

## 非線形波動方程式の安定かつ高精度な数値解法について II

大阪府立大学工学研究科 北川真帆(Maho Kitagawa), 村上洋一(Youichi Murakami)  
Graduate School of Engineering  
Osaka Prefecture University

### 1 はじめに

前回の研究[1]に引き続きここでは, 次のような移流型の非線形項を持つ 1 次元の偏微分方程式の時間発展の数値解法について考察する.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + L \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^3}{\partial x^3}, \dots \right) u = 0, \quad (1)$$

ここで,  $L \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^3}{\partial x^3}, \dots \right)$  は,  $x$  微分の高階微分を含んだ線形演算子を示す. さらに 2 次元の方程式 (KP 方程式) についても適用しその有効性を検討する.

偏微分方程式の空間微分についてはスペクトル法を用い, 適切な時間に関する差分法 (時間スキーム) を見出すことを目的とする. その際, 陽解法で数値安定になり数値精度も柔軟に選択できるものに着目する.

まず, これまでの結果について簡単に述べ, 次に今回新たに取り入れたパデ近似に基づく数値計算法について説明する. 非線形分散方程式の例として KdV 方程式 (1 次元), KP 方程式 (2 次元) について種々の時間差分法による数値安定条件の結果を与え, 比較する. また, 新たに考案した数値スキームを高次精度化する方法について検討する. 最後に, この研究の結論と今後の課題についてまとめる.

### 2 これまでの結果のまとめ

数値スキームは空間分割にはスペクトル法を用い, 時間発展には 4 次のルンゲ-クッタ法, ジェイムソンの方法という一段法を採用し, 積分因子法を組み合わせる. アライアジングエラーは 2/3 則によって除去した. 前回の繰り返しになるが, まず, ジェイムソンの方法と積分因子法について簡単に述べる.

ジェイムソンの方法[2]はルンゲ-クッタ法の特別な方法である. 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad (2)$$

ただし,  $f$  が  $t$  にあらわに依存している関数の場合この方法は適用できない. 4 次精度のジェイムソンの方法は,

$$y_{(1)} = y_n + \frac{\Delta t}{4} f(y_n), \quad (3)$$

$$y_{(2)} = y_n + \frac{\Delta t}{3} f(y_{(1)}), \quad (4)$$

$$y_{(3)} = y_n + \frac{\Delta t}{2} f(y_{(2)}), \quad (5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_{(3)}) + O(\Delta t^5). \quad (6)$$

となる.  $f$ を作用させることが時間で微分することに対応するので, テイラー展開を構成していることになる. 途中の値を保存する必要がないので, 配列が少なくて済む.  $N$ 次精度に一般化するのも容易であることもわかる. 通常のルンゲ-クッタ法のように5次精度になると6段必要になるとか, 導出が複雑になることもない.

ここでは次の微分方程式(7)に基づいて積分因子法[3]について説明する.

$$\frac{dy}{dt} = f(y) - \alpha y. \quad (7)$$

ここで,  $f(y)$ は $y$ の非線形関数である. 式(7)を次のように式変形する.

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} y) = e^{\alpha t} f(y). \quad (8)$$

この形の元で時間微分を差分化するのが積分因子法である. 例えば時間について前進オイラー法を用いると式(9)のようになる.

$$y_{n+1} = e^{-\alpha \Delta t} (y_n + \Delta t f(y_n)). \quad (9)$$

積分因子法は線形項を解析的に解いているため, 線形項のみなら $\Delta t$ による打ち切り誤差が生じず,  $\Delta t$ を大きくしたことによる数値不安定も生じない.

ここでは線形項 $-\alpha y$ と非線形項 $f(y)$ を持つ微分方程式(10)に基づいて線形項と非線形項を段階的に解く方法[1]について説明する.

$$\frac{dy}{dt} = f(y) - \alpha y. \quad (10)$$

まず, 積分因子法で線形項のみを時間発展させ,

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = -\alpha \tilde{y}, \quad (11)$$

$$\tilde{y} = e^{-\alpha \Delta t} y_n, \quad (12)$$

この項を用いて非線形項を解く. その際, 適当な次数のルンゲ-クッタ法やジェイムソンの方法を用いる. 例えば, 前進オイラー法を用いると

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = f(\tilde{y}), \quad (13)$$

$$y_{n+1} = \tilde{y} + \Delta t f(\tilde{y}), \quad (14)$$

となる.

