

## 無限自由度を持つ現実流体中に起きる小自由度的カオスについて

### Low order Chaos in Real Fluid with Infinite Degree of Freedom

○三村 和男, 東海大学教養学部, 神奈川県平塚市北金目 1117, mimura@keyaki.cc.u-tokai.ac.jp  
Kazuo Mimura, Dept. of Resources and Environment Science, School of Humanity and Culture, Tokai University  
1117 KITAKANAME, HIRATSUKA, KANAGAWA 259-1292, JAPAN

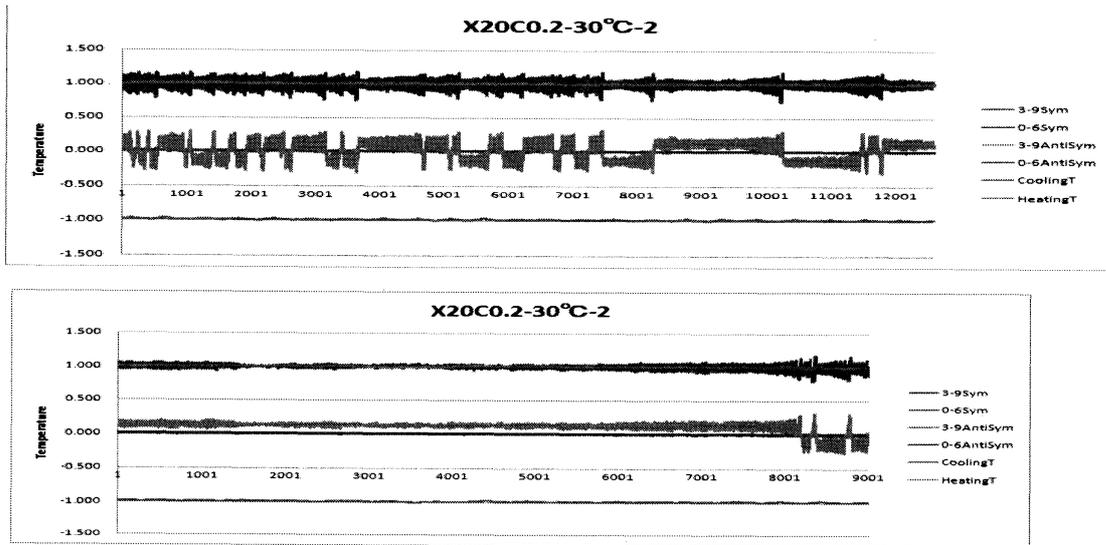


Fig.1 閉ループ内熱対流室内実験における温度時系列の前半(上)と後半(下)  
(一続きの実験であるが、データが大量であるため、前半と後半に分けてグラフ化した)

#### 1. はじめに

最も有名なカオス・システムのひとつである「ローレンツ・カオス」<sup>1</sup> (Lorenz, 1963) に対しては、今も重要な疑問が付いて回っている。すなわち、「たった3つだけの変数でもカオスが起るから多自由度なら当然カオスなのか?」。それとも、「自由度が少なすぎるゆえに、そのシステムはカオスとして振舞わなくてはならないのか? もしそうならば、自由度を上げるとその系にカオスは現れず安定化する可能性がある」。そもそも、ローレンツ・カオスは無限自由度を持つ現実流体の中で、実現するのかどうか、言い換えると、無限自由度をもつ流体が、自ら小自由度的振る舞いを選択する条件は何なのか?

