数理解析研究所講究録
第 1840 巻 2013 年 67-71

Link cohomology と affine Grassmannian について

Kenji Aragane
Osaka City University

Abstract

Link の量子不変量の構成には、量子群の表現を用いるものと、KZ 方程式に由来するモノドロミー表現を用いた 2 種類が存在している。これらの不変量の構成で用いられる Lie 環の表現空間を、Affine Grassmannian の同変 perverse sheaves で置き換えることで、より細密な情報を取り出し、強い不変量を構成することを目標とする。

1 Introduction

量子群を用いた、Link の不変量について説明をする。複素平面上の n 点の配置空間を $Conf(\mathbb{C})_n := \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n | z_i \neq z_j,\ for\ i \neq j\}$ として定義する。
半単純 Lie 代数として $\mathfrak{g}$ を一つ固定しておき、V を $U(\mathfrak{g})-$module とすると、$Conf(\mathbb{C})_n$ 上には $V^{\otimes n}$ をファイバーとした vector bundle が存在する。この vector bundle には KZ connection と呼ばれる flat connection の構造が定まり、それによって、$\pi_1(Conf(\mathbb{C})_n)$ の $V^{\otimes n}$ 上への作用が定まる。配置空間の基本群は、pure braid 群と呼ばれる群と同型であった。$\pi_(Conf(\mathbb{C})_n) \simeq P_n$。Link Theory で使われる量子不変量は、$Conf(\mathbb{C})_n$ に対して、n 次の対称群 S_n の作用で割った空間 $Conf(\mathbb{C})_n/S_n$ で、上と同様の方法によって $\pi_1(Conf(\mathbb{C})_n/S_n) \simeq B_n$ Braid 群の表現が定まる。この Braid 群の表現によって量子不変量が定まっていた。KZ 方程式による Braid 群の表現には、$U(\mathfrak{g})-$module を使用したが、量子群 $U_q(\mathfrak{g})-$module と、その表現に由来する $R-$ 行列を用いることによって、同値な表現が得られることが知られている。
このような量子不変量の例として、$\mathfrak{sl}_2$ と、その vector 表現に付随する Jones 多項式、$\mathfrak{sl}_n$ と、その vector 表現に付随する HOMFLY 多項式などが知られている。
こういった Link の不変量が構成された一方で、Khovanov によって、Link L に対して、$H^{*,*}(L)$ という bigraded な module の Link 不変量で、weight 付きの Euler 数が Jones 多項式と一致するような物が構成された。

$$Jones(L) = \sum(-1)^i q^j dim H^{i,\ j}(L)$$

Khovanov と Rozansky は更に、この bigraded module 型の不変量で、HOMFLY 多項式を weight 付きの Euler 数として持つような物を構成した。この不変量は、ある種の functoriality を持っており、Jones 不変量よりも強力な不変量であることが知られているが、それまでの量子群や Lie 環の表現論を用いることなく構成されており、それまでの多項式不変量との繋がりは不明瞭であった。その為、自然な疑問として KZ 方程式や量子群の表現論を用いて Khovanov homology と呼ばれるこれらの不変量を、再構成することが出来るかどうかということが問題となる。この報告では、この問題に対する部分的な解答を与えることにする。

2 Affine Grassmannian と Geometric Satake対応

G を connected reductive group とし、$\check{G}$ をその Langlands dual group とする。Langlands dual group とは、$\check{G}$ の root データは G の coroot データと一致し、$\check{G}$ の coroot データは G の root データと一致するようなものである。
$\mathcal{K}=\mathbb{C}((z))$, $\mathcal{O}=\mathbb{C}[[z]]$ としたときに、$\check{G}$ の affine Grassmannian を $\mathcal{G}_{\check{G}}=\check{G}(\mathcal{K})/\check{G}(\mathcal{O})$ として定義する。
Λ を G の *coweight lattice* とすると、$\check{G}(\mathcal{K})/\check{G}(\mathcal{O})$ の部分集合と見做すことができる。$\check{G}(\mathcal{O})$ が $\mathcal{G}_{\check{G}}$ に作用していて、その orbit は *dominant coweight* によってパラメトライズされていて

$$\mathcal{G}_{\check{G}}=\sqcup_{\lambda\in\Lambda^+}\mathcal{G}^{\lambda}_{\check{G}}$$