各方程式についてそれぞれ数値安定性を調べた。まず空間分割数 $N$ 、すなわち、空間刻み $\Delta x$ を固定して時間刻み $\Delta t$ を変えていき、数値計算が可能な最も大きい $\Delta t$ を求める。このようにして求めた限界の $\Delta t$ と $\Delta x$ の関係を図に示した。 $\Delta x$ を固定して $\Delta t$ を動かした時、この線より大きな $\Delta t$ を選ぶと、数値解は発散したり刻みに依存した振動が生じ、計算は不可能となる。

前回[1]の研究によると、散逸項を含む場合の代表例であるバーガース方程式[4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (15)$$

の初期値問題を4次のルンゲ-クッタ法、積分因子法と4次のルンゲ-クッタ法の組み合わせ法を用いて解き、4次のルンゲ-クッタ法では発散する限界の $\Delta t$ は粘性項の2階微分の影響から $\Delta x$ の約2乗に比例し数値安定性はあまり良くなかったが、積分因子法と4次のルンゲ-クッタ法の組み合わせ法では $\Delta t$ は $\Delta x$ に関わらず安定となり、数値安定性は非常に改善された。線形の散逸項が数値不安定性の主要な原因である場合は、積分因子法が非常に有効であることが示された。

分散項を含むKdV方程式[5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad (16)$$

の初期値問題を、4次のルンゲ-クッタ法、積分因子法と4次のルンゲ-クッタ法の組み合わせ法、線形項と非線形項を段階的に解く方法（非線形項は4次のジェイムソンの方法で解いた。）を用いて解いた。このとき図1に示すように、振幅が最も大きく、分散性が効いてくるといふKdV方程式の特徴が出てくる頃の時刻 $t=5$ で数値安定性を調べることにした。ここで、 $\mu=0.01$ とした。数値安定性の結果を図2に示す。

図2より、4次のルンゲ-クッタ法では発散する限界の $\Delta t$ の値は分散項の3階微分により $\Delta x$ のおよそ3乗に比例し、数値安定性は悪かった。積分因子法をルンゲ-クッタ法と組み合わせて用いると $\Delta t$ の限界は $\Delta x$ のおよそ2乗に比例し、かなり改善することが確認できた。さらに、線形項と非線形項を段階的に解くと $\Delta t$ の限界は $\Delta x$ にほぼ比例するまで良くなることがわかった。実用的には十分な数値安定性が得られたと考えられる。

### 3 パデ近似による新しい数値スキームと結果

KdV方程式のように分散項を持つ方程式でさらに良い数値安定性を得るために、今回新たにパデ近似を用いた時間刻みの方法を新たに導出し、 $\Delta t$ をさらに大きくすることができないかを試みる。積分因子法は線形項にしか適用できない。この制限を緩和しようという意図もある。パデ近似[6]について簡単に述べる。

パデ近似[7]とは、べき級数展開 $\sum a_n \cdot z^n$ を次の有理関数 $P\{N, M\}(z) = \frac{\sum_0^N A_n z^n}{\sum_0^M B_n z^n}$ の2つの整関数の比に置き換えることである。ここで、一般性を失うことなく、 $B_0=1$ と置くことができる。

$P\{N, M\}(z)$ のテイラー級数展開の最初の $M+N+1$ 個の項がべき級数 $\sum a_n \cdot z^n$ の最初の $M+N+1$ 個の項と一致するように、係数 $A_1, A_2, \dots, A_N, B_1, B_2, \dots, B_M$ を決定する。このようにして得られた分数関数 $P\{N, M\}(z)$ をパデ近似と呼ぶ。

例えば

$$f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \dots, \quad (17)$$

のパデ近似ともとのべき級数近似の様子を 図 3 に示す. 図 3 よりテイラー級数よりもパデ近似の方がもとの形に近く, 特に, テイラー級数展開の収束半径  $|z| < 1$  の外でも一致していることがわかる. なお, この関数はパデ近似の精度を上げることにより, もとの関数に一樣収束することが証明できる.

通常的时间発展のスキームはテイラー展開を基礎にしているが, テイラー展開は複素平面上の特異点の位置で収束半径が制約を受ける. このことが数値安定性で決まる  $\Delta t$  の限界と何らかの関係があるのではないかという予想のもとに, パデ近似を適用し, この限界を乗り越えることを試みる.

ここでは微分方程式(18)に基づいてパデ近似法について説明する.

