($0 < s < 1$) であって,

$$\lim_{s \rightarrow 0} u(x; s) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ \eta(g_0^{-1}(\mu)), & x = 1, \end{cases} \quad \lim_{s \rightarrow 0} (d(s), \lambda(s)) = (0, g_0^{-1}(\mu)); \quad (2.5)$$

- (b) $\mu \in (M, g_{1b})$ ならば, $\lambda(s) \in (b, c)$ ($0 < s < 1$) であって,

$$\lim_{s \rightarrow 0} u(x; s) = \begin{cases} \zeta(g_1^{-1}(\mu)), & x = 0, \\ 1, & x \in (0, 1], \end{cases} \quad \lim_{s \rightarrow 0} (d(s), \lambda(s)) = (0, g_1^{-1}(\mu)). \quad (2.6)$$

- (ii) ほとんど至るところの $\mu \in (g_{1c}, g_{0a})$ に対して, $S(\mu)$ は $s \in (0, 1)$ でパラメータ表示される単純曲線

$$\mathcal{S}_2(\mu) = \{ (u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) \in \Gamma(\lambda(s)) \times (a, c) \mid s \in (0, 1) \}$$

を形成して, $\mathcal{S}_2(\mu)$ は定数解 $u = m(g_*^{-1}(\mu))$ と境界遷移層をもつ特異摂動解をつなぐ: 曲線 $\mathcal{S}_2(\mu)$ の $s \rightarrow 1$ の端点は定数解から分岐点に対応して,

$$\lim_{s \rightarrow 1} (u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) = (m(g_*^{-1}(\mu)), d_*(g_*^{-1}(\mu)), g_*^{-1}(\mu))$$

をみます. 一方で, $\mathcal{S}_2(\mu)$ の $s \rightarrow 0$ の端点の近くで, $(u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) \in \mathcal{S}_2(\mu)$ は境界遷移層をもつ特異摂動解で, 特異極限は μ と M の大小に応じて分類される:

- (a) $\mu \in (g_{1c}, M)$ ならば, $(u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) \in \mathcal{S}_2(\mu)$ は, $\lambda(s) \in (b, c)$ ($0 < s < 1$) および (2.6) をみます;
- (b) $\mu \in (M, g_{0a})$ ならば, $(u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) \in \mathcal{S}_2(\mu)$ は, $\lambda(s) \in (a, b)$ ($0 < s < 1$) および (2.5) をみます.

なお, $\lambda \mapsto g(m(\lambda), \lambda)$ が単調減少で, (2.2) の順番が異なると, $\mathcal{S}_1(\mu)$ と $\mathcal{S}_2(\mu)$ の μ に関する出現範囲が異なるだけで, 定理 2.2 と類似の結果が得られる.

次に, (g3) において $\lambda \mapsto g(m(\lambda), \lambda)$ が単調増加のケースで $\mathcal{S}(\mu)$ の大域分岐構造を述べる. このケースでは, (g1) と合わせると, $g_{0b} < g_{0a} < M < g_{1c} < g_{1b}$ である.

定理 2.3. 関数 $g \in C^1(\mathbb{R} \times (a, c))$ は (g1)-(g4) をみますとする. さらに, $\lambda \mapsto g(m(\lambda), \lambda)$ が単調増加とする. このとき, ほとんど至るところの $\mu \in (g_{0b}, g_{1b})$ に対して, $\mathcal{S}(\mu)$ は $s \in (0, 1)$ でパラメータ表示される単純曲線

$$\mathcal{S}_1(\mu) = \{ (u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) \in \Gamma(\lambda(s)) \times (a, c) \mid s \in (0, 1) \}$$

を含む. ここで, $\mathcal{S}_1(\mu)$ の $s \rightarrow 1$ の端点の近くでは, $(u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) \in \mathcal{S}_1(\mu)$ は内部遷移層をもつ特異摂動解であって (2.4) をみます. この内部遷移層の位置の特異極限 $l(\mu) \in (0, 1)$ は $\mu \in (g_{0b}, g_{1b})$ に関して単調減少であって, $\lim_{\mu \downarrow g_{0b}} l(\mu) = 1$ および $\lim_{\mu \uparrow g_{1b}} l(\mu) = 0$ をみます. 一方で, $\mathcal{S}_1(\mu)$ の $s \rightarrow 0$ の端点への $(u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) \in \mathcal{S}_1(\mu)$ の漸近挙動は, μ に依存して次のように分類される:

