

一般固有ベクトル空間の構造を求める 計算法について

田島慎一

SHINICHI TAJIMA

筑波大学大学院数理物質系数学域

GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA*

1 序

整数もしくは有理数を成分に持つ n 次正方行列に対し, その固有値に関する一般固有ベクトル空間の構造を求める必要が生じたとすると, 通常次の 2 つの問題を想定できる.

(イ) ジョルダン細胞のサイズとその個数を求める

(ロ) ジョルダン鎖もしくは一般固有ベクトル空間の基底ベクトルを求める

両者とも基本的な問題であるが, これらの問題を扱う際は行列に対し exact な計算を行う必要があるため, 扱う行列のサイズが大きくなるとそれに伴う計算量の増加が著しい. そのため, 既存の計算法を用いた場合, 数式処理を用いて実際に exact な計算を実行できる行列のサイズには自ずと限りがある.

さて, 論文 [12], [13] 等において, 与えられた行列の全ての基本最少消去多項式を同時に求める計算法を導出した. 本稿では, これら基本最少消去多項式を用いることで, 一般固有ベクトル空間に関するこれらの問題を扱うための新たな枠組みを構築することが可能となることを示す.

2 最少消去多項式と Krylov 巡回部分空間

まず, 最少消去多項式概念について復習することからはじめる. A は, 整数を成分に持つ $n \times n$ 正方行列であるとする. この時, n 次元ベクトル \mathbf{p} に対し, 有理数係数の一変数多項式全体のなす環 $K[\lambda]$ におけるイデアル

$$\text{Ann}_{K[\lambda]}(A, \mathbf{p}) := \{f(\lambda) \in K[\lambda] \mid f(A)\mathbf{p} = 0\}$$

*tajima@math.tsukuba.ac.jp

の monic な生成元を, 行列 A におけるベクトル p の最小消去多項式と呼ぶ.

いま, ベクトル p の最小消去多項式が, 既約な多項式 $f(\lambda) \in K[\lambda]$ であるとする. この時, $f(x) - f(y) = \psi(x, y)(x - y)$ を満たす多項式 $\psi(x, y)$ を用いて, $v = \psi(A, \lambda I)p$ と置く. ただし I は n 次の単位行列である. いま, $f(\lambda)$ の次数を d とし, $f(\lambda) = 0$ の解を, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ とおく.

$$(A - \lambda I)(\psi(A, \lambda I) = f(A) - f(\lambda I)$$

であることから, $\lambda = \alpha_i, i = 1, 2, \dots, d$ のとき, v は,

$$(A - \lambda I)v = 0, v \neq 0$$

を満たすことが分かる. すなわち, ベクトル p の最少消去多項式 $f(\lambda)$ を用いることで, 行列 A の固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ に対する固有ベクトルを容易に構成出来ることになる.

注意

(i) $f(\lambda) = 0$ なる各固有値 $\lambda = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ に対する固有ベクトルは全て同じ表現

$$v = \psi(A, \lambda I)p$$

を持つ.

(ii) $\psi(A, \lambda I)$ は λ について $d - 1$ 次の K 係数行列多項式である.

(iii) $f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \cdots (\lambda - \alpha_d)$ より次を得る.

$$\psi(A, \alpha_i I) = (A - \alpha_1 I)(A - \alpha_2 I) \cdots (A - \alpha_{i-1} I)(A - \alpha_{i+1} I) \cdots (A - \alpha_d I)$$

即ち, $\psi(A, \alpha_i I)$ は α_i と共役な $\alpha_j, j \neq i$ が定める $d - 1$ 個の行列 $A - \alpha_j I$ の積と一致する.

(iv) $\psi(A, \lambda I)p$ は, 行列多項式とベクトルの積からなる Horner 法を用いて計算できる.