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \quad (18)$$

1 次精度のテイラー展開より,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t \left. \frac{dy}{dt} \right|_n + O(\Delta t^2) \\ &= y_n + \Delta t f(y_n) + O(\Delta t^2), \end{aligned} \quad (19)$$

2 次精度のテイラー展開より,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t \left. \frac{dy}{dt} \right|_n + \Delta t^2 \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_n + O(\Delta t^3) \\ &= y_n + \Delta t f(y_n) + \Delta t^2 \frac{1}{2} f'(y_n) + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (20)$$

$P\{1,1\}(\Delta t) = y_{n+1}$  とすると,

$$\frac{(a+b\Delta t)}{(1+d\Delta t)} = y_{n+1}, \quad (21)$$

である. したがって, 1 次精度のパデ近似法は

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - \Delta t f'(y_n)} + O(\Delta t^2), \quad (22)$$

となる.

分母の割り残を避けるために, 線形項  $\alpha y$  と非線形項  $f(y)$  を持つ微分方程式(23)

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y + f(y), \quad (23)$$

において線形項のみにパデ近似を適用すると,

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - \Delta t \alpha} + \Delta t f(y_n) + O(\Delta t^2), \quad (24)$$

となる. これを線形パデ近似法と呼ぶことにする. この式の非線形項も割ると,

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - \Delta t \alpha} + \frac{\Delta t f(y_n)}{1 - \Delta t \alpha} + O(\Delta t^2), \quad (25)$$

となる。この方法を修正パデ近似法と呼ぶことにする。このようにしても精度は変わらないことに注意する。パデ近似法，線形パデ近似法，修正パデ近似法の中では修正パデ近似法の数値安定性が一番良かったため，この研究では主にこの方法を用いる。

KdV 方程式の初期値問題を，修正パデ近似法を用いて解いた。このとき，これまでと同様に振幅が最も大きく，分散性が効いてくるという KdV 方程式の特徴が出てくる頃の時刻  $t=5$  (図 1) で数値安定性を調べることにした。ここで， $\mu=0.01$  とした。これまでの方法と比較した数値安定性の結果を図 4 に示す。修正パデ近似法では  $\Delta t$  は  $\Delta x$  に関わらず安定となり，数値安定性は非常に改善された。ただし， $\Delta t$  を大きくしても数値安定ではあるが図 5 に示すように誤差が大きく正しい解は得られない。これは誤差の中に数値粘性項が含まれているものと考えられる。

以上今まですべて空間 1 次元の偏微分方程式を扱ってきた。ここでは，2 次元の非線形分散型の方程式の例として，KP 方程式[8]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (26)$$

の初期値問題を，積分因子法と 4 次のルンゲ - クッタ法の組み合わせ法，線形項と非線形項を段階的に解く方法（非線形項は 4 次のジェイムソンの方法で解いた.），修正パデ近似法を用いて解いた。ここで，初期条件は図 6 に示すような  $y$  方向に周期的なソリトン解

$$u = 2\mu^{\frac{1}{3}}\alpha^2 K \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{K}} \cosh\left(\alpha\mu^{-\frac{1}{3}}x - \Omega t + \sigma\right) \cos\left(\delta\mu^{-\frac{1}{6}}y + \theta\right)}{\left\{\sqrt{K} \cosh\left(\alpha\mu^{-\frac{1}{3}}x - \Omega t + \sigma\right) - \cos\left(\delta\mu^{-\frac{1}{6}}y + \theta\right)\right\}^2}, \quad (27)$$

$$K = \frac{\delta^2}{\delta^2 - \alpha^4}, \quad (28)$$

$$\Omega = \alpha^3 + 3 \frac{\delta^2}{\alpha}, \quad (29)$$

とし， $\mu=0.01$ ， $\sigma=0$ ， $\theta=0$ ， $\alpha=0.5$ ， $\delta=1.5$  とした。数値安定性の結果を図 7 に示す。

図 7 より，積分因子法と 4 次のルンゲ - クッタ法の組み合わせ法では発散する限界の  $\Delta t$  の値は  $10^{-5}$  よりも小さくなり，数値安定性は悪かった。いっけん  $\Delta t$  は  $\Delta x$  に関わらず安定とも見えるが，これはあまりに小さすぎて傾向が出なかったためと考えられる。線形項と非線形項を段階的に解くと  $\Delta t$  の限界は  $\Delta x$  にほぼ比例するまで良くなることがわかった。したがって，この方法は KdV 方程式と同様に，2 次元の偏微分方程式系でも有効であることが示唆された。また，修正パデ近似法では  $\Delta t$  は  $\Delta x$  に関わらず安定となったが，その係数が非常に小さいため実用的ではなかった。