が成り立つ。この時、$\mathcal{G}^{\lambda}_{\check{G}}$ は、$\lambda\in\Lambda^+$ の $\check{G}(\mathcal{O})$-orbit である。
更に、$\mathcal{G}^{\lambda}_{\check{G}}$ は有限次元であり、その次元は ρ を *positive root* の half sum とすると、$<\lambda,2\rho>$ となっている。
$\overline{\mathcal{G}^{\lambda}_{\check{G}}}$ を $\mathcal{G}^{\lambda}_{\check{G}}$ の $\mathcal{G}_{\check{G}}$ での closure とすると、projective variety となっていて $\overline{\mathcal{G}^{\lambda}_{\check{G}}}=\cup_{\mu\leq\lambda}\mathcal{G}^{\mu}$ となっている。
特に λ が minuscule な場合には $\overline{\mathcal{G}^{\lambda}_{\check{G}}}=\mathcal{G}^{\lambda}_{\check{G}}$ となり、smooth になっている。より一般的な状況でも成立する性質は多いが、以後、特に断らない限りは、簡単の為に全て minuscule な場合を考える。IC^{λ} を $\overline{\mathcal{G}^{\lambda}_{\check{G}}}$ の intersection cohomology complex とし、$Perv_{\check{G}(\mathcal{O})}(\mathcal{G}_{\check{G}})$ を $\mathcal{G}_{\check{G}}$ 上の $\check{G}(\mathcal{O})$ 同変 perverse sheaves のなす category とすると、全ての object は IC^{λ} の直和で書けることが知られている。
$Perv_{\check{G}(\mathcal{O})}(\mathcal{G}_{\check{G}})$ には *convolution product* と呼ばれる積構造が定まっていて、それによってテンソル圏となっている。Tannakian formalism によると、テンソル圏 $Perv_{\check{G}(\mathcal{O})}(\mathcal{G}_{\check{G}})$ からは Hopf 代数の構造を取り出すことが出来る。この事実を用いると、次の定理が示される。

Theorem 2.1. *Geometric Satake* 対応
　テンソル圏としての同型が存在している。$Perv_{\check{G}(\mathcal{O})}(\mathcal{G}_{\check{G}})\simeq Rep(G)$
更に $V^{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V^{\lambda_n}$ を G の表現 *module* とすると、$IC^{\lambda_1}*\cdots*IC^{\lambda_n}$ が対応している。

3 幾何学的な構成: Jones 多項式

Geometric Satake 対応によると、KZ 方程式によって定めていたモノドロミー表現での $Conf(\mathbb{C})_n$ 上の vector bundle の fiber space $V^{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V^{\lambda_n}$ を $IC^{\lambda_1}*\cdots*IC^{\lambda_n}$ という intersection cohomology complex で置き換えることが示唆される。$IC^{\lambda_1}*\cdots*IC^{\lambda_n}$ は $\mathcal{G}^{\lambda_1}_{\check{G}}*\cdots*\mathcal{G}^{\lambda_n}_{\check{G}}$ という variety の intersection cohomology complex であった。これによって、KZ 方程式のモデルでは、Lie 環の表現空間を cohomology として持つような多様体が fiber となる fibration が存在していると期待される。
簡単な例として、$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ とし、表現空間 V として、vector 表現をとって、それを幾何学的に再構成する方法を提示する。
SL_2 に対する dual Langlands group は PGL_2 であった。
ω を PGL_2 の minuscule coweight とし、$\mathcal{G}^{\omega}_{PGL_2}$ を PGL_2-affine Grassmannian での $PGL_2(\mathcal{O})$-orbit とする。それらの fusion product $\mathcal{G}^{\omega}_{PGL_2}*\cdots*\mathcal{G}^{\omega}_{PGL_2}$ は $V^{\otimes n}$ に対応する variety であった。
L_0 を $\mathcal{G}_{PGL_2}$ 内の $PGL(\mathcal{O})$-identity coset とするとき、$(L_1,L_2)\in\mathcal{G}_{PGL_2}\times\mathcal{G}_{PGL_2}$ が $L_1\rightarrow L_2$

であるとは (L_1, L_2) が (L_0, z^ω) の $PGL_2(\mathcal{K})$-orbit に属している時であるとする。
この時、
$\mathcal{G}^\omega_{PGL_2} * \cdots * \mathcal{G}^\omega_{PGL_2} = \{(L_1, \cdots, L_n) \in \mathcal{G}^n_{PGL_2} | L_0 \to L_1 \to \cdots \to L_n\}$ である。
$Y_n = \mathcal{G}^\omega_{PGL_2} * \cdots * \mathcal{G}^\omega_{PGL_2}$ とおく。位相的には Y_n は $\mathbb{P}^1$ の iterated bundle と同相であり、
$Y_n \simeq (\mathbb{P}^1)^n$ となっている。$Z^i_n \subset Y_n \times Y_n$, $1 \leq i \leq n$ を
$Z^i_n := \{(L, L') \in Y_n \times Y_n | L_i \neq L'_i\}$
と定めるとする。Z^i_n は variety であり、$\mathcal{O}_{Z^i_n}$ を kernel とした Fourie-Mukai 変換
$\sigma_i : D^b(Y_n) \longrightarrow D^b(Y_n)$ を考えると、これは derived category $D^b(Y_n)$ の autoequivalence を誘導している。
この圏同値に関して、次のことが成立している。