例 1 $f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 5$ とおく. 行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

行列 A の特性多項式は, $f(\lambda)^2$ に等しい. 各基本単位ベクトル e_1, e_2, e_3, e_4 の最少消去多項式はすべて, $f(\lambda)$ に等しい. そこで今, ベクトル e_1 が生成する Krylov 巡回部分空間 $L_A(e_1) = \text{span}\{e_1, Ae_1\}$ を考える. ベクトル e_2 は $L_A(e_1)$ に属さないことが容易にわかるので, e_2 が生成する Krylov 巡回部分空間 $L_A(e_2)$ も同時に考えると, 全空間 $V = \mathbb{C}^4$ の直和分解

$$V = L_A(e_1) \oplus L_A(e_2)$$

を得る. ベクトル \mathbf{p} として $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を取ることで, 固有ベクトルの表現式

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を得る.

次に, ベクトル \mathbf{p} の最小消去多項式が, 既約な多項式 $f(\lambda) \in K[\lambda]$ の3乗である場合を考える. 先程の場合と同様に, $\psi(x, y)$ を $f(x) - f(y) = \psi(x, y)(x - y)$ を満たす多項式を用いると次の (i), (ii), (iii) を得る.

(i) $\mathbf{v} = \psi(A, \lambda I)^3 \mathbf{p}$ と置く. $\lambda = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ の時,

$$(A - \lambda I)^3 \mathbf{v} = 0, \quad (A - \lambda I)^2 \mathbf{v} \neq 0$$

(ii) $\mathbf{v} = \psi(A, \lambda I)^2 F(A) \mathbf{p}$ と置く. $\lambda = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ の時,

$$(A - \lambda I)^2 \mathbf{v} = 0, \quad (A - \lambda I) \mathbf{p} \neq 0$$

(iii) $\mathbf{v} = \psi(A, \lambda I) F(A)^2 \mathbf{p}$ と置く. $\lambda = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ の時,

$$(A - \lambda I) \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \neq 0$$

ここで, ベクトル \mathbf{p} が生成する Krylov 巡回部分空間を $L_A(\mathbf{p})$ とおき, さらに

$$S_{(3)} = \text{span}\{\mathbf{p}, A\mathbf{p}, A^2\mathbf{p}, \dots, A^{d-1}\mathbf{p}\},$$

$$S_{(2)} = \text{span}\{f(A)\mathbf{p}, Af(A)\mathbf{p}, A^2f(A)\mathbf{p}, \dots, A^{d-1}f(A)\mathbf{p}\},$$

$$S_{(1)} = \text{span}\{f(A)^2\mathbf{p}, Af(A)^2\mathbf{p}, A^2f(A)^2\mathbf{p}, \dots, A^{d-1}f(A)^2\mathbf{p}\}$$

とおく. これらは何れも d 次元ベクトル空間となる. 明らかに

$$S_{(2)} = f(A)S_{(3)}, \quad S_{(1)} = f(A)^2S_{(3)}$$

であり, $L_A(\mathbf{p}) = S_{(3)} \oplus S_{(2)} \oplus S_{(1)}$ なる直和分解を得るが, (i), (ii), (iii) より, この直和分解は, 一般固有ベクトル空間に対する Jordan 鎖に対応することが分かる. また, 固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ に対する一般固有ベクトルを構成的に求めることが可能であることが分かる.

例 2 $f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 5$ とおく. $f(\lambda)^3 = \lambda^6 + 3\lambda^5 + 18\lambda^4 + 31\lambda^3 + 90\lambda^2 + 75\lambda + 125$ のコンパニオン行列を A とおく.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -125 & -75 & -90 & -31 & -18 & -3 \end{pmatrix}$$

行列 A の特性多項式は、 $f(\lambda)^3$ である。6個の基本単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6$ の最少消去多項式はいずれも $f(\lambda)^3$ に等しい。いま、ベクトル \mathbf{p} として例えば $\mathbf{p} = \mathbf{e}_6$ をとるとその Krylov 巡回部分空間 $L_A(\mathbf{e}_6)$ は全空間 $V = \mathbb{C}^6$ と一致する。 $S_{(3)} = \text{span}\{\mathbf{e}_6, A\mathbf{e}_6\}$ は $\text{span}\{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\}$ と等しいことから、

$$S_{(2)} = \text{span}\{f(A)\mathbf{e}_5, f(A)\mathbf{e}_6\}, S_{(1)} = \text{span}\{f(A)^2\mathbf{e}_5, f(A)^2\mathbf{e}_6\}$$