#### 4 パデ近似による数値スキームの高次精度化

これまでの結果から，1 次元の方程式で修正パデ近似法を用いると十分な数値安定性が得られたが，その精度は良くないこと，また，2 次元の方程式に修正パデ近似法を用いると  $\Delta t$  は  $\Delta x$  に関わらず安定となったが，その係数が小さすぎるため実用的ではないことがわかった。これらを改善するためにパデ近似法を高次精度化する方法を考える。パデ近似法の高次精度化で問題になる点は，いろいろな形がある点とそれをどのような形で代入して実行していくかという点である。

以下では、比較的簡単な方法で試した結果について説明する。

#### 4.1 ジェイムソンの方法を部分的にパデ近似する方法

線形項  $\alpha y$  と非線形項  $f(y)$  を持つ微分方程式(30)

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y + f(y), \quad (30)$$

において線形項と非線形項をまとめてジェイムソンの方法で解く際、一回目だけをパデ化すると、

$$y_{(1)} = \frac{y_n}{1 - \frac{\Delta t}{N}\alpha} + \frac{\frac{\Delta t}{N}f(y_n)}{1 - \frac{\Delta t}{N}\alpha}, \quad (31)$$

$$y_{(2)} = y_n + \frac{\Delta t}{N-1} f\left(\alpha y_{(1)} + f(y_{(1)})\right), \quad (32)$$

:  
:

$$y_{(N-1)} = y_n + \frac{\Delta t}{2} f\left(\alpha y_{(N-2)} + f(y_{(N-2)})\right), \quad (33)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f\left(\alpha y_{(N-1)} + f(y_{(N-1)})\right) + O(\Delta t^{N+1}), \quad (34)$$

となる。この方法を用いるとジェイムソンの方法の精度が保たれる。なお、他の段階をパデ近似化すると、テイラー展開の高次の項が実現できなくなり精度が保てなくなる。

この方法で KdV 方程式の初期値問題を解き、その数値安定性を調べた。1次から4次のジェイムソンの方法をこのようにパデ化する方法と、線形項と非線形項を段階的に解く方法の数値安定性の結果を図8に示す。

図8より、1次のジェイムソンの方法をこのようにパデ化すると  $\Delta t$  は  $\Delta x$  に関わらず安定となったが、この方法は通常修正パデ近似法と同じことをしているだけである。2次、3次、4次と次数をあげていくとこれまで用いてきた線形項と非線形項を段階的に解く方法よりも数値安定性は悪くなった。したがって、この方法は有効とは言えない。

#### 4.2 高波長成分のみ一次の修正パデ近似法を適用する方法

線形項  $\alpha y$  と非線形項  $f(y)$  を持つ微分方程式(35)

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y + f(y), \quad (35)$$

において線形項と非線形項を段階的に解く。まず、線形項の低調波成分は積分因子法で、高調波成分は修正パデ近似法で時間発展させる。高調波成分の線形項を1次精度で解いているので、精度としての一貫性を欠く方法となっている。高調波成分の振幅は小さいのでその影響が小さくなることを期待している。

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \alpha y, \quad (36)$$

$$\tilde{y} = e^{\alpha \Delta t} y_n \quad (1 < j < kx \times Nx), \quad (37)$$

$$\tilde{y} = \frac{y_n}{1-\Delta t\alpha} \quad (kx \times Nx < j < Nx). \quad (38)$$

次に、この項を用いて非線形項を4次のジェイムソンの方法で解く。このとき、一回目だけにパデ近似を応用する。

$$y_{(1)} = \tilde{y} + \frac{\Delta t}{N} f(y_n), \quad (39)$$

$$y_{(2)} = \tilde{y} + \frac{\Delta t}{N-1} f(y_{(1)}), \quad (40)$$

:  
:

$$y_{(N-1)} = \tilde{y} + \frac{\Delta t}{2} f(y_{(N-2)}), \quad (41)$$

$$y_{n+1} = \tilde{y} + \Delta t f(y_{(N-1)}) + O(\Delta t^{N+1}). \quad (42)$$

この方法でKdV方程式の初期値問題を解き、その数値安定性を調べた。線形項を解く数値スキームをわける境界を定める $kx$ を $kx=0, 1/5, 1/3, 1/2, 2/3, 1$ とした場合と、線形項と非線形項を段階的に解く方法の数値安定性の結果を図9に示す。