- (i) $\mu \in (g_{0b}, g_{0a}) \cup (g_{1c}, g_{1b})$ ならば, $\mathcal{S}_1(\mu)$ の $s \rightarrow 0$ の端点の近くで $(u(\cdot; s), d(s), \lambda(s))$ は境界遷移層をもつ特異摂動解である. このとき,
 - (a) $\mu \in (g_{0b}, g_{0a})$ ならば, $\lambda(s) \in (a, b)$ ($0 < s < 1$) であって (2.5) をみます.
 - (b) $\mu \in (g_{1c}, g_{1b})$ ならば, $\lambda(s) \in (b, c)$ ($0 < s < 1$) であって (2.6) をみます.
- (ii) $\mu \in (g_{0a}, g_{1c})$ ならば, $\mathcal{S}_1(\mu)$ の $s \rightarrow 0$ の端点は定数解から分岐点に対応して,

$$\lim_{s \rightarrow 0} (u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) = (m(g_*^{-1}(\mu)), d_*(g_*^{-1}(\mu)), g_*^{-1}(\mu))$$

をみます. このとき,

- (a) $\mu \in (g_{0a}, M)$ ならば, $\lambda(s) \in (a, b)$ ($0 < s < 1$) である.
- (b) $\mu \in (M, g_{1c})$ ならば, $\lambda(s) \in (b, c)$ ($0 < s < 1$) である.

定理 2.3 より, $\mu \in (g_{0b}, g_{0a}) \cup (g_{1c}, g_{1b})$ ならば, $S_1(\mu)$ は内部遷移層をもつ特異摂動解と境界遷移層をもつ特異摂動解をつなぐサドルノード型の分岐曲線であることが分かる. 一方で, $\mu \in (g_{0a}, g_{1c})$ ならば, $S_1(\mu)$ は内部遷移層をもつ特異摂動解と定数解をつなぐ分岐曲線である.

3 証明の概略

定理 2.2 の証明の概略を述べる (詳細については [7] を参照されたい). 各 $\lambda \in (a, c)$ に対して積分条件 (1.2) を課さない境界値問題 (1.1) の単調増加な解の集合は, (1.5) のように $d \in (0, d_*(\lambda))$ でパラメーター表示された単純曲線 $\Gamma(\lambda)$ を形成していた. そこで, $\Gamma(\lambda)$ の各要素が積分条件 (1.2) をみたすかどうかをチェックして, (1.1)-(1.2) の解を見つけることにする. そのために, 各 $\phi(\cdot; d, \lambda) \in \Gamma(\lambda)$ を (1.2) の左辺に対応させた写像を

$$G(d, \lambda) := \int_0^1 g(\phi(x; d, \lambda), \lambda) dx \quad (3.1)$$

と定義する. 補題 2.1 より,

$$\mathcal{R} = \{(d, \lambda) \in (0, d_*(\lambda)) \times (a, c)\} \ni (d, \lambda) \mapsto \phi(\cdot; d, \lambda) \in \Gamma(\lambda)$$

が全単射だから, $G : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と見ることができる. すると, 積分条件 (1.2) は, 方程式

$$G(d, \lambda) = \mu$$

と同値なので, 各 $\mu \in \mathbb{R}$ に対し, G の μ -レベルセットを \mathcal{R} 上に描くことが目標となる.

まずは, \mathcal{R} の境界における G の挙動をまとめておく. (2.1) より, 各 $\lambda \in (a, c)$ に対して, $d = d_*(\lambda)$ において, $\Gamma(\lambda)$ が定数解 $u = m(\lambda)$ から分岐している. よって, Lebesgue 収束定理より,

$$G(d_*(\lambda), \lambda) := \lim_{d \uparrow d_*(\lambda)} G(d, \lambda) = g(m(\lambda), \lambda) \quad (3.2)$$

が分かる. 一方で, 特異極限 $d \downarrow 0$ においては, 補題 2.1 より, $\lim_{d \downarrow 0} \phi(x; d, \lambda)$ が $\lambda \in (a, c)$ と b の大小で異なることに対応して,

$$G(0, \lambda) := \lim_{d \downarrow 0} G(d, \lambda) = \begin{cases} g(0, \lambda), & \lambda \in (a, b), \\ M, & \lambda = b, \\ g(1, \lambda), & \lambda \in (b, c) \end{cases} \quad (3.3)$$

となる ($\lambda = b$ のケースは (g4) を使っている). よって, $G(d, \lambda)$ の定義域を $\overline{\mathcal{R}}$ まで拡張すると, G は $(d, \lambda) = (0, b)$ で不連続になる.