即ち、

$$S_{(2)} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}, S_{(1)} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \\ -3 \\ 38 \\ -23 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

を得る。部分ベクトル空間 $S_{(3)}, S_{(2)}, S_{(1)}$ からそれぞれ、ベクトル $\mathbf{e}_6, f(A)\mathbf{e}_6, f(A)^2\mathbf{e}_6$ を選び $f(x) - f(y) = \psi(x, y)(x - y)$ なる多項式 $\psi(x, y) = y + (x + 1)$ を用いて、

$$\psi(A, \lambda I)^3 \mathbf{e}_6, \psi(A, \lambda I)^2 f(A)\mathbf{e}_6, \psi(A, \lambda I) f(A)^2 \mathbf{e}_6$$

とおけばこれらは、 $f(\lambda) = 0$ なる固有値に対する一般固有ベクトルを与えることになる。ここで、 $\psi(A, \lambda I)^2$ は変数 λ に関し2次、 $\psi(A, \lambda I)^3$ は3次の行列多項式であるが、 λ は2次方程式 $f(\lambda) = 0$ の解とするので、このままでは一般固有ベクトルの表現式として冗長である。そこで、多項式 $\psi(x, y)^2$ を $f(y)$ で割って得られる剰余多項式を $\psi_{(2)}(x, y)$ 、同様に $\psi(x, y)^3$ を $f(y)$ で割ることで得る剰余多項式を $\psi_{(3)}(x, y)$ とおく。計算すると、次を得る。

$$\psi_{(2)}(x, y) = (2x + 1)y + x^2 + 2x - 4, \psi_{(3)}(x, y) = (3x^2 + 3x - 4)y + x^3 + 3x^2 - 12x - 9$$

これらの多項式を用いて

$$\psi_{(3)}(A, \lambda I)\mathbf{e}_6, \psi(A, \lambda I)(2)f(A)\mathbf{e}_6, \psi(A, \lambda I)f(A)^2\mathbf{e}_6$$

を計算すれば、これらが求める一般固有ベクトルとなる。

一般に、ベクトル \mathbf{p} の最少消去多項式が、既約因子 $f(\lambda)$ の冪、 $f(\lambda)^r$ と、 $f(\lambda)$ と互いに素な多項式 $g(\lambda)$ の積 $f(\lambda)^r g(\lambda)$ であるとする。この時、ベクトル $g(A)\mathbf{p}$ が生成する Krylov 巡回部分空間 $L_A(g(A)\mathbf{p})$ に対し、その部分ベクトル空間 $S_{(r)}$ を

$$S_{(r)} = \text{span}\{g(A)\mathbf{p}, Ag(A)\mathbf{p}, \dots, A^{d-1}g(A)\mathbf{p}\}$$

と定め、さらに

$$S_{(r-i)} = f(A)^i S_{(r)}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1$$

とおく(ただし、 d は、多項式 $f(\lambda)$ の次数 $\deg(f)$ である)。このとき、ベクトル空間の列 $S_{(r)}, S_{(r-1)}, \dots, S_{(1)}$ は、Krylov 巡回部分空間 $L_A(g(A)\mathbf{p})$ の直和分解

$$L_A(g(A)\mathbf{p}) = S_{(r)} \oplus S_{(r-1)} \oplus \dots \oplus S_{(1)}$$

を与える。さらにこのベクトル空間の列は、 $f(\lambda) = 0$ を満たす固有値に対する、一般固有ベクトル空間の鎖に対応することが容易にわかる。

3 基本最少消去多項式と一般固有ベクトル空間

整数を成分に持つ $n \times n$ 正方行列 A に対し、 A の特性多項式、最少多項式をそれぞれ $\chi_A(\lambda), \pi_A(\lambda) \in K[\lambda]$ で表す。 $1 \leq j \leq n$ なる各 j に対し、第 j 成分のみ 1 に等しく他の成分は全て零であるような n 次元基本単位ベクトルを \mathbf{e}_j で表す。これら基本単位ベクトル \mathbf{e}_j に対する最小消去多項式を $\pi_{A,j}(\lambda)$ で表し、基本最少消去多項式と呼ぶことにする。

