

グラフ上の石移動と石交換

湘南工科大学・工学部情報工学科 中上川 友樹

Tomoki Nakamigawa

Department of Information Science

Shonan Institute of Technology

1 序論

本研究で扱うグラフは、辺に向きのない有限単純グラフとする。与えられた連結グラフ X に対して、 X を盤とするパズルを考える。 X を 盤グラフ と呼ぶ。 X の頂点数を n とする。次の 2 種類のパズルを考える。

(1) Pebble Motion Puzzle

$0 < k < n$ とし、 $P = \{1, 2, \dots, n - k\}$ をラベル付きの石の集合とみなす。盤グラフ X の頂点集合 $V(X)$ から $P \cup \{0\}$ への全射 f で、任意の $p \in P$ について $|f^{-1}(p)| = 1$ をみたすものを X 上の P の 配置 という。ここで、盤の頂点 $x \in V(X)$ について $f(x) = p \in P$ であるとき、 x の上に石 p が置かれている状態であり、 $f(x) = 0$ であるとき、 x は石の置かれていない空き頂点とみなす。空き頂点の個数は k である。

配置 f において、 $f(u) = p \in P$ かつ $f(v) = 0$ かつ $uv \in E(X)$ のとき、石 p を u から v に移動することができる。つまり、 $g(u) = 0, g(v) = p$, かつ $g(w) = f(w)$ ($w \in V(X) \setminus \{u, v\}$) をみたす新たな配置 g が得られる。これをパズル (X, k) の 手 という。連続する手の有限列によって配置 f を配置 g に変換できるとき、 f と g は 同値 であるといい、 $f \sim g$ と書く。

任意の配置のペア f, g について、 $f \sim g$ が成り立つとき、パズル (X, k) は feasible である、という。また、どの配置 f についても、任意の $p \in P, v \in V(X)$ に対して、有限回の手によって p を v 上に移動させることができるとき、パズル (X, k) は transitive である、という。定義より (X, k) が transitive であることは feasible であるための必要条件である。

例えば、盤グラフを 4×4 の格子グラフ $P_4 \times P_4$ とし、 $k = 1$ とすると、パズル $(P_4 \times P_4, 1)$ はよく知られた 15-パズルに対応する。15-パズルの 2 つの配置 f, g が $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$ をみたすとする。このとき、 $g^{-1} \circ f$ が $V(X)$ 上の偶置換であることが、 $f \sim g$ であるための必要十分条件である [5, 9]. □

(2) Pebble Exchange Puzzle

Pebble Motion Puzzle を拡張したパズルを考える。頂点数 n の 石グラフ Y を用意する。 Y の頂点を n 個のラベル付きの石の集合とみなす。盤グラフ X の頂点集合 $V(X)$ から $V(Y)$ への全単射 f を X 上の Y の 配置 という。

配置 f において, $f(u)f(v) \in E(Y)$ かつ $uv \in E(X)$ のとき, 2つの石 $f(u)$ と $f(v)$ を交換することができる. つまり, $g(u) = f(v)$, $g(v) = f(u)$, かつ $g(w) = f(w)$ ($w \in V(X) \setminus \{u, v\}$) をみたます新たな配置 g が得られる. これをパズル (X, Y) の 手 という.

手の有限列によって配置 f を配置 g に変換できるとき, f と g は 同値 であるといい, $f \sim g$ と書く. Pebble Exchange Puzzle における同値性, feasibility, transitivity は, Pebble Motion Puzzle におけるそれらと同様に定義する. つまり, 連続する手の有限列によって配置 f を配置 g に変換できるとき, f と g は 同値 であるといい, $f \sim g$ と書く. また, 任意の配置のペア f, g について $f \sim g$ が成り立つとき, パズル (X, Y) は feasible である, という. また, どの配置 f についても任意の $p \in V(Y)$, $v \in V(X)$ に対して有限回の手によって p を v 上に移動させることができるとき, パズル (X, k) は transitive である, という. なお, 手の定義により, パズル (X, Y) とパズル (Y, X) は同じパズルとみなせる. \square

ここで, Pebble Exchange Puzzle は Pebble Motion Puzzle の1つの拡張であることを注意しておく. X を頂点数 n の連結グラフとする. Y を頂点数 n のスター $K_{1, n-1}$ とすると, Pebble Motion Puzzle $(X, 1)$ と Pebble Exchange Puzzle (X, Y) は同じパズルであることがわかる. 一般に, $Y = K_k + \overline{K_{n-k}}$ とすると, (X, k) が feasible (または transitive) であることと, (X, Y) が feasible (または transitive) であることは同値である.