本稿では, $\mu \in (g_{0b}, M)$ のケースに絞り, (2.5) と (2.4) の意味で, 境界遷移層をもつ特異摂動解と内部遷移層をもつ特異摂動解をつなぐサドルノード型の分岐曲線 $S_1(\mu)$ ((2.3) 参照) を構成する. (2.2) より, $g_{0b} < \mu < M < g_{1b}$ であって, (g1) より $g(0, \lambda)$ は単調減少かつ連続だから, 中間値の定理で $g_0^{-1}(\mu) \in (a, b)$ が分かる. 陰関数定理より, $(d, \lambda) = (0, g_0^{-1}(\mu))$ を通るような G の μ -等高線 $\lambda = \varphi(d)$ が局所的に存在する. すなわち, 小さい正数 δ と滑らかな関数 $\varphi(d)$ ($0 \leq d \leq \delta$) が存在して,

$$\begin{cases} G(d, \varphi(d)) = 0 & (0 \leq d \leq \delta) \\ \lambda(0) = g_0^{-1}(\mu) \end{cases} \quad (3.4)$$

をみたく (陰関数定理を使う際に, $G(d, \lambda)$ を $d \leq 0$ の範囲まで滑らかに拡張しておく).

次に \mathcal{R} の $\lambda < b$ の範囲である部分集合

$$\mathcal{P} := \{(d, \lambda) \in (0, d_*(\lambda)) \times (a, b)\} \subset \mathcal{R}$$

を導入する. そして, (3.4) で得た局所的な G の μ -等高線 $\{(d, \lambda) \mid \lambda = \varphi(d), 0 \leq d \leq \delta\}$ を \mathcal{P} 内で延長していく. そこで, $\mu \in (g_{0b}, M)$ を G の正則値とする. Sard の定理によると, ほとんど至るところの $\mu \in (g_{0b}, M)$ は G の正則値である. また, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $(d, \lambda) = (0, b)$ を中心とした半径 ε の開円板を B_ε とする:

$$B_\varepsilon := \{(d, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{d^2 + (\lambda - b)^2} < \varepsilon\}.$$

ここで, (3.2) および (3.3) より, $G(d, \lambda)$ は有界閉集合

$$\mathcal{P}_\varepsilon := \overline{\mathcal{P}} \setminus B_\varepsilon$$

上では連続であることが分かる.

そこで, $\{(d, \lambda) \mid \lambda = \varphi(d), 0 \leq d \leq \delta\}$ を含むような G の μ -等高線の \mathcal{P}_ε 内の最大延長を $C_\varepsilon (\subset \mathcal{P}_\varepsilon)$ とする. このとき, μ が G の正則値であることに注意すると, C_ε は滑らかな単純曲線を形成して, $(d, \lambda) = (0, g_0^{-1}(\mu))$ と異なる C_ε の端点 $(d_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ は, \mathcal{P}_ε の境界 $\partial \mathcal{P}_\varepsilon$ に到達することが分かる. 実際, μ は G の正則値ゆえ, 陰関数定理の観点から, $(d_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ が \mathcal{P}_ε の内部に含まれることはない. また, C_ε が \mathcal{P}_ε の内部で自己交差したり分岐することはない. また, $(d, \lambda) = (0, g_0^{-1}(\mu))$ を端点とするような G の局所的な μ -レベルセットが曲線 $\{(d, \lambda) \mid \lambda = \varphi(d), 0 \leq d \leq \delta\}$ に限られることから, C_ε が $(d, \lambda) = (0, g_0^{-1}(\mu))$ に帰るループを形成することもない.