Theorem 3.1. $D^b(Y_n)$ 上の *autoequivalence* σ_i は *braid relation* を満たす。
$\sigma_i \circ \sigma_j \circ \sigma_i \cong \sigma_j \circ \sigma_i \circ \sigma_j$

$H^*(Y_n) \simeq V^{\otimes n}$ であったので、上の定理は KZ 方程式や量子群の表現を用いて得られていた braid 群の表現の category 版であると考えることが出来る。この σ_i を用いて bigraded な Link homoology が構成され、その weight 付き Euler 数は Jones 不変量と一致する。特に自明な結び目での上の値は $H^*(\mathbb{P}^1)$ と一致している。

4 幾何学的な構成: 一般の場合

Geometric Satake 対応や上の構成では $\mathcal{K}$ や $\mathcal{O}$ は具体的な体、環としての表示が与えられていた。
幾何学的な量子不変量の構成をより一般に行うためには、この設定を見直す必要がある。
X を $\mathbb{C}$ 上の smooth curve とし、$x \in X$ を一つとる。この時、$\mathcal{O}_x$ を考えると、この環は $\mathbb{C}[z]$ という一変数間と non-canonical ではあるが、同一視することが出来る。
このように、$\mathcal{O}_x$ と $\mathbb{C}[z]$ との間の同型を定めることを $x \in X$ のまわりで coordinate を定めるという。
x の十分小さな近傍を考えるということは、$\mathcal{O}_x$ の完備化を考えることと見なすことができ、それは $\mathbb{C}[[z]]$ を考えることと同値である。
$\mathbb{C}((z))$ は $\mathbb{C}[[z]]$ の商体であることから、上で構成していた affine Grassmannian $G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O})$ は $G(\mathcal{K}_x)/G(\hat{\mathcal{O}}_x)$ と同一視することが出来る。
$\hat{\mathcal{O}}_x$ や　$\mathcal{K}_x$ は $x \in X$ に由来する環であったので、$G(\mathcal{K}_x)/G(\hat{\mathcal{O}}_x)$ は X 上にのっていると考えることが出来る。
以上の考察から、affine Grassmannian は smooth curve と密接に関連しているのではないかと推察される。このことをより鮮明に考察する。重要な性質は以下に述べる bundle の自明性である。

Proposition 1. P を X 上の *principal* $\check{G}$*-bundle* とする。この時、P は $X - x$ で *trivialize* することが出来る。
さらに $X - x$ は *affine curve* となっている。

principal bundle$P$ は $x \in X$ の近傍でも自明化することができ、また、上の性質から $X - x$ でも自明化することが出来る。$X - x$ が affine variety の構造を持つことから、X 上の bundle の moduli 空間 $Bund_{\check{G}}(X)$ は $\check{G}(A_{X-x}) \setminus \check{G}(\mathcal{K}_x)/\check{G}(\mathcal{O}_x)$ と同一視される。この

ような同一視がされると、もともとの affine Grassmannian は $x \in X$ の loocal coordinate を定めることなく、$Bund_{\check{G}}(X)$ と $\check{G}(A_{X-x})$ を用いて記述することが考えられる。
$\check{G}(A_{X-x})$ が Bundle の trivialization を表していたことを考えると、$\{(P,\phi):\ P \in Bund_{\check{G}}(X),\ \phi: P_0|_{X-x} \to P|_{X-x}$ *an isomorphism*, P_0 *trivial bundle*$\}$ となる。この事実は次のような定理で纏めることが出来る。

Theorem 4.1. X を *smooth curve* とし、$x \in X$ を任意に取ると、
$G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O}) \simeq \{P, \textit{principal } G-\textit{bundle},\ \phi:\ \textit{trivialization of } P \textit{ over } (X-x)\}\}$
として表すことが出来る。

このようにして、affine Grassmaniann と、curve 上の bundle の moduli 空間が関連付けられる。
次に、このような同一視を用いた affine Grassmaniann の考察をしよう。上記の定理では $x \in X$ を一つ取るごとに、$G(\mathcal{K}_x)/G(\hat{\mathcal{O}}_x)$ が定まっていて、これらが bundle の moduli を用いて表すことが出来ていた。
これは X 上に affine Grassmaniann が fibration していると見なすことが出来る。ここでの目標は、X^n 上に KZ-connection の精密化を実現することであったので、これをより一般化する必要がある。
$x \in X$ とし、$U \subset X$ を x の開近傍とする。この時、

$$\mathcal{G}_{U,x} := \{(P,\phi) : P \text{ principal } \check{G}\text{-bundle on } U \text{ and } \phi : P_0|_{U\backslash x} \to P|_{U\backslash x} \text{ an isomorphism } \}$$