そのような問題意識を持って、我々は、まず、鉛直設置したトーラス型の閉ループ内熱対流実験を行い、ローレンツ・カオスに似た、ループに沿った主流の反転現象を確認した<sup>2</sup> (Suda and Mimura, 1989)。しかしながら、同様な装置を使った実験で、ループに沿った主流が形成されず、代わりに4細胞状の局所流がカオス的に変動するという、我々と矛盾する報告もなされた<sup>3,4</sup> (Sano, 1991a,b)。

また、ローレンツ・システムを閉ループ内熱対流のトランケーション・モデルとして同定する、理論的な取り組みも存在する<sup>5</sup> (York and York, 1981)。ただし、彼らの理論は、ループ内流速はループに沿った成分のみを持つという基本的な仮定を前提としていた。確かに、この仮定のもとでは、ローレンツ・カオスの振る

舞いは、かなり「Robust」なものではある。しかしながら、現実の室内実験においては、ループの接続方向と直交する流速成分は確かに存在する。しかも、断面が円形であるトーラス型の閉ループ内では、閉ループ内前面で浮力を受けて上昇する流れは、前後に傾いた天井にぶつかることで、ループ内後面に回り込む、というトロイダルな効果を持っている。この効果が流れを3次元的にする傾向がある。

そこで我々は、断面が円形であるトーラス型の閉ループの代わりに、断面が長方形である、アニュラス型の閉ループを使って、同様な実験に取り組んだ。アニュラス型の場合は、上下・左右の2次元な流れが実現する可能性があるからである。

我々のアニュラス型閉ループは、下部半分が一定温度の温水槽に浸され、上部半分も一定温度の冷却水槽に浸されている (Fig.2)。

そして、ループ内上下・左右の4地点 (図中の1, 2, 3, 4) に熱電対を設置されている。この装置を使って、管壁温度一定の条件下における、閉ループ内熱対流実験を行い、温度の時系列データを得た。

その結果、確かに、加熱部冷却部の温度差を大きくするにつれて、ループに沿った主流が定常安定から、乱流安定状態を経て、カオス的的反転に遷移することが確認出来た。このカオス状態は局所的には激しく乱れながら、全体としてローレンツ・カオスと良く似た振る舞いをすることも確認できた。

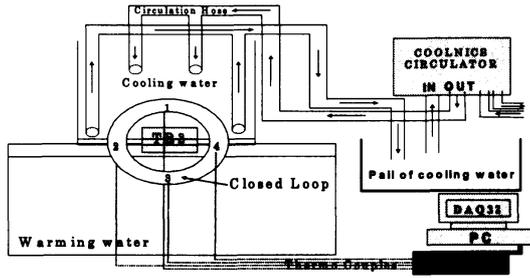


Fig.2 実験装置概念図

しかし、実験パラメータは共通にしたつもりでも、ある日の実験ではカオスの反転が見られるのに、別の日の実験では見られないことがあった。また、長時間実験を行うと、さらに奇妙な現象が見られた。

例えば、ループ幅 (図中の1-3点間あるいは2-4間距離) が30cmでチューブ幅 (図中の実験流体の厚み) が1.5cmの閉ループ (すなわちアスペクト比が20) を使って、加熱部・冷却部温度差が30°Cを保ったまま、約12時間におよぶ長時間実験の温度時系列データがFig.1である。上図・下図の各々の6本のグラフのうち、CoolingT、HeatingTが各々、加熱部及び冷却部温度の加熱部・冷却部平均温度からの偏差を加熱部・冷却部温度差の半分で無次元化した時系列であり、実験の間中、+1、-1が維持されている事がわかる。

グラフのうち3-9AntiSymがループ内左右温度差の半分を無次元化した量でこの符号がおおむね主流の向きに対応している。また、0-6AntiSymが上下温度差の半分に対応した無次元化量であり、いわゆるローレンツ・システムの変数Zに対応している。さらに、3-9Symと0-6Symは左右・上下温度変化の対称成分 (和の半分に対応した無次元量) であり、実験装置の持つ対称性からの逸脱の程度を表すが、それは比較的小さい事がわかる。

初めの約6時間は頻繁に主流の反転を繰り返すのに対して、後半の約6時間は、かなり長い時間反転が見られず、しかし、後半の終盤になると、再び反転し始める事がわかる。

前半のデータをもとに、3-9AntiSymデータと0-6AntiSymデータを使ったトラジェクトリーを描くと、左右に穴を持つ2枚の波のように見え、ローレンツ・システムと似たアトラクターを持つことが解る。また、0-6AntiSymデータを使って、ローレンツ・カスプ・マップを描くと、比較的少数の例外を除いて、テント状のカスプが認められ、やはりローレンツ・システムと似ている (Fig.3a,b)。