次に, $(d, \lambda) = (0, g_0^{-1}(\mu))$ と異なる C_ε の端点 $(d_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ が, B_ε の境界 ∂B_ε に到達することを示す. そのためには, $\lim_{\lambda \downarrow a} d_*(\lambda) = 0$ に注意して, 次の3つの可能性を排除すれば十分である:

$$(I) d_\varepsilon = d_*(\lambda_\varepsilon), \quad (II) d_\varepsilon = 0 \text{ かつ } \lambda_\varepsilon \in [a, b - \varepsilon], \quad (III) d_\varepsilon \in [\varepsilon, d_*(b)] \text{ かつ } \lambda_\varepsilon = b.$$

ここで, 点列 $\{(d_n, \lambda_n)\} \subset C_\varepsilon$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n, \lambda_n) = (d_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ をみたすようにとる. このとき, $G(d_n, \lambda_n) = \mu$ で $n \rightarrow \infty$ とすると, G が \mathcal{P}_ε で連続だから,

$$G(d_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) = \mu \tag{3.5}$$

が分かる.

背理法で (I) を仮定すると, (3.2) と (3.5) から, $g(m(\lambda_\varepsilon), \lambda_\varepsilon) = \mu$ となる. 一方で, $m(\lambda)$ が単調増加で, $\lambda \mapsto g(m(\lambda), \lambda)$ が単調減少だったから, $\lambda_\varepsilon \leq b$, $m(b) = 1/2$ および (g4) より,

$$\mu = g(m(\lambda_\varepsilon), \lambda_\varepsilon) \geq g(m(b), b) = g(1/2, b) = M$$

となる. これは, $\mu \in (g_{0b}, M)$ に矛盾する.

(II) を仮定すると, (3.3) と (3.5) から, $g(0, \lambda_*) = \mu$ となる. ここで, (g1) より $\lambda \mapsto g(0, \lambda)$ は単調減少だから, $\lambda_* = g_0^{-1}(\mu)$ となる. このことは, C_ε が再び $(d, \lambda) = (0, g_0^{-1}(\mu))$ に帰ることを意味し矛盾である.

(III) を仮定すると, (3.5) から $G(d_\varepsilon, b) = \mu$ となる. 一方で, (g4) と補題 2.1 (ii) から, 容易に $G(d, b) = M$ ($0 < d \leq d_*(b)$) が確かめられる. よって, $\mu = M$ となるが, これは $\mu \in (g_{0b}, M)$ に矛盾する.

したがって, (I)-(III) の可能性がすべて排除されて,

$$(d_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \in \partial B_\varepsilon \cap \partial \mathcal{P}_\varepsilon \tag{3.6}$$

が結論付けられた. なお, μ は G の正則値ゆえ, C_ε 上の各点で陰関数定理を使えて,

$$\begin{cases} C_\varepsilon = \{(d(s), \lambda(s)) \mid s \in [0, 1 - \varepsilon]\}, \\ (d(0), \lambda(0)) = (0, g_0^{-1}(\mu)), \\ (d(1 - \varepsilon), \lambda(1 - \varepsilon)) = (d_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \in \partial B_\varepsilon \end{cases} \tag{3.7}$$

をみたす滑らかな関数 $s \mapsto (d(s), \lambda(s)) : [0, 1 - \varepsilon] \rightarrow \mathcal{P}_\varepsilon$ が構成できる. ここで, 十分小さい $\varepsilon > 0$ が任意にとれることから, (3.6) に注意して, (3.7) で $\varepsilon \downarrow 0$ とすると, 滑らかな単純曲線

$$C = \{(d(s), \lambda(s)) \mid s \in (0, 1)\} \subset \mathcal{P}$$

が得られる. この単純曲線 \mathcal{C} は G の μ -等高線であって, $(d(0), \lambda(0)) = (0, g_0^{-1}(\mu))$ と $(d(1), \lambda(1)) = (0, b)$ をつないでいる.

このとき, $(d(s), \lambda(s)) \in \mathcal{C}$ および $\phi(\cdot; d, \lambda) \in \Gamma(\lambda)$ に対して,

$$u(x; s) := \phi(x; d(s), \lambda(s))$$

とすると, (3.1) より,

$$G(d(s), \lambda(s)) = \int_0^1 u(x; s) dx = \mu, \quad s \in (0, 1)$$

である. したがって,

$$\mathcal{S}_1(\mu) = \{ (u(\cdot; s), d(s), \lambda(s)) \in C^2([0, 1]) \times \mathcal{C} \mid s \in (0, 1) \}$$

は (1.1)-(1.2) の解集合が形成する曲線である. さらに, $\lambda(0) = g_0^{-1}(\mu) \in (a, b)$ と補題 2.1 (i) より, $\lim_{s \downarrow 0} u(x; s)$ の境界遷移層の形成 (2.5) が示される. 一方で, $\mathcal{S}_1(\mu)$ に沿って $(d, \lambda) = (0, b)$ に近づいた特異極限 $\lim_{s \uparrow 1} u(x; s)$ の内部遷移層の位置 $l(\mu)$ は

$$l(\mu) = \frac{g_{1b} - \mu}{g_{1b} - g_{0b}} \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

と求まる. このような内部遷移層の形成 (2.4) や他のケースの証明については [7] を参照されたい.