図9より、 $kx$ が小さいほど、すなわち線形項を修正パデ近似法で解く範囲が広いほど数値安定性は良いことがわかる。 $kx \leq 1/2$ では線形項と非線形項を段階的に解く方法よりもわずかにではあるが数値安定性は改善している。しかし $kx=0$ のように修正パデ近似法で解く範囲が極端に広いと精度が悪くなってしまふので、 $kx$ を動かしてその精度の変化を調べることにする。

この方法の精度を調べるためにKdV方程式の保存量である質量 $M$ [9]

$$M[u(t)] := \int_0^{2\pi} u^2(t, x) dx, \quad (43)$$

の時間変化を比較した。まず、線形項をパデ近似で解く範囲の広さを決める $kx$ をいろいろ動かしてその精度を調べた。結果を図10, 11に示す。図11より $kx > 1/2$ では精度はほぼ変わらないことがわかった。図9より $kx$ が小さいほど数値安定性は良かったため、 $kx=1/2$ とした結果と修正パデ近似法、線形項と非線形項を段階的に解く方法の結果を比較した。図12, 13に結果を示す。図12, 13より高波長成分のみ1次の修正パデ近似法を適用する方法( $kx=1/2$ )では通常の修正パデ近似法よりも精度はかなり改善して線形項と非線形項を段階的に解く方法よりも少し精度が良いことがわかる。しかし、数値安定性、精度ともに改善したのはわずかなので十分とは言えない。

## 5 まとめ

前回[1]の線形項に積分因子法を適用し、次に非線形項にジェイムソンの方法を適用する方法は、2次元の非線形分散系であるKP方程式に対しても、数値安定性の限界が $\Delta t < C\Delta x$ となり、十分有効であることがわかった。

今回より適用範囲の広い方法を目指して、パデ近似法を提案しその有効性を検討した。KdV方程式で修正パデ近似法を用いると十分な数値安定性が得られたが、その精度は良くなかった。2次元の方程式に修正パデ近似法を用いると $\Delta x$ に依存せずに数値安定となったが、係数が小さすぎるためあまり実用的ではなかった。パデ近似を高次精度化するために、線形項と非線形項を分け

て解く際に線形項の高調波成分だけに修正パデ近似法を用いるとこれまでの方法よりわずかに数値安定性, 精度ともに改善した. 高調波成分のみに適用し数値安定性を改善する方法として有効かもしれない. 今後の課題は, 時間発展の数値スキームに適した高次精度のパデ近似法を見出すことである.

## 6 参考文献

- [1] 北川真帆, 村上洋一, 「非線形波動方程式の安定かつ高精度な数値解法について」 数理解析研究所講究録 1800 「非線形波動現象の研究の新たな進展」, 226-235 (2012)
- [2] A. Jameson, H. Schmidt, E. Turkel, “Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes.” AIAA Paper No. 81-1259 (1981).
- [3] R. S. Rogallo, “An ILLIAC Program for the Numerical Simulation of Homogeneous, Incompressible Turbulence.” NASA TM-73203 (1977).
- [4] J. M. Burgers, “A mathematical model illuminating the theory of turbulence.” Adv. Appl. Mech. 1, 171-199 (1948).
- [5] D. J. Korteweg, G. de Vries, “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves.” Philos. Mag. 39, 422-443 (1895).
- [6] 西尾明日花, 「パデ近似を用いた常微分方程式の数値解法の検討」 大阪府立大学工学部航空宇宙工学科 平成 23 年度卒業論文 (2012)
- [7] C. M. Bender, S. A. Orszag, “Advanced Mathematical Methods For Scientists And Engineers.” McGraw-Hill, New York (1978)
- [8] M. Tajiri, Y. Fujimura, Y. Murakami, “Resonant Interactions between Y-Periodic Soliton and Algebraic Soliton: Solutions to the Kadomtsev-Petviashvili Equation with Positive Dispersion.” Journal of The Physical Society of Japan Vol. 61, No. 3, March, 783-790 (1992)
- [9] C. Klein, C. Sparber, P. Markowich, “Numerical Study of Oscillatory Regimes in the Kadomtsev-Petviashvili Equation.” Journal of Nonlinear Science 17, 429-470 (2007)



