

数独の難易度判定のための
ブーリアングレブナー基底の並列計算について

佐藤 裕介*1

Yusuke Sato

東京理科大学大学院理学研究科数理情報科学専攻

Department of Mathematical Information Science, Graduate
School of Science, Tokyo University of Science

井上 秀太郎*2

Shutaro Inoue

東京理科大学理学部数理情報科学科

Department of Mathematical Information Science, Tokyo
University of Science

佐藤 洋祐*3

Yosuke Sato

東京理科大学理学部数理情報科学科

Department of Mathematical Information Science, Tokyo
University of Science

1 はじめに

数独は世界的に有名なパズルの一つであり、数多くの問題集が発行されている。問題集の中には、難易度が設定されているものが多く存在している。しかし、その難易度は数学的な定義に基づいて決定されたものではない。そこで、ブーリアングレブナー基底で数独を解いた場合に発生する分岐の数と長さが、数独の難易度と関係があり、数学的難易度を定義することに用いることができるのではないかと考えた。しかし、定義した難易度を求めるとき、分岐を逐次計算すると非常に時間がかかることが予想された。そこで、並列計算を実装したプログラムを開発した。また、開発したプログラムを利用して計算実験をし、問題集の難易度と定義した難易度の間に相関

*1 j1411607@ed.tus.jp

*2 sinoue@rs.kagu.tus.ac.jp

*3 ysato@rs.kagu.tus.ac.jp

関係があるのかを検証した。なお、数独のルールは最も一般的な、

1. 1つのマスに1から9の数字が1つ入る。
2. 縦, 横, 太字で囲まれた 3×3 のブロックに同じ数字は入らない。

とする。

2 ブール多項式環とブーリアングレブナー基底

ブール環とブール多項式環を次のように定義する。

定義 1 全ての要素が冪等であるような, 単位元を持つ可換環 \mathbb{B} をブール環とよぶ。

定義 2 ブール環 \mathbb{B} を係数とする多項式環 $\mathbb{B}[X_1, \dots, X_n]$ のイデアル $\langle X_1^2 - X_1, \dots, X_n^2 - X_n \rangle$ による剰余環をブール多項式環とよび, $\mathbb{B}(X_1, \dots, X_n)$ で表す。ブール多項式に関しては拡張定理と零点定理が成り立つ。

定理 1(拡張定理) I をブール多項式環 $\mathbb{B}(\overline{A}, \overline{X})$ のイデアルとする。このとき任意の $\overline{a} \in V(I \cap \mathbb{B}(\overline{X}))$ に対して $(\overline{a}, \overline{b}) \in V(I)$ となる \overline{b} が存在する。

定理 2(零点定理) I をブール多項式環 $\mathbb{B}(\overline{X})$ のイデアルとする。このとき

$$V(I) = \phi \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{B}, a \in I \text{ (弱形の零点定理)}$$

が成り立つ。またが I 有限生成であると仮定する。このとき

$$f(\overline{X}) \in I \Leftrightarrow \forall \overline{a} \in V(I), f(\overline{a}) = 0 \text{ (強形の零点定理)}$$

が成り立つ。

定義 3(ブーリアングレブナー基底) 単項式順序は固定する。イデアル $I \subset \mathbb{B}(\overline{X})$ の有限部分集合 $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ がブーリアングレブナー基底であるとは

$$\langle LM(G) \rangle = \langle LM(I) \rangle$$

を満たすことと定義する。

ブーリアングレブナー基底の詳細な理論と計算については参考文献 [1] を参照。

3 ブーリアングレブナー基底を利用しない数独の解法の例

ブーリアングレブナー基底を利用する数独の解法を説明する前に、利用しない数独の解法を紹介する。計算機代数システムを使うことを前提としているため、連立代数方程式を用いる。9×9の数独だと説明が複雑になるため、4×4の数独を用いる。ルールは、9×9の数独に準ずるものとする。

3.1 一般的な方程式を利用する方法

4×4の枠すべてに、変数を以下のように割り当てる。

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}

条件を数式化していくが、簡単のために次の枠に対する条件式について説明する。

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
----------	----------	----------	----------