本研究の主な目標は, (X, k) , あるいは (X, Y) が feasible または transitive となるための X, k , あるいは X, Y の条件を求めることである.

ここで, 本研究の工学的な背景について触れておく. ここで扱うパズルは, ロボット工学における Motion Planning Problem の1つの単純化したモデルである. 石を自律的なロボット, 盤グラフをロボットの作業場とみなす. 目的は作業場に配置された各ロボットの動作により目的の配置を達成することである. 応用上は, 例えば2つの配置 f, g が同値であるかどうかの判定だけでなく, f から g に変換する具体的なアルゴリズムを見出すことやその計算量を評価することが重要と思われるが, 本研究ではそれらについては扱わない.

以下に本講究録の構成を述べる. 第2節では, Pebble Motion Puzzle に関する先行研究について述べる. 第3節では, グラフの isthmus 構造を定義してその性質を述べ, さらに Pebble Motion Puzzle への応用を述べる. 第4節では, Pebble Exchange Puzzle に関する一連の結果を述べる. 第5節では, Pebble Exchange Puzzle に付随する群を定義して, その性質を調べる.

2 Pebble Motion Puzzle

盤グラフ X , 空き頂点数 k のパズル (X, k) について, パズルグラフ $Z = \text{puz}(X, k)$ を次のように定義する; Z の頂点集合は (X, k) の配置全体とし, 配置 f から配置 g へ1手で変換できるとき, ペア (f, g) を Z の辺とする. (X, k) が feasible であることは $\text{puz}(X, k)$ が連結であることと同値である. $\text{puz}(X, k)$ の連結成分の個数を $c(X, k)$ と書く.

Wilson は, 15-パズルの拡張として空き頂点数 $k = 1$ の場合のパズル $(X, 1)$ を考えた [10]. まず, X が 2-連結であることと $(X, 1)$ が transitive であることが同値であることは容易にわかる. よって, 以下 X は 2-連結とする. $x \in V(X)$ に対して, $V_x = V(X) \setminus \{x\}$ と置く. また, $f(x) = 0$ をみたすような (X, k) の配置 f の全体を \mathcal{F}_x と書く. 正の整数 m に対して S_m, A_m をそれぞれ m 次の対称群, 交代群とする. M を有限集合とすると, $S(M)$ を M 上の対称群とする. G_x を $\{g^{-1} \circ f \in S(V_x) : f, g \in \mathcal{F}_x \text{ s.t. } f \sim g\}$ と定義する. このとき, (1) G_x は x によらず同型な S_{n-1} の部分群であり, (2) $c(X, k) = (n-1)!/|G_x|$ である.

正の整数 a_1, a_2, a_3 に対して, $\theta(a_1, a_2, a_3)$ -グラフとは, 次数 3 の 2 点 u, v が存在し, 長さ $a_1 + 1, a_2 + 1, a_3 + 1$ の互いに点素な 3 本の uv -道からなるグラフである.

定理 1. (Wilson[10]) $n \geq 2$ とする. X は 2-連結であり, サイクルグラフではないとする. このとき,

- (1) X が 2 部グラフならば, $G_x \cong A_{n-1}$ かつ $c(X, 1) = 2$.
- (2) X が 2 部グラフではなく, $\theta(1, 2, 2)$ でもないならば, $G_x \cong S_{n-1}$ かつ $c(X, 1) = 1$.
- (3) X が $\theta(1, 2, 2)$ ならば, $G_x \cong PGL_2(5)$ かつ $c(X, 1) = 6$. ここで, $PGL_2(5)$ は位数 5 の有限体を係数体とする 2 次元ベクトル空間に作用する一般射影線形群である. \square

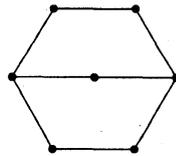


図 1. $\theta(1, 2, 2)$

唯一の例外パズル $(\theta(1, 2, 2), 1)$ は, 様々な数学的構造—完全グラフ K_6 の 1-因子分解, K_5 の 2-因子分解, 位数 4 の有限射影平面, Hoffman-Singleton グラフ, Steiner system $S(5, 6, 12)$, binary $(12, 132, 4)$ -符号, ternary Golay 符号 C_{17} など—と深い関連がある [1](図 1).