とすると、x の coordinate を定めることによって、$\mathcal{G}_{U,x} \simeq \mathcal{G}_{\check{G}}$
この同型による $\mathcal{G}^{\lambda}_{\check{G}}$ の preimage を $\mathcal{G}^{\lambda}_{U,x}$ とする。
$(P,\phi) \in \mathcal{G}^{\lambda}_{U,x}$ の元のことを Hecke type λ を x で持つと言う。
より一般的に (P_1,P_2) という、X 上の二つの $\check{G}$-bundle と、$X-x$ での isomorphism ϕ が与えられたとする。この時に、P_1 を $x \in U \subset X$ での trivialization φ を一つとる。すると、二つの trivialization の合成によって、$(P_2|_U, \phi') \in \mathcal{G}_{U,x}$ が得られる。これらが Hecke type λ を持つ時に、ϕ は Hecke type λ を持つということにする。
これらの準備のもとに、

$$\mathcal{G}^{\lambda}_{X^n} := \{(x_1,\cdots,x_n) \in X^n,\ P \text{ is a principal } \check{G} \text{ bundle},\ \phi : P_0|_{X\backslash x_1,\cdots,x_n} \to P|_{X\backslash x_1,\cdots,x_n} \text{ is an isomorphism}, \phi \text{ has Hecke type} \leq \textstyle\sum_i \lambda_i\}$$

という space を考えると、これらは明らかに X^n 上の family となっている。

同様にして、

$$\tilde{\mathcal{G}}^{\lambda}_{X^n} := \{(x_1,\cdots,x_n) \in X^n,\ P_i\ 1 \leq i \leq n \text{ are principal } \check{G} \text{ bundles}, \phi_i : P_{i-1}|_{X\backslash x_i} \to P_i|_{X\backslash x_i} \text{ is an isomorphism}, \phi_i \text{ has Hecke type } \lambda_i\}$$

という space を考えると、これらも明らかに X^n 上の family となっている。
また isomorphism の合成を考えることによって、$\tilde{\mathcal{G}}^{\lambda}_{X^n} \to \mathcal{G}^{\lambda}_{X^n}$ が得られる。
この時、$\{(x_1,\cdots,x_n) \in X^n | x_i \neq x_j\}$ を考えると、この上では $\tilde{\mathcal{G}}^{\lambda}_{X^n}$ と $\mathcal{G}^{\lambda}_{X^n}$ はどちらも $\mathcal{G}^{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{G}^{\lambda_n}$ という fiber を持っている。
$\mathcal{G}^{\lambda}_{X^n}$ の持つ自然な対称群の作用で割ったものを $\mathcal{G}^{\lambda}_{n}$ とする。これは配置空間上の family となっている。

Proposition 2. *fiber*空間の *cohomology* は $H^*(\mathcal{G}_{\bar{x}}^{\lambda}) \simeq V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n}$ となっている、

これによって、配置空間の fibration として、fiber 空間の cohomology が元の群の表現空間となっている物が構成出来た。これに対して、上と同様にすると、braid 群の表現を誘導することが出来る。

References

[1] A. Beilinson, V. Drinfeld, Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves, preprint.

[2] S. Cautis, J. Kamnitzer, Knot homology via derived categories of coherent sheaves I, sl(2) , *Duke Math. J.* 142 no. 3 (2008), 511-588.

[3] S. Cautis, J. Kamnitzer, Knot homology via derived categories of coherent sheaves II, sl(m), *Inventiones Mathematicae.* 174, no. 1 (2008), 165-232.

[4] M. Khovanov, Categorification of the Jones polynomial, *Duke J. of Math.* (2000), 359–426.

[5] M. Khovanov, L. Rosansky, Matrix factorizations and link homology, *Fundamenta Mathematicae.* vol.199 (2008), 1-91.

[6] M. Khovanov, L. Rozansky, Matrix factorizations and link homology 2, *Geometry and Topology.* vol.12 (2008), 1387-1425.

[7] M. Khovanov, L. Rozansky, Triply-graded link homology and Hochschild homology of Soergel bimodules, *International Journal of Math.* vol.18, no.8 (2007), 869-885.

[8] I. Mirkovic and K. Vilonen, Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings, *Annals of Math.* vol.166 (2007) 95-143.