4 反応拡散モデルのシャドウ系への応用

本稿で扱ってきた問題 (1.1)-(1.2) は, 空間 1 次元の反応拡散モデルにも関連する. 双安定型の非線形項をもつ反応拡散系において, ひとつの拡散係数を無限大としたシャドウ系が積分条件を伴う問題に帰着されるケースは多い. 本稿の最後に, 定理 2.2 の反応拡散モデル (1 次元シャドウ系) への応用例をふたつ紹介しよう.

[8] において, Mori, Jilkin, Edelstein-Keshet は, 細胞運動を記述する生化学モデルとして, ある反応拡散系に対する境界値問題を提唱している. さらに, [9] においては, 空間 1 次元に単純化されたモデルの定常問題において, 一方の拡散係数を無限大とした次のシャドウ系を導出されている:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 w'' = w(1-w)(w-1-\nu), & x \in (0, 1), \\ w'(0) = w'(1) = 0, \\ \int_0^1 w dx = K - \nu. \end{cases} \quad (4.1)$$

ここで, ε および K はいずれも正定数であって, 未知関数 w と未知数 ν が, それぞれ活動的なタンパク質と非活動的なタンパク質の密度を表している (モデルの生化学的背景は [8, 9] を参照されたい). 定理 2.2 を適用するために, 変数変換

$$u = \frac{w}{\nu+1}, \quad d = \left(\frac{\varepsilon}{\nu+1}\right)^2, \quad \lambda = \frac{1}{\nu+1}, \quad \mu = K+1$$

を施すと, (4.1) は次の問題に変換される:

$$\begin{cases} -du'' = u(1-u)(u-\lambda), & x \in (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \\ \frac{1}{\lambda} \left(\int_0^1 u \, dx + 1 \right) = \mu. \end{cases} \quad (4.2)$$

このとき, $\lambda \in (0, 1)$ だから, 非線形項 $f(u, \lambda) := u(1-u)(u-\lambda)$ は $m(\lambda) = \lambda$, $a = 0$, $b = 1/2$, $c = 1$ として (1.4) をみたく. また, 積分条件 (1.2) の被積分関数に対応する $g(u, \lambda) = (u+1)/\lambda$ が (g1)-(g4) を $M = 3$ でみたくことも容易に確認できる. 特に (g3) の $g(m(\lambda), \lambda) = g(\lambda, \lambda) = 1 + 1/\lambda$ が $\lambda \in (0, 1)$ に関して単調減少であることから, 定理 2.2 が (4.2) の解集合が形成する大域分岐構造を与えている. この問題では,

$$2 = g_{1c} = g_{0b} < 3 = M < 4 = g_{1b} < \infty = g_{0a}$$

なので, 定理 2.2 において, $\mu \in (2, 3)$ のときは (i)(a) と (ii)(a), $\mu \in (3, 4)$ のときは (i)(b) と (ii)(b), $\mu \in (4, \infty)$ のときは (ii)(b) がそれぞれ対応している. なお, Mori, Jilkine, Edelstein-Keshet [9] においても (4.1) の解集合の大域分岐構造が相平面法と数値解析の組み合わせによって得られており, 彼らの結果からは, 閾値 $\mu = 3$ における二次分岐や不完全分岐が示唆されている.

[1, 3] において, Hildebrand, Kuperman, Wio, Mikhailov, Ertl は, 白金表面に吸着した一酸化炭素分子の分布パターンを記述する反応拡散移流モデルを提唱している (モデルの表面科学的な背景については [1, 2, 3] を, 時間発展問題の可解性については [13, 14] を, 定常解の存在については [4, 5] をそれぞれ参照されたい). 空間 1 次元に単純化したこのモデルの定常問題において, 分子の活動性に対応する拡散と移流を無限大としたシャドウ系は, 次の積分条件を伴う境界値問題となる ([6]):

$$\begin{cases} -du'' = u(1-u) \left(u + \frac{1}{1 + \lambda e^{\alpha x(u)}} - 1 \right), & x \in (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \\ \int_0^1 \frac{\beta e^{\alpha x(u)} + \gamma}{1 + \lambda e^{\alpha x(u)}} \, dx = \mu. \end{cases} \quad (4.3)$$