Kohnhauser らは空き頂点数 k が 2 以上の場合を考えた [6]. X を連結グラフとする. $s \geq 1$ とする. X の道 $I = v_1 v_2 \dots v_s$ が次の条件をみたすとき, I を s -isthmus (地峡) という; (1) I のすべての頂点および辺は X を分離し, かつ, (2) $1 < i < s$ について $\deg_X(v_i) = 2$.

定理 2. (Kohnhauser et al.[6]) $2 \leq k \leq n-1$ とする. X は連結であり, サイクルグラフではないとする. このとき, 次の条件は互いに同値である.

- (1) X は k -isthmus を持たない.
- (2) (X, k) は transitive.
- (3) (X, k) は feasible. \square

3 グラフの isthmus 構造と Pebble Motion Puzzle への応用

前節の定理 2 より, Pebble Motion Puzzle においては, 盤グラフの isthmus が重要な役割を担っていることがわかる. 本節では, まず isthmus を含むようなグラフについてその構造を整理し, 次にその結果を Pebble Motion Puzzle に応用する [8].

X を連結グラフとする. $B \subset V(X)$ に対して, S が誘導する X の部分グラフを $X[B]$ と表わす. $B \subset V(X)$ が次の条件をみたすとき B を k -block という; (1) $X[B]$ は連結, かつ, (2) $X[B]$ は $X[B]$ の k -isthmus を持たない, かつ, (3) B は (1) と (2) に関して極大である.

図 2 に, あるグラフの k -isthmus と k -block を示す.

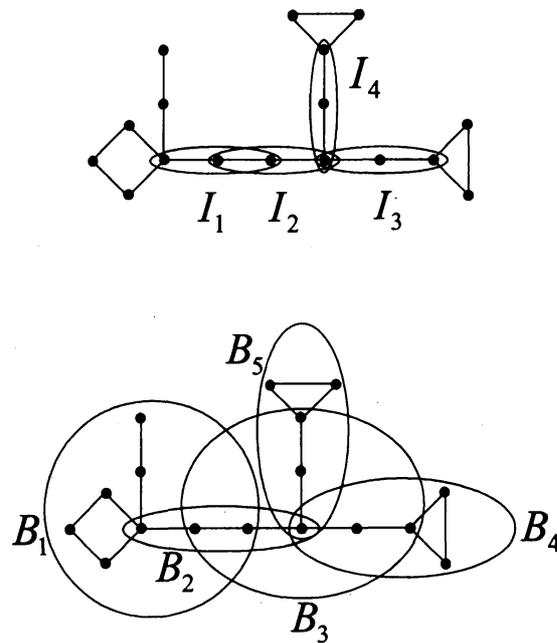


図 2. グラフの 3-isthmus I_i ($1 \leq i \leq 4$) と 3-block B_i ($1 \leq i \leq 5$)

以下に, k -block の基本的性質を挙げる.

- グラフ X の k -block の位数は $\min\{k+1, |V(X)|\}$ 以上である.
- $S \subset V(X)$ とする. $|S| \geq k+1$ ならば, S を含む k -block は高々 1 個存在する.
- $S \subset V(X)$ とする. $|S| \geq k+1$ かつ $X[S]$ が連結 かつ $X[S]$ が $X[S]$ の k -isthmus を含まないならば, S を含む k -block はちょうど 1 個存在する. 特に, $|S| = k+1$ かつ $X[S]$ が連結ならば, S を含む k -block はちょうど 1 個存在する.
- B_1, B_2 を X の 2 つの異なる k -block とする. このとき, $|B_1 \cap B_2| = k$ ならば, $X[B_1 \cap B_2]$ は $X[B_1 \cup B_2]$ の k -isthmus であり, X の k -isthmus でもある.