ところが、後半のデータをもとに同様の図を描くと、トラジェクトリーは、右の穴に落ち込んでいった後、急に、ローレンツ型のアトラクターが回復する。カスプ・マップを見ても、テント型の特徴は目立たず、長い安定期を経て、徐々にテント型に移行している事が読みとれる (Fig.4a,b)。

このように、実験条件はほぼ一定に保たれているにもかかわらず、ローレンツ・システムのような振る舞いが、自ら、乱流安定なシステムに遷移し、しかも、そのまま安定状態が続くのではなく、やがて、ローレンツ・システムが回復する。

この現象を仮に自発的レジーム・シフトと呼ぶ事にすれば、それを説明できるような解釈が求められる。このように、連続体として無限自由度を持つ現実の流体系において、まるで低次システムのカオスのような振る舞いが実現する条件は、極めて「Sensitive」なものである事が予想される。

そのために、2次元ブジネス流体の数値モデルを構築する。

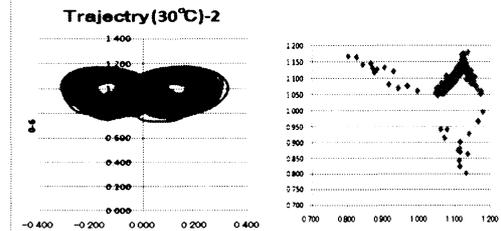


Fig.3a,b トラジェクトリーとカスプ・マップ (前半)

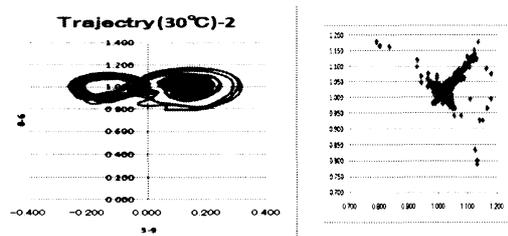


Fig.4a,b トラジェクトリーとカスプ・マップ (後半)

2. 2次元支配方程式

粘性流体の質量保存、運動量保存、エントロピー保存の式は、ベクトル形式で

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{v} - \rho \mathbf{g} = \mathbf{F},$$

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{d\rho}{dt} - \lambda \Delta T = Q$$

と表わされる、ただし、 $\rho$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $p$ 、 $T$  は各々、密度、速度、圧力、温度であり、 $\mu$ 、 $\mathbf{g}$ 、 $C_p$ 、 $\lambda$  は各々、粘性係数、重力加速度、熱伝導係数であり、 $\mathbf{F}$ 、 $Q$  は各々、運動量と熱量の外的強制項である。

ここで、 $\mathbf{F}=\mathbf{0}$ 、 $Q=0$  の時、

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad T = T_0 + T', \quad \rho = \rho_0(1 - \beta T'), \quad \nabla \rho_0 = \rho_0 \mathbf{g}$$

と置き、浮力項以外の  $\rho$  は  $\rho_0$  としてブジネス近似を行うと、 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \beta T' \mathbf{g} + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{dT'}{dt} = \frac{\lambda}{\rho_0 C_p} \Delta T'$$

となる、ただし  $\beta$  は熱膨張率である。注意すべき点は、座標系に依存しない形で、

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

$$\Delta \mathbf{v} \equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

であるので、渦度の式をつくると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) = \\ & -\beta \nabla \times (T' \mathbf{g}) - \frac{\mu}{\rho_0} \nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})) \end{aligned}$$

2次元流を仮定し、円筒座標  $(r, \theta, z)$  にすると、

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) = 0$$

なので、流れ関数が定義でき、

$$v_r \equiv -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta}, \quad v_\theta \equiv \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