1 から 4 の数字が 4 個の枠のどれかに入ることを次の方程式で表す。

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10$$

$$x_{11}x_{12} + x_{11}x_{13} + x_{11}x_{14} + x_{12}x_{13} + x_{12}x_{14} + x_{13}x_{14} = 35$$

$$x_{11}x_{12}x_{13} + x_{11}x_{12}x_{14} + x_{11}x_{13}x_{14} + x_{12}x_{13}x_{14} = 50$$

$$x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} = 24$$

ルールから、上記の方程式が 12 組必要となる。この方程式は、4 次方程式の解の公式より立式される。次に、最初に与えられる数字を代入する。これは単純に、 x_{ij} に e が入っていた場合、 $x_{ij} = e$ と表せば良い。($i, j, e = 1, \dots, 4$)

以上の方程式を計算機代数システムを使って計算すれば、数独を解くことができる。しかし、実際に数独を解くときには数字を足したりかけたりすることはない。例えば、1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 を $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ としても、数独としてのルールは成立する。よって、数独の本質的な解法とはかけ離れているため、難易度などを判定するためには使うことは難しいと考えられる。

3.2 シンプルなブール方程式を利用する方法

ブール変数を、枠の数 × 変数の分だけ用意する。

$x_{11}^{(1)}$	$x_{12}^{(1)}$	$x_{13}^{(1)}$	$x_{14}^{(1)}$	$x_{11}^{(2)}$	$x_{12}^{(2)}$	$x_{13}^{(2)}$	$x_{14}^{(2)}$
$x_{21}^{(1)}$	$x_{22}^{(1)}$	$x_{23}^{(1)}$	$x_{24}^{(1)}$	$x_{21}^{(2)}$	$x_{22}^{(2)}$	$x_{23}^{(2)}$	$x_{24}^{(2)}$
$x_{31}^{(1)}$	$x_{32}^{(1)}$	$x_{33}^{(1)}$	$x_{34}^{(1)}$	$x_{31}^{(2)}$	$x_{32}^{(2)}$	$x_{33}^{(2)}$	$x_{34}^{(2)}$
$x_{41}^{(1)}$	$x_{42}^{(1)}$	$x_{43}^{(1)}$	$x_{44}^{(1)}$	$x_{41}^{(2)}$	$x_{42}^{(2)}$	$x_{43}^{(2)}$	$x_{44}^{(2)}$
$x_{11}^{(3)}$	$x_{12}^{(3)}$	$x_{13}^{(3)}$	$x_{14}^{(3)}$	$x_{11}^{(4)}$	$x_{12}^{(4)}$	$x_{13}^{(4)}$	$x_{14}^{(4)}$
$x_{21}^{(3)}$	$x_{22}^{(3)}$	$x_{23}^{(3)}$	$x_{24}^{(3)}$	$x_{21}^{(4)}$	$x_{22}^{(4)}$	$x_{23}^{(4)}$	$x_{24}^{(4)}$
$x_{31}^{(3)}$	$x_{32}^{(3)}$	$x_{33}^{(3)}$	$x_{34}^{(3)}$	$x_{31}^{(4)}$	$x_{32}^{(4)}$	$x_{33}^{(4)}$	$x_{34}^{(4)}$
$x_{41}^{(3)}$	$x_{42}^{(3)}$	$x_{43}^{(3)}$	$x_{44}^{(3)}$	$x_{41}^{(4)}$	$x_{42}^{(4)}$	$x_{43}^{(4)}$	$x_{44}^{(4)}$

ブール変数 $x_{ij}^{(k)}$ ($i, j, k = 1, \dots, 4$) について,

$$x_{ij}^{(k)} = 1 \iff i \text{ 行 } j \text{ 列に数字 } k \text{ が入っている}$$

と考える。例えば、2行4列に3が入っている場合は $x_{24}^{(3)} = 1, x_{24}^{(1)} = x_{24}^{(2)} = x_{24}^{(4)} = 0$ と表す。最初に与えられる数字の代入もこのように行う。次の枠に対する条件式を説明する。

$x_{11}^{(1)}$	$x_{12}^{(1)}$	$x_{13}^{(1)}$	$x_{14}^{(1)}$	$x_{11}^{(2)}$	$x_{12}^{(2)}$	$x_{13}^{(2)}$	$x_{14}^{(2)}$
$x_{11}^{(3)}$	$x_{12}^{(3)}$	$x_{13}^{(3)}$	$x_{14}^{(3)}$	$x_{11}^{(4)}$	$x_{12}^{(4)}$	$x_{13}^{(4)}$	$x_{14}^{(4)}$