連結グラフ X に対して, X のすべての k -isthmus の集合を \mathcal{I}_k と表わし, X のすべての k -block の集合を \mathcal{B}_k と表わす. グラフ T_k を次のように定義する; $V(T_k) = \mathcal{B}_k \cup \mathcal{I}_k$,
 $E(T_k) = \{(B, I) \in \mathcal{B}_k \times \mathcal{I}_k : V(I) \subset B\}$.

命題 3. X を連結グラフとする. このとき, 上記のように定義したグラフ T_k は木である. □

この木を X の k -isthmus 木 と呼ぶ (図 3).

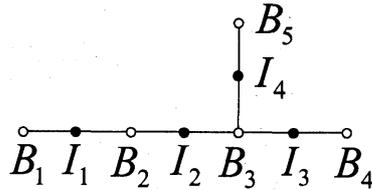


図 3. 図 2 のグラフに対応する 3-isthmus 木

この節の残りで, 与えられた盤グラフ X の isthmus 構造を用いてパズル (X, k) を解析する. X を頂点数 n の連結グラフとする. $k \geq 1$ に対して石の集合を P とするパズル (X, k) を考える. X 上の P の配置 f と石 $p \in P$ に対して, $V(G)$ の部分集合 $R(p, f)$ を次のように定義する; $R(p, f) = \{v \in V(G) : g \sim f, g(v) = p \text{ をみたす配置 } g \text{ が存在する}\}$.

$R(p, f)$ を初期配置 f についての石 p の 可動域 と呼ぶ.

可動域は以下のようにある k -block と一致する. 初期配置 f と石 p に対して, $v = f^{-1}(p)$ と置く. X は連結なので, v のまわりに k 個の空き頂点を集めることができる. つまり, f と同値な配置 f_1 が存在して, $f_1^{-1}(p) = v$ かつ $X[\{v\} \cup f_1^{-1}(0)]$ は連結, となる. $A = \{v\} \cup f_1^{-1}(0)$ と置く. 与えられた初期配置 f と石 p に対して, この A は一意には決まらない. しかし, $|A| = k + 1$ であることから, k -block の基本性質を用いると, $A \subset B$ となる k -block B は一意的に存在することがわかる.

定理 4. 初期配置 f , 石 $p \in P$ に対して, 上記のように定義した k -block を B とする. このとき, $R(p, f) = B$ である. □

次に, 異なる 2 つの石が接触するための条件を考える. 与えられた初期配置 f について, 2 つの石 p と q が 接触可能 とは, f と同値なある配置 g が存在して $g^{-1}(p)g^{-1}(q) \in E(X)$ となることである.

定理 5. パズル (X, k) について, f を初期配置, p, q を 2 つの石とする. このとき, p と q が接触可能であることは, 次のいずれかの条件が成り立つことと同値である;

- (1) $R(p, f) = R(q, f)$ かつ $X[R(p, f)]$ はサイクルグラフではない, または,

(2) $R(p, f) = R(q, f)$ かつ $X[R(p, f)]$ はサイクルグラフであり q はそのサイクル上で p の隣りにある, または,

(3) $R(p, f) \neq R(q, f)$ かつ $X[R(p, f) \cap R(q, f)]$ は X の k -isthmus である. \square

最後に, 与えられた2つの配置 f と g が同値になるための必要十分条件を k -block を用いて表わす. $k \geq 2$ のとき, X のある k -block B について $X[B]$ がサイクルグラフならば, $B = V[X]$ であることに注意する.

定理 6. $k \geq 2$ とする. X をサイクルグラフではない連結グラフとする. このとき, パズル (X, k) の2つの配置 f, g が同値であるための必要十分条件は, すべての石 p について $R(p, f) = R(p, g)$ となることである. \square

$k = 1$ の場合も, 盤グラフの例外グラフとして, 2部グラフ, サイクルグラフ, $\theta(1, 2, 2)$ -グラフを考慮すれば定理 6. と同様な定理が得られるが, 記述は省略する.

4 Pebble Exchange Puzzle

この節では, 第1節(2)で定義した Pebble Exchange Puzzle について調べる.