となる。

$v_z=0$  の時、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} & \equiv \left( \frac{\partial v_z}{r \partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} \right) \\ & = \left( 0, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} \right) = \left( 0, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{r^2 \partial \theta^2} \right) \\ & = (0, 0, \Delta \psi) \end{aligned}$$

となり、渦度は  $z$  成分のみを持ち、それは流線関数のラプラシアンで表現される。

そして、渦度の式左辺の第2項は

$$\begin{aligned} & -\nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) = \\ & -\left( \frac{\partial(\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}))_z}{r \partial \theta}, -\frac{\partial(\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}))_r}{\partial r}, \right. \\ & \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}))_\theta) - \frac{\partial(\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}))_z}{r \partial \theta} \right) \\ & = -\left( \frac{\partial(\mathbf{v} \times (0, 0, \Delta \psi))_z}{r \partial \theta}, -\frac{\partial(\mathbf{v} \times (0, 0, \Delta \psi))_r}{\partial r}, \right. \\ & \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(\mathbf{v} \times (0, 0, \Delta \psi))_\theta) - \frac{\partial(\mathbf{v} \times (0, 0, \Delta \psi))_z}{r \partial \theta} \right) \\ & = -(0, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(-v_r \Delta \psi)) - \frac{\partial}{r \partial \theta} (v_\theta \Delta \psi)) \\ & = -(0, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Delta \psi \right) - \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \Delta \psi \right)) \\ & = -(0, 0, \frac{\partial^2 \psi}{r \partial r \partial \theta} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{r \partial \theta \partial r} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{r \partial r} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \theta}) \\ & = (0, 0, -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Delta \psi}{r \partial \theta}) \equiv (0, 0, J(\psi, \Delta \psi)) \end{aligned}$$

となり、やはり  $z$  成分のみを持ち、それはヤコビアンで表現される。

また、渦度の式右辺の第1項は、

$$\begin{aligned} & -\beta \nabla \times (T' \mathbf{g}) = \\ & -\beta \left( \frac{\partial(T' \mathbf{g})_z}{r \partial \theta}, -\frac{\partial(T' \mathbf{g})_r}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(T' \mathbf{g})_\theta) - \frac{\partial(T' \mathbf{g})_z}{r \partial \theta} \right) \\ & = \beta g \left( 0, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T' \cos \theta) - \frac{\partial T' \sin \theta}{r \partial \theta} \right) \end{aligned}$$

となり、またもや  $z$  成分のみを持ち、それは二つの項にわかれる。

さらに、渦度の式右辺の第2項は、

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu}{\rho_0} \nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})) \\ & = -\frac{\mu}{\rho_0} \left( \frac{\partial(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}))_z}{r \partial \theta}, -\frac{\partial(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}))_r}{\partial r}, \right. \\ & \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}))_\theta) - \frac{\partial(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}))_z}{r \partial \theta} \right) \\ & = -\frac{\mu}{\rho_0} \left( 0, 0, -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{v})_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{v})_z}{r \partial \theta} \right) \right) \\ & = \frac{\mu}{\rho_0} \left( 0, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \frac{\partial \Delta \psi}{r \partial \theta} \right) \right) \\ & = \frac{\mu}{\rho_0} (0, 0, \Delta(\Delta \psi)) \end{aligned}$$

となり、ここでもまた  $z$  成分のみを持ち、それはラプラシアンのラプラシアンで表現される。

最後に、温度の式左辺は

$$\begin{aligned} \frac{dT'}{dt} & = \frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' = \frac{\partial T'}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} T' + v_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} T' \\ & = \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} T' + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{r \partial \theta} T' \\ & = \frac{\partial T'}{\partial t} + J(\psi, T') \end{aligned}$$

となり、温度の移流項はヤコビアンで表現される。

従って、2次元のビジネス流体の渦度の式と温度の式は、成分表示で、

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + J(\psi, \omega) = \beta g \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T' \cos \theta) - \frac{\partial T' \sin \theta}{r \partial \theta} \right) + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \omega,$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + J(\psi, T') = \frac{\lambda}{\rho_0 C_p} \Delta T',$$

$$\text{where } \omega \equiv \Delta \psi, \quad \Delta C \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{r^2 \partial \theta^2}$$