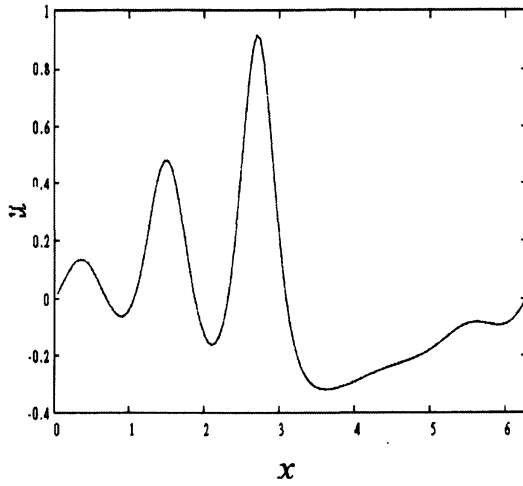


図1 KdV方程式の速度分布(t=5)

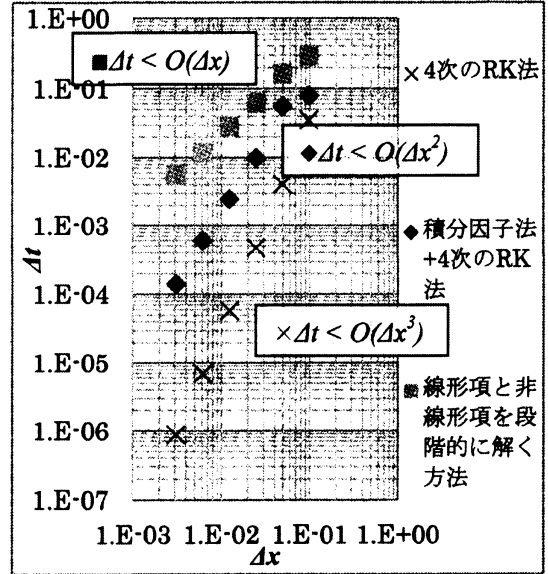


図2 Δx-Δt グラフ (KdV方程式)

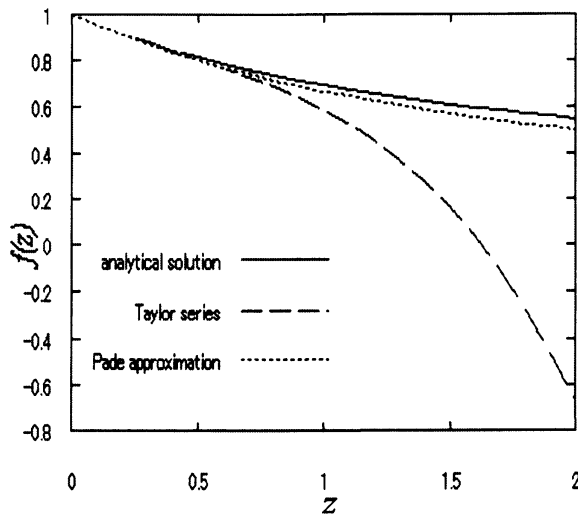


図3  $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z}$

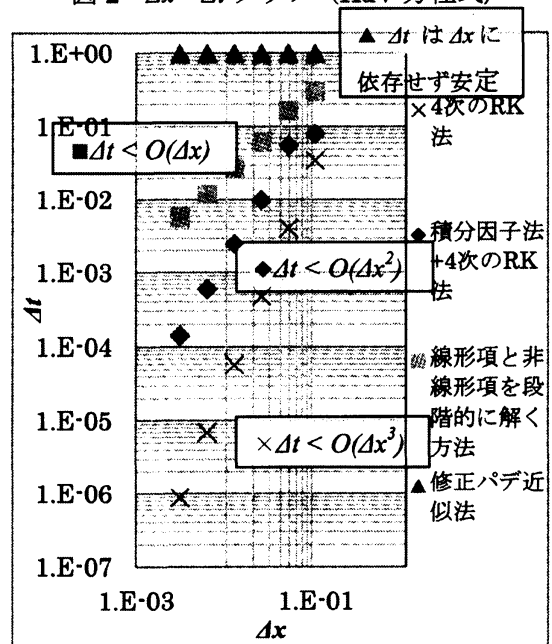


図4 Δx-Δt グラフ (KdV方程式)