違う枠に同じ数字が入らないことを次の方程式で表す。

$$\begin{aligned} x_{11}^{(1)} x_{12}^{(1)} = 0, x_{11}^{(1)} x_{13}^{(1)} = 0, x_{11}^{(1)} x_{14}^{(1)} = 0, x_{12}^{(1)} x_{13}^{(1)} = 0, x_{12}^{(1)} x_{14}^{(1)} = 0, x_{13}^{(1)} x_{14}^{(1)} = 0 \\ x_{11}^{(2)} x_{12}^{(2)} = 0, x_{11}^{(2)} x_{13}^{(2)} = 0, x_{11}^{(2)} x_{14}^{(2)} = 0, x_{12}^{(2)} x_{13}^{(2)} = 0, x_{12}^{(2)} x_{14}^{(2)} = 0, x_{13}^{(2)} x_{14}^{(2)} = 0 \\ x_{11}^{(3)} x_{12}^{(3)} = 0, x_{11}^{(3)} x_{13}^{(3)} = 0, x_{11}^{(3)} x_{14}^{(3)} = 0, x_{12}^{(3)} x_{13}^{(3)} = 0, x_{12}^{(3)} x_{14}^{(3)} = 0, x_{13}^{(3)} x_{14}^{(3)} = 0 \\ x_{11}^{(4)} x_{12}^{(4)} = 0, x_{11}^{(4)} x_{13}^{(4)} = 0, x_{11}^{(4)} x_{14}^{(4)} = 0, x_{12}^{(4)} x_{13}^{(4)} = 0, x_{12}^{(4)} x_{14}^{(4)} = 0, x_{13}^{(4)} x_{14}^{(4)} = 0 \end{aligned}$$

ルールから、上記の式が12組必要となる。また、各枠には1,2,3,4しか入らないことを次の方程式に表す。

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(1)} x_{ij}^{(2)} = 0, x_{ij}^{(1)} x_{ij}^{(3)} = 0, x_{ij}^{(1)} x_{ij}^{(4)} = 0, x_{ij}^{(2)} x_{ij}^{(3)} = 0, x_{ij}^{(2)} x_{ij}^{(4)} = 0, x_{ij}^{(3)} x_{ij}^{(4)} = 0 \\ x_{ij}^{(1)} + x_{ij}^{(2)} + x_{ij}^{(3)} + x_{ij}^{(4)} = 1 \end{aligned}$$

ルールから、上記の式が16組必要となる。

以上のブール方程式を計算機代数システムで計算すれば、数独を解くことが出来る。また、枠に数字を入れるという数独の本質的な考え方に近い方法といえる。しかし、この方法を 9×9 の数独に適用すると変数の数が729個になってしまう。それに伴って、方程式の数も多くなり計算が複雑になりすぎてしまい、一般的な計算機代数システムだと解くことが難しくなってしまう。ブーリアングレブナー基底を用いた方法は、枠に数字を入れていくという考え方に基づきつつ、変数の数も最小限に抑えることが可能である。

4 ブーリアングレブナー基底を利用する数独の解法

4.1 立式について

以下の様に変数を割り当てる.

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	x_{28}	x_{29}
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{37}	x_{38}	x_{39}
x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	x_{46}	x_{47}	x_{48}	x_{49}
x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}	x_{56}	x_{57}	x_{58}	x_{59}
x_{61}	x_{62}	x_{63}	x_{64}	x_{65}	x_{66}	x_{67}	x_{68}	x_{69}
x_{71}	x_{72}	x_{73}	x_{74}	x_{75}	x_{76}	x_{77}	x_{78}	x_{79}
x_{81}	x_{82}	x_{83}	x_{84}	x_{85}	x_{86}	x_{87}	x_{88}	x_{89}
x_{91}	x_{92}	x_{93}	x_{94}	x_{95}	x_{96}	x_{97}	x_{98}	x_{99}

1 から 9 までの数字は集合の要素とする. つまり, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ としたとき, 係数のブール環は $\mathbb{B} = \mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$ となる. 次に以下の枠に対する条件式を説明する.