ここで, α, β, γ は正定数であり, $\chi(u) = u^2(2u-3)$ である. モデルの見地では, 未知関数 u が白金の分子配列を表す指標であって, $v = 1/(1 + \lambda e^{\alpha\chi(u)})$ が分子の吸着率を表す. その意味で λ は未知数と考える. (4.3) の非線形項 $f(u, \lambda) := u(1-u)(u + \frac{1}{1+\lambda e^{\alpha\chi(u)}} - 1)$ は (1.3) のような u の 3 次関数ではないものの, 類似の形状である. 実際, (4.3) も定数解 $u = m(\lambda) \in (0, 1)$ をもち, $m(\lambda)$ は $\lambda \in (0, \infty)$ に関して単調増加であって $\lim_{\lambda \rightarrow 0} m(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m(\lambda) = 1$ および $m(e^{\alpha/2}) = 1/2$ をみたすことが確かめられる. すなわち, $m(\lambda)$ は (1.4) および (1.6) を $a = 0, b = e^{\alpha/2}, c = \infty$ としてみたす. さらに, $0 < \beta < e^{\alpha/2}\gamma$ ならば, 被積分関数 $g(u, \lambda) = (\beta e^{\alpha\chi(u)} + \gamma)/(1 + \lambda e^{\alpha\chi(u)})$ が (g1)-(g4) を $M = (\beta e^{-\alpha/2} + \gamma)/2$ でみたすことを確かめられる. このとき, $\lambda \mapsto g(m(\lambda), \lambda)$ は $\lambda \in (0, \infty)$ に関して単調減少で, (4.3) の解集合の大域分岐構造は定理 2.2 のようになることが示される ([6]).

参考文献

- [1] M. Hildebrand, Selbstorganisierte nanostrukturen in katakyschen oberflächenreaktionen, Ph. D. dissertation, Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I, Humboldt-Universität, Berlin, 1999.
- [2] M. Hildebrand, M. Ipsen, H. S. Mikhailov and G. Ertl, Localized nonequilibrium nanostructures in surface chemical reactions, *New J. Phys.*, **5** (2003), 61.1–61.28.
- [3] M. Hildebrand, M. Kuperman, H. Wio, A. S. Mikhailov and G. Ertl, Self-organized chemical nanoscale microreactors, *Phys. Rev. Lett.*, **83** (1999), 1475–1478.
- [4] K. Kuto and T. Tsujikawa, Pattern formation for adsorbate-induced phase transition model, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, **B3** (2007), 43–58.
- [5] K. Kuto and T. Tsujikawa, Stationary patterns for an adsorbate-induced phase transition model I: Existence, *Discre. Conti. Dyn. Syst.-B*, **14** (2010), 1105–1117.
- [6] K. Kuto and T. Tsujikawa, Stationary patterns for an adsorbate-induced phase transition model II: Shadow system, preprint.
- [7] K. Kuto and T. Tsujikawa, Bifurcation structure of steady-states for generalized Allen-Cahn equations with nonlocal constraint, preprint.
- [8] Y. Mori, A. Jilkine and L. Edelstein-Keshet, Wave-pinning and cell polarity from a bistable reaction-diffusion system, *Biophys. J.*, **94** (2008), 3684–3697.
- [9] Y. Mori, A. Jilkine and L. Edelstein-Keshet, Asymptotic and bifurcation analysis of wave-pinning in a reaction-diffusion model for cell polarization, *SIAM J. Appl.*

- Math.*, **71** (2011), 1401–1427.
- [10] R. Schaaf, Global solution branches of two-point boundary value problems. Lecture Notes in Mathematics, 1458. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [11] J. Shi, Semilinear Neumann boundary value problems on a rectangle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354** (2002), 3117–3154.
- [12] J. Smoller and A. Wasserman, Global bifurcation of steady-state solutions, *J. Differential Equations*, **39** (1981), 269–290.
- [13] T. Tsujikawa and A. Yagi, Exponential attractor for an adsorbate-induced phase transition model, *Kyushu J. Math.*, **56** (2002), 313–336.
- [14] A. Yagi, “Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications”, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010.