まず, 石グラフ Y が完全2部グラフ K_{n_1, n_2} の場合を考える [3]. 既に定理 1. により $Y = K_{1, n-1}$ の場合は解決済みなので, 以下, $2 \leq n_1 \leq n_2, n_1 + n_2 = n$ とする.

$Y = K_{n_1, n_2}$ の2つの部集合を P_1, P_2 とし, $i = 1, 2$ について $|P_i| = n_i$ とする. X の頂点集合の分割 $V(X) = V_1 \cup V_2, i = 1, 2$ について $|V_i| = n_i$, を考える. 石交換に付随する群として, $G(V_1, V_2)$ および $i = 1, 2$ について $G_i(V_1, V_2), H_i(V_1, V_2)$ を次のように定義する;

$G(V_1, V_2) = \{\sigma \in S(V(X)) : g \sim f \text{ かつ } j = 1, 2 \text{ について } g(V_j) = f(V_j) = P_j \text{ なる配置 } f, g \text{ が存在して, } g \circ \sigma = f\}.$

$i = 1, 2$ について, $G_i(V_1, V_2) = \{\sigma \in S(V_i) : g \sim f \text{ かつ } j = 1, 2 \text{ について } g(V_j) = f(V_j) = P_j \text{ なる配置 } f, g \text{ が存在して, } g|_{V_i} \circ \sigma = f|_{V_i}\}.$

$i = 1, 2$ について, $H_i(V_1, V_2) = \{\sigma \in S(V_i) : g \sim f \text{ かつ } j = 1, 2 \text{ について } g(V_j) = f(V_j) = P_j \text{ かつ } g|_{V_i} = f|_{V_i} \text{ なる配置 } f, g \text{ が存在して, } g|_{V_i} \circ \sigma = f|_{V_i}\}.$

X を連結グラフとする. このとき, 次のことがわかる.

- $G(V_1, V_2)$ 及び $i = 1, 2$ について $G_i(V_1, V_2), H_i(V_1, V_2)$ は分割 $V(G) = V_1 \cup V_2$ によらず同型である. 以下, $G(V_1, V_2), G_i(V_1, V_2), H_i(V_1, V_2)$ を単に G, G_i, H_i とも書く.
- H_i は G_i の正規部分群である.
- $G/(H_1 \times H_2) \cong G_1/H_1 \cong G_2/H_2$ が成り立つ.
- パズル (X, Y) の連結成分の個数 $c(X, Y)$ は $|G|/|H_1 \times H_2| = |G_1|/|H_1| = |G_2|/|H_2|$ と等しい.

特に X が n_1 -isthmus を持たないと仮定すると、定理 2. より、 $i = 1, 2$ について $G_i \cong S_{n_i}$ が成り立つ。この場合には、 H_1, H_2 は対称群の正規部分群となる。よく知られている次の事実により、 H_i の候補は限定される。

補題 7. $n \geq 3$ とする。このとき、 S_n の正規部分群は、 $\{e\}, S_n, A_n$, およびクラインの四元群 D_2 のいずれかである。 □

これらのことを用いて議論を進めることにより、次の定理 8. を証明できる。結果を述べるために、いくつかのグラフを定義する。 X_0 は 6 点からなるサイクルグラフであり、 $V(X_0) = \{x_i : 0 \leq i \leq 5\}$, $E(X_0) = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_5x_0\}$ とする。 X_0 に新たな頂点 y, z を付加して、グラフ $Q(1), Q(2)$, および $1 \leq i \leq 3$ について $Q(1, i)$ を作る；

$$V(Q(1)) = V(X_0) \cup \{y\}, E(Q(1)) = E(X_0) \cup \{x_0y\},$$

$$V(Q(2)) = V(X_0) \cup \{y, z\}, E(Q(2)) = E(X_0) \cup \{x_0y, yz\},$$

$$V(Q(1, i)) = V(X_0) \cup \{y, z\}, E(Q(1, i)) = E(X_0) \cup \{x_0y, x_iz\} \text{ for } 1 \leq i \leq 3.$$

また、正の整数 a_1, a_2, a_3 に対して、次数 3 の頂点から 3 本の長さ a_1, a_2, a_3 の道が出ているような木を $T(a_1, a_2, a_3)$ と書く。