となる。

### 3. 無次元化

上記の室内実験に対応した鉛直設置された、ループ幅  $2R$ 、チューブ幅  $2a$ 、加熱部温度  $T_h$ 、冷却部温度  $T_c$  のアニュラス型の閉ループに関して、未定ではあるが、代表的長さを  $D$ 、代表的速さを  $U$  と任意の無次元量  $A^*$ 、 $B^*$ 、 $C^*$  を使って、

$$r \equiv R + D r^*, \quad \left( -\frac{a}{D} < r^* < \frac{a}{D} \right),$$

$$\psi \equiv U D \psi^*,$$

$$J(A^*, B^*) \equiv \frac{1}{R D} J^*(A^*, B^*)$$

$$\Delta C^* \equiv \frac{1}{D^2} \Delta^* C^*$$

と無次元化を定義すると、

$$J^*(A^*, B^*) \equiv \frac{\partial A^* \partial B^*}{\partial r^* \partial \theta^*} - \frac{\partial B^* \partial A^*}{\partial r^* \partial \theta^*},$$

$$\Delta^* C^* \equiv \frac{1}{1 + \varepsilon^* r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( (1 + \varepsilon^* r^*) \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \right) + e^{*2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial \theta^{*2}},$$

$$\text{where } \varepsilon^* \equiv \frac{D}{R}, \quad e^* \equiv \frac{\varepsilon^*}{1 + \varepsilon^* r^*}$$

のように、無次元化ヤコビアンとラプラシアンが定義され、

$$\begin{aligned} \Gamma &\equiv \frac{D}{U} J^* \\ T &\equiv T_0 + T^* = \frac{T_h + T_c}{2} + \frac{T_h - T_c}{2} T^*, \quad (-1 < T^* < 1), \\ \omega &\equiv \Delta \psi = UD \Delta \psi^* = \frac{U}{D} \Delta^* \psi^* \equiv \frac{U}{D} \omega^* \end{aligned}$$

のように、無次元時間、温度、渦度を定義すると、アニュラス型の閉ループ内の粘性ブジネスク流体の渦度方程式と熱の式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*} \omega^* &= -e^* J^*(\psi^*, \omega^*) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \omega^* \\ &+ \frac{Gr}{\text{Re}^2} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon^* r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} ((1 + \varepsilon^* r^*) T^* \cos \theta) - e^* \frac{\partial}{\partial \theta} T^* \sin \theta \right), \\ \frac{\partial}{\partial t^*} T^* &= -e^* J^*(\psi^*, T^*) + \frac{1}{\text{Pr Re}} \Delta^* T^* \end{aligned}$$

となる。ここで、無次元パラメータは、DとUの不定性を残しながら、

$$\text{Re} \equiv \frac{\rho_0 D U}{\mu} = \frac{DU}{\nu}, \quad Gr \equiv \beta g \frac{T_h - T_c D}{2 \nu^2}, \quad \text{Pr} \equiv \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

と定義されている。

そこで、 $r^*$ の変域を  $(-\pi/2 < r^* < \pi/2)$  に固定するために、 $D = 2a/\pi$  と決定し、 $Gr = \text{Re}^2$  となるように、

$$U \equiv \sqrt{a \beta g (T_h - T_c) / \pi}$$

と決定すると、無次元化された渦度と熱の式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega &= \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon r} J(\psi, \omega) + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \Delta \omega + \frac{1}{1 + \varepsilon r} \frac{\partial}{\partial r} ((1 + \varepsilon r) T \cos \theta) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon r} \frac{\partial}{\partial \theta} T \sin \theta, \\ \frac{\partial}{\partial t} T &= -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon r} J(\psi, T) + \frac{1}{\text{Pr} \sqrt{Gr}} \Delta T \end{aligned}$$