行列 A の特性多項式 $\chi_A(\lambda)$ と最少多項式 $\pi_A(\lambda)$ の $K[\lambda]$ における因数分解をそれぞれ

$$\chi_A(\lambda) = f_1(\lambda)^{m_1} f_2(\lambda)^{m_2} \dots f_q(\lambda)^{m_q},$$

$$\pi_A(\lambda) = f_1(\lambda)^{l_1} f_2(\lambda)^{l_2} \dots f_q(\lambda)^{l_q}$$

とおく。さらに、基本最少消去多項式 $\pi_{A,j}(\lambda), j \in J$ の因数分解を

$$\pi_{A,j}(\lambda) = f_1(\lambda)^{r_{j,1}} f_2(\lambda)^{r_{j,2}} \dots f_q(\lambda)^{r_{j,q}}$$

とする。ただし、 $J = \{1, 2, \dots, n\}$ とおいた。明らかに、

$$1 \leq l_i \leq m_i, \quad l_i = \max\{r_{j,i} \mid j \in J\}, \quad i = 1, 2, \dots, q$$

がなりたつ。

注意

基本最少消去多項式を求める計算法については、[12], [13], 拡張ホーナー法とその並列化を用いた基本最少消去多項式計算の効率化等については、[7], [8], [14], [15] 等を参照されたい。

以下、特性多項式、最少多項式、さらに各単位ベクトルに対する基本最少消去多項式 $\pi_{A,j}(\lambda)$ はすべて既知であるとして議論を進める。

いま、 $f(\lambda)$ は、特性多項式 $\chi_A(\lambda)$ の因子 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_q(\lambda)$ のひとつであるとし、 $f(\lambda)$ の $\pi_{A,j}(\lambda)$ における重複度を r_j で表す。また、最少消去多項式は次のように表せるとする。

$$\pi_{A,j}(\lambda) = f(\lambda)^{r_j} g_j(\lambda)$$

以下、最少多項式 $\pi_A(\lambda)$ における $f(\lambda)$ の重複度を ℓ で表すことにする ($\ell = \max\{r_j \mid j = 1, 2, \dots, n\}$ を満たす)。

さて、多項式 $f(\lambda)$ に対し、集合 J_f を

$$J_f = \{j \mid r_j \geq 1, j \in J\}$$

で定める。このとき、 $\text{Ker}(f(A)^\ell) = \text{span}\{g_j(A)\mathbf{e}_j \mid j \in J_f\}$ が成り立つことから、次の命題が直ちに従う。

命題 行列 A の最少多項式 $\pi_A(\lambda)$ における多項式 $f(\lambda)$ の重複度を ℓ とする。このとき、

$$\text{Ker}(f(A)^\ell) = \text{span}\{g_j(A)\mathbf{e}_j \mid j \in J_f\}$$

が成り立つ。

この結果を用いると、最少消去多項式が与える情報を利用することで、一般固有ベクトル空間の構造を求める問題の計算量が軽減されることが以下のように分かる。

さて、Jordan 細胞の概念に基づいて一般固有ベクトル空間の構造を求める方法では、通常、与えられた固有値 α に対し、行列 $A - \alpha I$ の作用に注目して Jordan 鎖の計算を行うことが基本である。行列の固有値は一般に、有理数ではないので、この方法をそのまま適用すると代数拡大した世界で種々の行列・ベクトル計算を行うことになり、計算コストが非常に高くなる。いま、 $f(\lambda) = 0$ の解を、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ とおくと