定理 8. ([3]) $2 \leq n_1 \leq n_2$ とする。 X は $n = n_1 + n_2$ 頂点を持つ連結グラフであり、かつ、サイクルグラフではなく、かつ、 n_1 -isthmus を持たないとする。 H_1, H_2 は先に定義した群とし、 $c = c(X, K_{n_1, n_2})$ とする。このとき、

- (1) X が 2 部グラフでないならば、 $H_1 \cong S_{n_1}, H_2 \cong S_{n_2}, c = 1$.
- (2) X が 2 部グラフならば、(3) の例外を除き、 $H_1 \cong A_{n_1}, H_2 \cong A_{n_2}, c = 2$.
- (3) (3-1) $n_1 = 3, n_2 = 3$ かつ X が $T(1, 2, 2)$ ならば、 $H_1 \cong \{e\}, H_2 \cong \{e\}, c = 6$.
- (3-2) $n_1 = 3, n_2 = 4$ かつ X が $Q(1), T(2, 2, 2)$ のいずれかならば、 $H_1 \cong \{e\}, H_2 \cong D_2, c = 6$.
- (3-3) $n_1 = 4, n_2 = 4$ かつ X が $\theta(2, 2, 2), Q(1, 3), Q(2), T(2, 2, 3)$ のいずれかならば、 $H_1 \cong D_2, H_2 \cong D_2, c = 6$. □

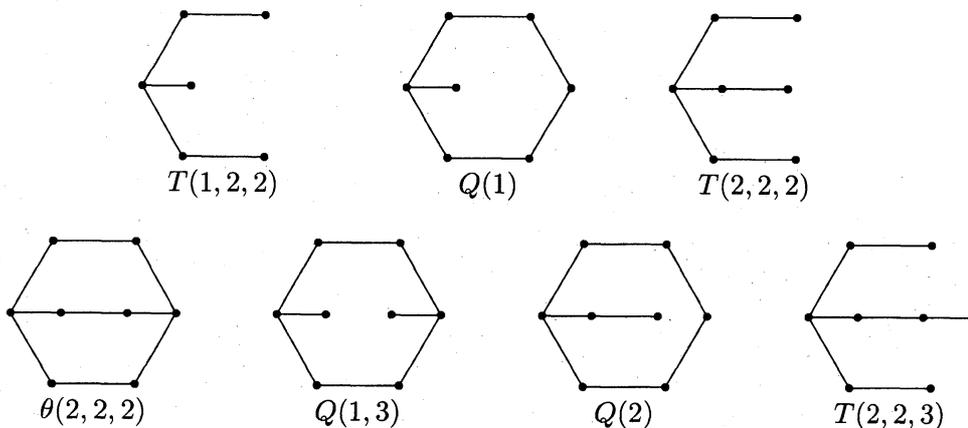


図 4. 定理 8. の例外グラフ

定理 8. のすべての例外グラフは $\theta(2, 2, 2)$ の部分グラフである (図 4).

$r \geq 3$ とする. 石グラフを完全 r 部グラフとした場合には, 完全 2 部グラフの場合のような例外パズルは存在しない.

定理 9. ([3]) $r \geq 3, n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$ とする. X は $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ 頂点からなる $(n - n_r)$ -isthmus を持たない連結グラフとする. このとき, (X, K_{n_1, \dots, n_r}) は *feasible* である.

□

観察により, 盤グラフ X と石グラフ Y が両方とも 2 部グラフで頂点数が 3 以上の場合には, 偶奇性により (X, Y) は *feasible* ではありえないことがわかる. そこで X, Y が両方とも 2 部グラフの場合には, 次の定義を追加する. 配置の全体 $\mathcal{F}(X, Y)$ が \mathcal{F}_1 と \mathcal{F}_2 に等分割されて, $i = 1, 2$ について $f, g \in \mathcal{F}_i$ ならば $f \sim g$ が成り立つとき, (X, Y) は semifeasible である, という. ここで, *semifeasibility* と *feasibility* の関連を述べておく.