のように簡略化される。ただし、無次元量であることを示す\*記号は省略している。最終的な3つの無次元パラメータは

$$Gr \equiv \frac{\beta g (T_h - T_c)}{2 \nu^2} \left( \frac{2a}{\pi} \right)^3, \quad \text{Pr} \equiv \frac{C \mu}{\lambda}, \quad \varepsilon \equiv \frac{2a}{\pi R}$$

である。

この方程式に基づいて、格子点法と有限要素法で、数値実験を行ったところ、室内実験と同様に、主流が定常安定から、乱流安定状態を経て、カオス的転移に遷移することが確認出来た<sup>8, 9</sup>。しかも、パラメーター固定の長時間実験を行うと、これまた室内実験と同様の、カオスレジームと乱流安定レジームの繰り返しという「Sensitivity」が見られた。しかしながら、これらのモデルは、ポアソン方程式を緩和法で解くプロセスを含んでおり、計算誤差の検討が難しいので、新たに、この実験装置に適合した特殊なスペクトル法によるモデルを構築し、自由度を段階的に増加させながら、自由度の大小と振る舞いの特徴の関係を検討してみることにした。

### 3. 2次元スペクトル・モデル

閉ループ内はループに沿ってサイクリックなので、流線関数と温度を

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (Y_n \cos n\theta + Z_n \sin n\theta) \\ T &= -\sin \theta + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta) \end{aligned}$$

のように、アニュラーモード  $(X, C_0)$  とサイン・コサインモードに展開してフーリエ変換を行うと、流線関数モードに関して

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} Y_{A,n} \\ Z_{A,n} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \begin{pmatrix} YV_{A,n} \\ ZV_{A,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} YB_{A,n} \\ ZB_{A,n} \end{pmatrix} + e^i \begin{pmatrix} YAD_{A,n} \\ ZAD_{A,n} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (n^* = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ (n^* = 1, 2, 3, \dots) \end{matrix}$$

where

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_{A,n} \\ Z_{A,n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \ddot{Y}_n \\ \ddot{Z}_n \end{pmatrix} + e^i \begin{pmatrix} \dot{Y}_n \\ \dot{Z}_n \end{pmatrix} - e^i n^2 \begin{pmatrix} Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} YV_{A,n} \\ ZV_{A,n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \ddot{Y}_n \\ \ddot{Z}_n \end{pmatrix} + 2e^i \begin{pmatrix} \ddot{Y}_n \\ \ddot{Z}_n \end{pmatrix} - e^i (1 + 2n^2) \begin{pmatrix} Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} + e^i (1 + 2n^2) \begin{pmatrix} \dot{Y}_n \\ \dot{Z}_n \end{pmatrix} - e^i (4n^2 - n^4) \begin{pmatrix} Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} YB_{A,n} \\ ZB_{A,n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{C}_0 \delta_{n1} \\ \frac{\varepsilon}{2} \delta_{n2} \end{pmatrix} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \begin{matrix} CCC(n, 1, n^*) \dot{C}_m \\ SCS(n, 1, n^*) \dot{S}_m \end{matrix} \right] + e^i \begin{pmatrix} SSC(n, 1, n^*) C_m \\ -SCS(n, 1, n^*) S_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} YAD_{A,n} \\ ZAD_{A,n} \end{pmatrix} &= n^* \begin{pmatrix} -\ddot{Z}_n - e^i \dot{Z}_n - e^i (1 - n^2) Z_n & e Z_n & Z_n \\ \ddot{Y}_n + e^i \dot{Y}_n + e^i (1 - n^2) Y_n & -e Y_n & -Y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Y}_n \\ \dot{Z}_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} n' \begin{pmatrix} CCC_{m,n'} \\ CSS_{m,n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^i n' Z_n & -[\ddot{Z}_n + e^i \dot{Z}_n + e^i (1 + n'^2 - n^2) Z_n] & e Z_n & Z_n \\ -2e^i n' Y_n & [\ddot{Y}_n + e^i \dot{Y}_n + e^i (1 + n'^2 - n^2) Y_n] & -e Y_n & -Y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Y}_n \\ \dot{Z}_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} n' \begin{pmatrix} SSC_{m,n'} \\ SCS_{m,n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^i n' Y_n & [\ddot{Y}_n + e^i \dot{Y}_n + e^i (1 + n'^2 - n^2) Y_n] & -e Y_n & -Y_n \\ -2e^i n' Z_n & -[\ddot{Z}_n + e^i \dot{Z}_n + e^i (1 + n'^2 - n^2) Z_n] & e Z_n & Z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Z}_n \\ \dot{Y}_n \\ Z_n \\ Y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