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

1 から 9 の数字が 9 個の枠のどれかに入ることを次のブール方程式で表す.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} = 1 (= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$$

違う枠に同じ数字が入らないことを次のブール方程式で表す.

$$x_{11}x_{12} = x_{11}x_{13} = x_{11}x_{14} = x_{11}x_{15} = x_{11}x_{16} = x_{11}x_{17} = x_{11}x_{18} = x_{11}x_{19} = 0 (= \phi)$$

$$x_{12}x_{13} = x_{12}x_{14} = x_{12}x_{15} = x_{12}x_{16} = x_{12}x_{17} = x_{12}x_{18} = x_{12}x_{19} = 0$$

$$x_{13}x_{14} = x_{13}x_{15} = x_{13}x_{16} = x_{13}x_{17} = x_{13}x_{18} = x_{13}x_{19} = 0$$

$$x_{14}x_{15} = x_{14}x_{16} = x_{14}x_{17} = x_{14}x_{18} = x_{14}x_{19} = 0$$

$$x_{15}x_{16} = x_{15}x_{17} = x_{15}x_{18} = x_{15}x_{19} = 0$$

$$x_{16}x_{17} = x_{16}x_{18} = x_{16}x_{19} = 0$$

$$x_{17}x_{18} = x_{17}x_{19} = 0$$

$$x_{18}x_{19} = 0$$

数独のルールから上記の方程式が 27 組必要となる. 次に最初に与えられる数字をブール方程式で表す. これは x_{ij} の枠に数字 e が入っていた場合, $x_{ij} = \{e\}$ と表す. ($i, j, e = 1, \dots, 9$) 例えば x_{15} に 2 が入っている場合は $x_{15} = \{2\}$ となる. 上記のブール方程式をブール多項式として, ブーリアングレブナー基底を数独が解けるまで繰り返し計算する. ただし, 数独の性質上, 各変数の解は単集合とする.

4.2 almost solution polynomial について

実際に 4×4 の数独をブーリアングレブナー基底を用いた方法で解くことを考える。

1			
		3	
	2		

3.1 の通りにブール方程式を立てる。

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{11}x_{12} = x_{11}x_{13} = x_{11}x_{14} = 0$$

$$x_{12}x_{13} = x_{12}x_{14} = 0$$

$$x_{13}x_{14} = 0$$

上記の方程式を 12 組用意する。また、最初に与えられた数字は

$$x_{11} = \{1\}, x_{23} = \{3\}, x_{32} = \{2\}$$

と表す。ブーリアングレブナー基底を計算すると以下の様な 1 変数多項式を含んでいた。

$$\{1, 2, 3\}x_{12} + \{3\}, \{1, 3\}x_{13}, \{1, 3\}x_{14}, \{1, 2, 3\}x_{21} + \{2\}, \{1, 2, 3\}x_{22}, \{1, 2, 3\}x_{24} + \{1\}, \{1, 2, 3\}x_{31}, \{1, 2, 3\}x_{33} + \{1\}, \{1, 2, 3\}x_{34} + \{3\}, \{1, 2, 3\}x_{41} + \{3\}, \{1, 2, 3\}x_{42} + \{1\}, \{1, 3\}x_{43}, \{1, 3, 4\}x_{44}$$

1 変数多項式の中には、解が決定できるものとできないものがある。決定できるものは

$$\{1, 2, 3\}x_{12} + \{3\} \rightarrow x_{12} = \{3\}, \{1, 2, 3\}x_{21} + \{2\} \rightarrow x_{21} = \{2\}, \{1, 2, 3\}x_{24} + \{1\} \rightarrow x_{24} = \{1\}, \{1, 2, 3\}x_{33} + \{1\} \rightarrow x_{33} = \{1\}, \{1, 2, 3\}x_{34} + \{3\} \rightarrow x_{34} = \{3\}, \{1, 2, 3\}x_{41} + \{3\} \rightarrow x_{41} = \{3\}, \{1, 2, 3\}x_{42} + \{1\} \rightarrow x_{42} = \{1\}, \{1, 2, 3\}x_{22} \rightarrow x_{22} = \{4\}, \{1, 2, 3\}x_{31} \rightarrow x_{31} = \{4\}, \{1, 3, 4\}x_{44} \rightarrow x_{44} = \{2\}$$

のように解が決定される。また、解が決定できないものは

$$\{1, 3\}x_{13} \rightarrow x_{13} = \{2\} \vee x_{13} = \{4\}, \{1, 3\}x_{14} \rightarrow x_{14} = \{2\} \vee x_{14} = \{4\}, \{1, 3\}x_{43} \rightarrow x_{43} = \{2\} \vee x_{43} = \{4\}$$