命題 10. $n \geq 3$ とする. X, Y はいずれも頂点数 n の 2 部グラフであり, (X, Y) は *semifeasible* とする. X' は X を全域部分グラフとして含む, 2 部グラフではないグラフとする. このとき, (X', Y) は *feasible* である. □

次に, 盤グラフの連結度とパズル (X, Y) の *feasibility* の関連を述べる. グラフ X の連結度を $\kappa(X)$, 最大次数を $\Delta(X)$, 最小次数を $\delta(X)$ と書く.

定理 11. ([4]) $n \geq 1$ とする. X, Y は n 頂点の連結グラフであり, $\kappa(X) + \Delta(Y) \geq n + 1$ とする. このとき,

(1) (X, Y) は *transitive* である.

(2) さらに, X はサイクルグラフと $\theta(1, 2, 2)$ のどちらでもないならば, (X, Y) は *feasible* または *semifeasible* である. □

定理 1 の仮定は, 結論の必要十分条件ではない. しかし, ある意味で最善であることを以下に示す. その準備として, 長い isthmus の存在は *transitivity* の障害になることを注意する.

命題 12. ([4]) $k \geq 1, Y$ は k -isthmus を持つとする. このとき, $\kappa(X) \leq k$ ならば, (X, Y) は *transitive* ではない. □

$2 \leq d \leq n - 1$ を満たす整数 n, d について, $K_{1,d}$ の 1 つの葉に長さ $n - d - 1$ の道を付け加えてできる n 頂点の木を $H(n, d)$ とする. $H(n, d)$ は $(n - d)$ -isthmus を持ち, その最大次数は d である. このとき, 命題 12. より, n 頂点のグラフ X について $\kappa(X) + d \leq n$ ならば $(X, H(n, d))$ は *transitive* ではないことがわかる.

X, Y のグラフとしての不変量とパズル (X, Y) の *feasibility* との関連については定理 11., 命題 12. 以外にはほとんど知られていない. これに関連して 1 つの予想を述べる.

予想 13. $n \geq 3$ とする. X, Y は n 頂点の連結グラフであり, $\delta(X) + \delta(Y) \geq n + 1$ とする. このとき, (X, Y) は *feasible* である. \square

予想 13. の仮定の不等式は, この予想が正しいとすれば最善である; n が 4 以上の偶数であるとき, $X = Y = K_{n/2, n/2}$ あるいは $X = Y = K_{n/2} \times K_2$ とすると, どちらの例も $\delta(X) + \delta(Y) = n$ であるが, (X, Y) は *feasible* にはならない.

次に盤グラフが具体的なグラフ族の場合を考える. 頂点数 n のパス, サイクルをそれぞれ P_n, C_n と書く. Y を頂点数 n の連結グラフとすると, (P_n, Y) が *feasible* であるための必要十分条件は Y が完全グラフであることは容易にわかる. 以下に, サイクルグラフについての結果を示す.

定理 14. ([4]) $n \geq 3$ とする. Y は n 頂点のグラフとする. このとき, (C_n, Y) が *feasible* であるための必要十分条件は, \bar{Y} が林であり, かつ, $\gcd(c_1, c_2, \dots, c_r) = 1$ となることである. ここで, r は \bar{Y} の連結成分の個数であり, c_i は \bar{Y} の i 番目の連結成分の頂点数である. \square

盤グラフ X が完全 2 部グラフの場合 (定理 1., 定理 8.), サイクルグラフの場合 (定理 14.) 以外の具体的なグラフ族について (X, Y) が *feasible* となるための Y の条件を確定することは興味深い.

5 Pebble Exchange Puzzle に付随する群

この節では, 本研究で扱うパズルに関連する構造のうち, 比較的高い対称性を持つような構造を探る試みを記す. X を連結グラフとする. X を盤グラフかつ石グラフとするパズル (X, X) の配置のうち X の自己同型写像にのみ注目する. $\text{Aut}(X)$ を X の自己同型群, 1_X を X の頂点集合 $V(G)$ 上の恒等写像とする. X の石交換群を $\text{Peb}(X) = \{f \in \text{Aut}(X) : f \sim 1_X\}$ と定義する. $\text{Peb}(X)$ は $\text{Aut}(X)$ の部分群である. 以下, $\text{Peb}(X)$ の基本的な性質を述べる.