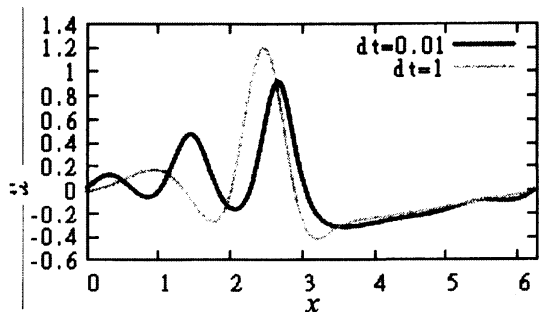


図5 修正パデ近似法で Δt=1 とした図

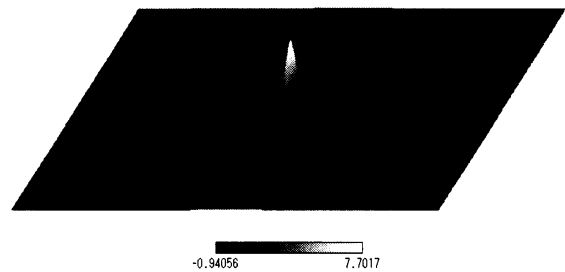


図6 初期条件 (y 方向に周期的なソリトン解)

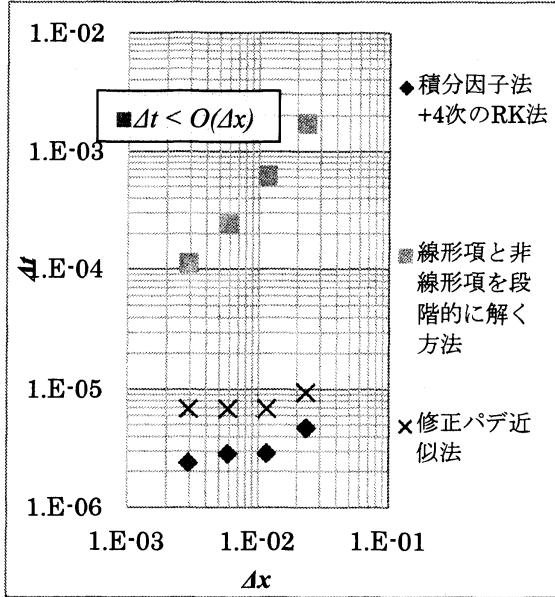


図7  $\Delta x - \Delta t$  グラフ (KP 方程式)

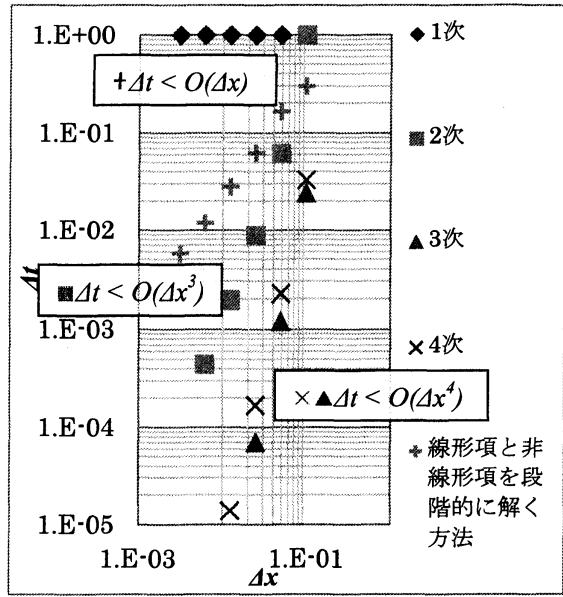


図8  $\Delta x - \Delta t$  グラフ (ジェイムソンの方法を部分的にパデ近似する方法)

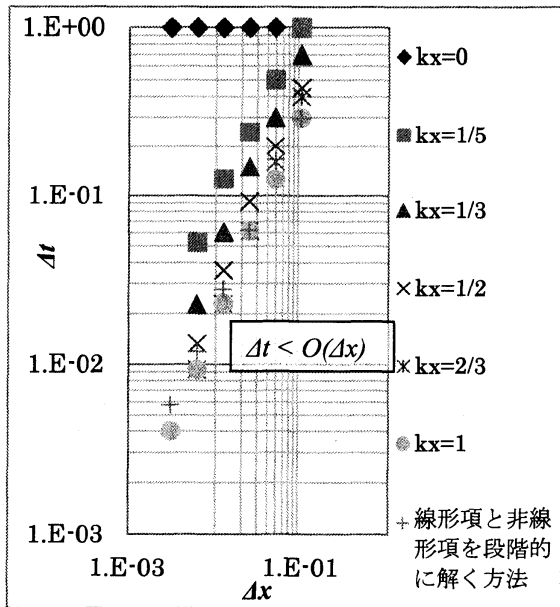


図9  $\Delta x - \Delta t$  グラフ (高波長成分のみ一次の修正パデ近似法を適用する方法)