$$f(A) = (A - \alpha_1 I)(A - \alpha_2 I) \cdots (A - \alpha_d I)$$

が成り立つ。このことに注目すれば、個々の行列 $A - \alpha_i I$ を別々に扱うのではなく、これらの積、即ち $f(A)$ を考えることで、固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ に対する Jordan 鎖を同時に扱うことが可能となることが分かる。そこで、集合 J_f を、最少消去多項式 $\pi_{A,j}(\lambda)$ での多項式 $f(\lambda)$ の重複度に応じて、次のように分割する。

$$J_f = J_{f,1} \cup J_{f,2} \cup \cdots \cup J_{f,\ell}$$

ただし、 $J_{f,k} = \{j \in J_f \mid r_j = k\}$ と定めた。

この分割に応じた $\text{span}\{g_j(A)\mathbf{e}_j \mid j \in J_{f,k}\}$ が直接 Jordan 鎖を与える訳ではないが、これらを rank に関する計算と組み合わせることで、一般固有ベクトル空間の構造を完全に決定する効率的な計算法を導出することが可能となる。

以下に、具体例を示す.

例 3 $f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 5$ とおく. 行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -8 & -25 & -10 & -11 & -2 \end{pmatrix}$$

行列 A の特性多項式は, $f(\lambda)^3$, 最少多項式は, $f(\lambda)^2$ である. この場合, 簡単な (組み合わせ論的な) 議論のみで Jordan 細胞のサイズと個数が分かるが, 以下, 敢えて計算することで, 一般固有ベクトル空間の構造を調べてみる.

基本最少消去多項式 $\pi_{A,j}(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, 6$ はすべて $f(\lambda)^2$ に等しい. 従って, $J_{f,2} = J = \{1, 2, \dots, 6\}$ である. まず, ベクトル \mathbf{e}_6 が生成する Krylov 巡回部分空間 $L_A(\mathbf{e}_6)$ の直和分解 $L_A(\mathbf{e}_6) = S_{(2)} \oplus S_{(1)}$ を求める.

$$S_{(2)} = \text{span}\{\mathbf{e}_6, A\mathbf{e}_6\} = \text{span}\{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\} \text{ より}$$

$$S_{(1)} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

を得る. ここで, $S_{(2)} \subset \text{Ker}(f(A))$ であることに注意する. $J_{f,2} = \{1, 2, \dots, 6\}$ であることから, $f(A)$ を計算すると次を得る.

$$f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & -25 & -10 & -6 & -1 \\ 12 & 1 & 25 & -15 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

行列 $f(A)$ の rank は, 2 に等しい. この Rank の計算の過程で次の線形従属関係を得る.

$$\begin{aligned} f(A)\mathbf{e}_1 + 3f(A)\mathbf{e}_6 &= 0 \\ f(A)\mathbf{e}_2 - f(A)\mathbf{e}_5 &= 0 \\ f(A)\mathbf{e}_3 - 5f(A)\mathbf{e}_5 + 5f(A)\mathbf{e}_6 &= 0 \\ f(A)\mathbf{e}_4 - f(A)\mathbf{e}_5 - 4f(A)\mathbf{e}_6 &= 0 \end{aligned}$$

このことは4つのベクトル, $e_1 + 3e_6, e_2 - e_5, e_3 - 5e_5 + 5e_6, e_4 - e_5 - 4e_6$ が $\text{Ker}(f(A))$ に属することを意味する. ここで $e_3 - 5e_5 + 5e_6$ と $e_4 - e_5 - 4e_6$ は $S_{(1)}$ に属すがベクトル $e_1 + 3e_6$ と $e_2 - e_5$ は共に, $S_{(1)}$ に属さないことが分かる. さらに, ベクトル $p = e_1 + 3e_6$ に対する Krylov 巡回部分空間 $L_A(p)$ を求めると,

$$L_A(p) = \text{span}\{e_1 + 3e_6, e_2 - e_5\}$$

となることを確かめられる.

以上, 計算により, 行列 A の Jordan 細胞の構造を完全に決定することができた. この方法を使えば, 一般固有ベクトル空間の基底ベクトルの構成も容易である.