となり、解が絞り切れない。解が決定できる多項式のことを almost solution polynomial とよぶことにする。

定義 3 例えば $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\mathbb{B} = \mathcal{P}(S)$ のとき、ブール多項式環 $\mathbb{B}(\overline{X})$ 上の 1 変数多項式の中で、

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}X_i + \{3\} = 0 \rightarrow X_i = \{3\}$$

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}X_i = 0 \rightarrow X_i = \{5\}$$

のようになっていて、単集合の解が決定できるものを almost solution polynomial とよぶ。

almost solution polynomial で決定された解を代入しなおし、再度ブーリアングレブナー基底を計算する。すべての変数の解が決定するまでこの操作を繰り返す。また、ブーリアングレブナー基底に関して、以下のような定理が成り立つことがわかっている。

定理 3 任意の単項式順序でブーリアングレブナー基底は almost solution polynomial を含む。

この定理より、どの単項式順序を用いても、almost solution polynomial を計算できることが保証されている。より詳細な解法は参考文献 [2] を参照。

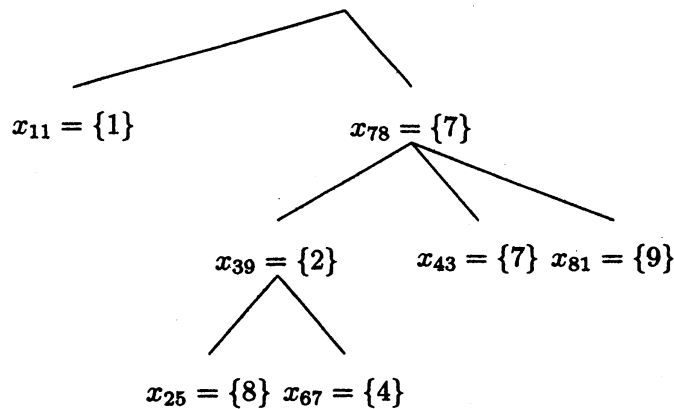
5 分岐の発生

9×9 の数独の中には、ブーリアングレブナー基底の計算を繰り返すだけだと、途中で almost solution polynomial が 1 つも出てこず、解けなくなってしまうものも存在する。例えば、ブーリアングレブナー基底の中に以下のような 1 変数多項式しか存在しなかったとする。

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}x_{11} + \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}x_{45} + \{3, 4, 5\}$$

このような状況が発生した場合は、 $x_{11} = \{1\}, x_{11} = \{3\}, x_{45} = \{3\}, x_{45} = \{4\}, x_{45} = \{5\}$ のどれかをランダムに選んで計算することになる。つまり、ここで分岐が発生する。間違った解を選んだときは途中で矛盾が生じ、当然数独の解は計算できない。しかし、正解の解を選んだときでも、その選んだ解によって、答えにたどり着く過程の複雑さが変わってくる。本研究では、この過程の複雑さに着目した。

例えば、 x_{11} と x_{78} に関する分岐が発生し、どちらも正解の解を選んで計算したとする。 x_{78} を選んだ場合、 x_{39} と x_{43} と x_{81} に関する分岐が発生したとする。また、 x_{39} を選んだ計算した場合、 x_{25} と x_{67} に関する分岐が発生したとする。この過程を木構造で表すと以下ようになる。



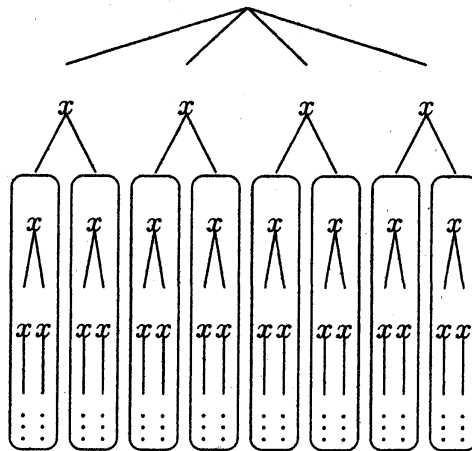
この場合, x_{11} を選んだときは, その後一度も分岐が発生しない最短パスと言える. 逆に, $x_{78} \rightarrow x_{39} \rightarrow x_{25}$ または $x_{78} \rightarrow x_{39} \rightarrow x_{67}$ と変数を選択していった場合は, 最も多くの分岐が発生している最長パスといえる.

このパスが大きいほど問題が複雑だと考えることができる. また, パスの長さは, 数独が持つイデアルの構造のみによって決定される数値である. 以上のことから, パスの長さの平均値が, 数独の数学的難易度と定義できると考えた.