一般に, どのような有限群 G に対しても, $\text{Aut}(X)$ が G と同型となるような連結グラフ X が存在することが知られている. (Frucht の定理 [2]. 参考書として例えば [7] を参照のこと.) このことは, $\text{Aut}(X)$ を $\text{Peb}(X)$ に代えても成り立つ. 実際, まず $\text{Aut}(X') \cong G$ を満たす連結グラフ X' で, $\Delta(G') < |V(G')| - 1$ であるものを準備する. X' に新たな 1 つの頂点 v を join したグラフ $X = X' + \{v\}$ を考えると, $\text{Aut}(X) \cong \text{Aut}(X') \cong G$ となる. 一方, X は全域木としてスターを含む 2-連結グラフであるので定理 1. より (X, X) は *feasible* である. よって, $\text{Peb}(X) \cong \text{Aut}(X)$ が成り立つ.

命題 15. 有限群 G に対して, $\text{Peb}(X) \cong G$ となるような連結グラフ X が存在する. \square

次に, X が小さいサイクルを含まない場合を考える. X に含まれるどのサイクルの長さも 5 以上ならば, 初期配置 1_X から出発して各石は高々元の点の近傍までしか移動できないことがわかる. このことから次の結果が得られる.

命題 16. 連結グラフ X に含まれるどのサイクルの長さも 5 以上ならば, $\text{Peb}(X) = \{1_X\}$. \square

次にグラフの積に関する石交換群の性質を述べる.

2つのグラフ X_1 と X_2 の積 (Cartegian product) $X_1 \times X_2$ を次のように定義する ;

$V(X_1 \times X_2) = V(X_1) \times V(X_2)$, $E(X_1 \times X_2) = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) : u_1 = v_1 \text{ かつ } u_2v_2 \in E(X_2), \text{ または, } u_2 = v_2 \text{ かつ } u_1v_1 \in E(X_1)\}$.

連結グラフ X_1, X_2 について, $\text{Peb}(X_1 \times X_2) \supset \text{Peb}(X_1) \times \text{Peb}(X_2)$ の成立は自明である. 実際には, この両辺は同型となることがわかる.

定理 17. X_1, X_2 が連結グラフならば, $\text{Peb}(X_1 \times X_2) \cong \text{Peb}(X_1) \times \text{Peb}(X_2)$. \square

系として, n 次元立方体 $Q_n = K_2^n$ について次が成り立つ.

系 18. $\text{Peb}(Q_n) \cong \mathbb{Z}_2^n$.

今後の研究の1つの方向として, グラフの自己同型群について知られている諸々の性質が石交換群についても成立するのかどうかを調べる事が挙げられる.

参考文献

- [1] A. Fink, and R. Guy, Rick's tricky six puzzle: S_5 sits specially in S_6 , *Math. Magazine* **82** (2009), 83–102.
- [2] R. Frucht, Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe (in German), *Compositio Mathematica* **6** (1939), 239–250.
- [3] S. Fujita, T. Nakamigawa, and T. Sakuma, Colored pebble motion on graphs, *European J. of Combin.* **33** (2012), 884–892.
- [4] S. Fujita, T. Nakamigawa, and T. Sakuma, Pebble exchange on graphs, submitted.
- [5] W. W. Johnson, Notes on the 15 puzzle. I., *American J. Math.* **2** (1879), 397–399.
- [6] D. Kohnhauser, G. Miller, and P. Spirakis, Coordinating pebble motion on graphs, the diameter of permutation groups, and applications, *Proceedings of the 25-th Symposium on Foundations of Computer Science*, (FOCS '84), 241–250.
- [7] J. Lauri, and R. Scapellato, Topics in Graph Automorphisms and Reconstruction, London Math. Soc. Student Texts **54**, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [8] T. Nakamigawa, and T. Sakuma, Agent arrangement problem, preprint arXiv:1212.2306.

- [9] W. E. Story, Notes on the 15 puzzle. II., *American J. Math.* **2** (1879), 399–404.
- [10] R. M. Wilson, Graph puzzles, homotopy, and the alternating group, *J. Combin. Theory Ser. B* **16** (1974), 86–96.