4 おわりに

本稿では, 整数もしくは有理数を成分に持つ n 次正方行列に対し, 与えられた固有値に関する一般固有ベクトル空間の構造を決定するための新たな枠組みを提案した. 要となるアイデアは, 各基本単位ベクトルに対する基本最少消去多項式 $\pi_{A,j}(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, n$ を利用することである. 提案する計算法の基礎となる「基本最少消去多項式 $\pi_{A,j}(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, n$ をすべて求めるアルゴリズム」は, 元々は, 行列のスペクトル分解行列を効率的に求めるために考案したものであるが, 行列の最少多項式計算にも応用を持つ. また, 本稿で述べたように, Jordan 細胞のサイズやその個数の決定, 一般固有ベクトル空間の基底ベクトルの構成等にも応用できる.

最後になるが, 基本最少消去多項式 $\pi_{A,j}(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, n$ を固有値・固有ベクトルに関する上記のような一連のアルゴリズムの構成に利用するという着想は, 1931年に出版された Krylov の論文を読んだ際に得たものであることをここに記しておきたい.

参 考 文 献

- [1] J. Abdeljaoued et H. Lombardi : Méthodes Matricielles – Introductions à la Complexité Algébrique, Springer 2004.
- [2] 飯塚由貴恵, 田島慎一 : 行列のスペクトル分解アルゴリズム – 最小多項式が複数の重複因子から成る場合 –
京都大学数理解析研究所講究録 1814 「Computer Algebra」 (2012), 9–16.
- [3] 木村欣司 : <http://www-is.amp.i.kyoto-u.ac.jp/kkimur/>
- [4] A. N. Krylov : On the numerical solutions of the equation by which in technical questions frequencies of small oscillations of material systems are determined (in Russian), Izvestija AN SSSR Otdel. mat. i estest. nauk, 7 (1931), 491–539.
- [5] 小原功任, 田島慎一 : 行列のスペクトル分解・固有ベクトルの分散計算,
京都大学数理解析研究所講究録 1666 「Computer Algebra」 (2009), 65–68.

- [6] K. Ohara, S. Tajima : Spectral decomposition and eigenvectors of matrices by residue calculus, Proc. the Joint Conference of ASCM2009 and MACIS2009, COE Lecture Notes **22** (2009), 137–140.
- [7] 小原功任, 田島慎一 : 拡張行列ホーナー法と行列スペクトル分解の並列算法, 京都大学数理解析研究所講究録 **1785** 「Computer Algebra」 (2012), 123–130.
- [8] 小原功任, 田島慎一 : 最少消去多項式を用いた行列スペクトル分解計算の並列化 京都大学数理解析研究所講究録 **1815** 「Computer Algebra」 (2012), 21–28.
- [9] 田島慎一, 飯塚由貴恵 : 行列のスペクトル分解アルゴリズムについて, 京都大学数理解析研究所講究録 **1666** 「Computer Algebra」 (2009), 49–56.
- [10] 田島慎一, 樋口水紀 : レゾルベントを用いた固有ベクトル計算, 京都大学数理解析研究所講究録 **1666** 「Computer Algebra」 (2009), 57–64.
- [11] 田島慎一, 奈良洸平, 小原功任 : 行列の最小多項式計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1814** 「Computer Algebra」 (2012), 1–8.
- [12] 田島慎一 : 微分作用素を用いたレゾルベントの留数解析と行列のスペクトル分解 京都大学数理解析研究所講究録 **1814** 「Computer Algebra」 (2012), 17–28.
- [13] 田島慎一, 奈良洸平 : 最小消去多項式候補とその応用 京都大学数理解析研究所講究録 **1815** 「Computer Algebra」 (2012), 1–12.
- [14] 田島慎一, 小原功任, 照井章 : 行列ホーナー法の拡張と効率化 京都大学数理解析研究所講究録「数式処理研究の新たな発展」掲載予定.
- [15] 田島慎一, 小原功任, 照井章 : 行列 Horner 法の並列化の実装について 京都大学数理解析研究所講究録「数式処理研究の新たな発展」掲載予定.
- [16] 照井章, 田島慎一 : 行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算 京都大学数理解析研究所講究録 **1815** 「Computer Algebra」 (2012), 13–20.