定義 4 数独から立式したブール多項式を基底にもつイデアルを I とする. $LP(I) =$ パスの長さの平均値 とする.

6 難易度判定のための並列計算プログラム

$LP(I)$ を計算するには, すべてのパスの長さを計算する必要があるため, 逐次計算だと非常に時間がかかってしまい, 事実上計算不可能な数独が多かった. そこで, 分岐の独立性に着目した. 各分岐のパスは, 同時にかつ実行順番に依存せず計算可能である. このことから, 並列計算が有効ではないかと考えた. 以上の理由から, 並列計算で $LP(I)$ を求めるプログラムを, 計算機代数システム Risa/Asir と OpenXM を用いて開発した. 並列化の方法は以下の様な木構造だった場合, 途中までホストで計算し, 枠で囲んだところから各クライアントに計算をさせる, 簡単な方法をとった.



開発したプログラムを使って, 市販の数独問題集に掲載されている問題の $LP(I)$ を計算した. そして, 問題のレベルごとに $LP(I)$ の平均値 ($\overline{LP(I)}$ とする) を計算し, $LP(I)$ とレベルに相関関係があるのかを調べた.

7 実験結果

数独問題集 [3-8] から, レベル 8~12 の問題を 60 題ずつ無作為に選んで実験を行った.

レベル 1~7 に関しては, ほぼすべて $LP(I) = 0$ である. $LP(I) = 0$ となる問題の難易度判定に関しては, プーリアングレブナー基底の計算回数で判定するという先行研究がある. また, レ

レベル	$\overline{LP(I)}$
8	0.3
9	1.1
10	1.6
11	3.4
12	4.4

表 1

レベル 8 が $\overline{LP(I)} < 1$ となっているのは、 $LP(I) = 0$ の問題が多めに含まれていたからである。そこで、レベルが上がるごとに $LP(I) = 0$ の問題数が減っているだけで、 $LP(I)$ が増加していないのではないかという疑いが生じた。 $LP(I) = 0$ の問題数と、 $LP(I) = 0$ の問題を除いた $LP(I)$ の平均値 ($\overline{LP(I)'}$ とする) についても調べた。

レベル	$LP(I) = 0$ の問題数	$\overline{LP(I)'}$
8	47	1.5
9	38	3.0
10	30	3.5
11	18	4.6
12	7	4.9

表 2

8 まとめ

開発した並列計算プログラムは一定の並列効果を得たため、多くの数独の $LP(I)$ の計算ができるようになった。しかし、一部の分岐のみパスが長くなっていた場合は、並列度が悪くなってしまい、計算が予想よりも速くならないこともあった。並列度をより良くするために、ホストでクライアントの管理をするような機能を追加するべきだと思われる。また、 $LP(I)$ に関しては、表 1 より、レベルが上がるごとに増加傾向にあることがわかった。さらに、表 2 からレベルが上がるごとに $LP(I) = 0$ の問題は減少傾向にあるが、 $LP(I)$ も増加傾向にあるということがわかった。以上の結果より、 $LP(I)$ と数独の難易度には相関関係があり、数独の数学的難易度の指標になる可能性があると考えられる。

参考文献

- [1] Yosuke Sato, Shutaro Inoue, Akira Suzuki, Katsusuke Nabeshima, "Boolean Gröbner Basis," *Journal of Symbolic Computation*, 46(2011), pp.622-632

- [2] 井上秀太郎, 佐藤洋祐, 鈴木晃, 鍋島克輔 (2009) 「ブーリアングレブナー基底を使った数独の解法」, 『数理解析研究所講究録』1666, pp.1-5
- [3] 堀内邦義 (2006), 『脳を鍛える数字パズルナンプレ 中級編』, 廣済堂出版
- [4] 堀内邦義 (2006), 『脳を鍛える数字パズルナンプレ 上級編』, 廣済堂出版
- [5] 堀内邦義 (2007), 『脳を鍛える数字パズルナンプレ 超上級編』, 廣済堂出版
- [6] 堀内邦義 (2007), 『脳を鍛える数字パズルナンプレ 難問編』, 廣済堂出版
- [7] 堀内邦義 (2008), 『脳を鍛える数字パズルナンプレ 超難問編』, 廣済堂出版
- [8] 堀内邦義 (2008), 『脳を鍛える数字パズルナンプレ 限界編』, 廣済堂出版