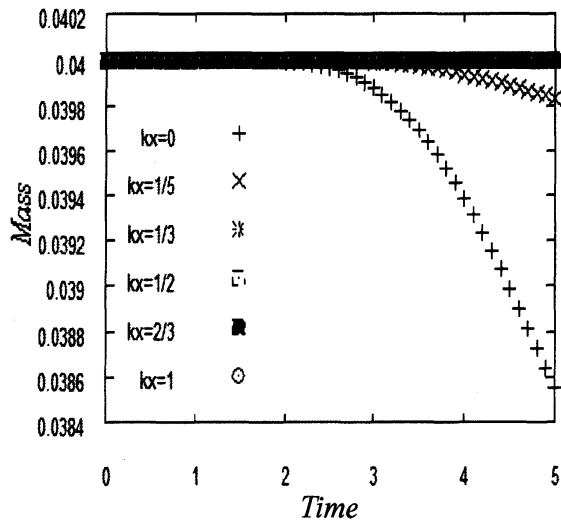


図10 精度の比較

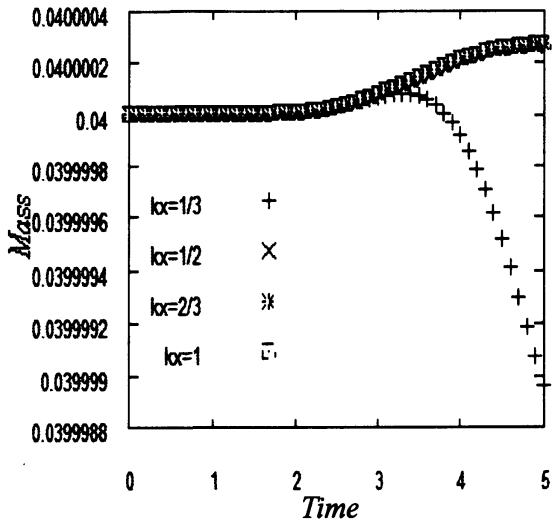


図 11 精度の比較②

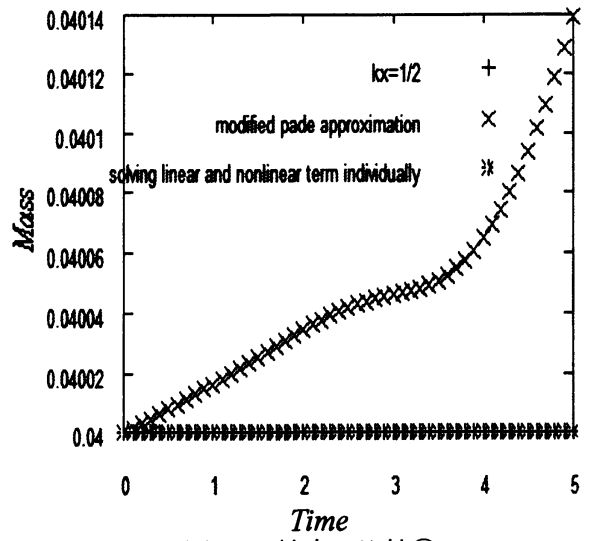


図 12 精度の比較③

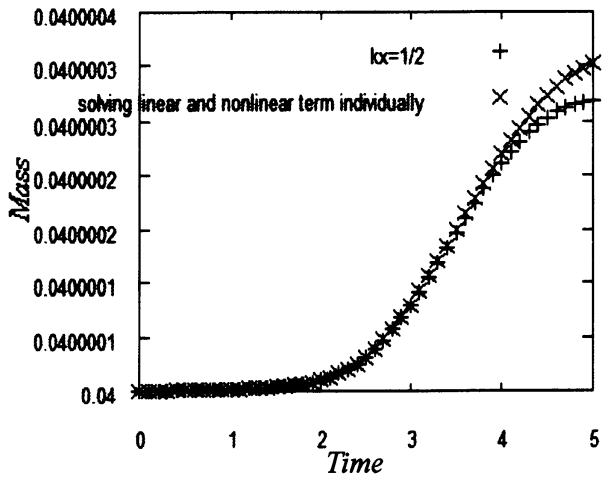


図 13 精度の比較