の式が得られる。ただし、 $\dot{F} \equiv \frac{dF}{dt}$  である。

また温度モードに関して、

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} C_n \\ S_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{Pr} \sqrt{Gr}} \begin{pmatrix} CV_{A,n} \\ SV_{A,n} \end{pmatrix} + e^i \begin{pmatrix} CAD_{A,n} \\ SAD_{A,n} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (n^* = 0, 1, 2, \dots) \\ (n^* = 1, 2, 3, \dots) \end{matrix}$$

where

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} CV_{A,n} \\ SV_{A,n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \ddot{C}_n + e^i \dot{C}_n - e^i n^2 C_n \\ e^i \delta_{n1} + \ddot{S}_n + e^i \dot{S}_n - e^i n^2 S_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} CAD_{A,n} \\ SAD_{A,n} \end{pmatrix} &= n^* \begin{pmatrix} \delta_{n1} - S_n & Z_n \\ C_n & -Y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{C}_0 \end{pmatrix} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} CCC(n, 1, n^*) \dot{Y}_m \\ SCS(n, 1, n^*) \dot{Z}_m \end{pmatrix} \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} n' \begin{pmatrix} CCC(n, n', n^*) \\ CSS(n, n', n^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -S_n & Z_n \\ C_n & -Y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Y}_n \\ \dot{Z}_n \end{pmatrix} \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} n' \begin{pmatrix} SSC(n, n', n^*) \\ SCS(n, n', n^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n & -Y_n \\ -S_n & Z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Z}_n \\ \dot{Y}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

ところで、 $r$ 方向の境界条件として、 $r = \pm \pi/2$  で粘着条件および、管壁温度が鉛直下方向に線形に変化するとして、

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \psi = 0, \quad T = -\sin \theta$$

とする。この境界条件を満たすように、次のような特殊なモードで展開する。すなわち、

$$X = \sum_{m=1} Q C_{0m} f_m, \quad Y_n = \sum_{m=2} Q C_{nm} g_m, \quad Z_n = \sum_{m=2} Q S_{nm} g_m$$

$$C_0 = \sum_{m=1} T C_{0m} h_m, \quad C_n = \sum_{m=1} T C_{nm} h_m, \quad S_n = \sum_{m=1} T S_{nm} h_m,$$

where

$$f_m = \sin r, \cos 2r, \sin 3r, \cos 4r, \sin 5r, \cos 6r, \dots$$

$$g_m = (1 + \cos 2r), (\sin r + \sin 3r), (\cos 2r + \cos 4r), (\sin 3r + \sin 5r), \dots$$

$$h_m = \cos r, \sin 2r, \cos 3r, \sin 4r, \cos 5r, \sin 6r, \dots$$

流線関数の軸対称モード X の半径方向の波数は Sin モードでは奇数のみ、Cos モードでは偶数のみという特徴がある。また、流線関数の非軸対称モード Y<sub>n</sub>, Z<sub>n</sub> の半径方向のモードは、Sin、Cos 関数の合成モードであり、その波数は Sin モードが奇数のみ、Cos モードが偶数のみという特徴がある。さらに、温度モード、C<sub>n</sub>, S<sub>n</sub> の半径方向モードの波数は Sin モードでは偶数のみ、Cos モードでは奇数のみという特徴がある。

そして、これらの振幅関数 QC<sub>0m</sub>, QC<sub>nm</sub>, QS<sub>nm</sub>, TC<sub>0m</sub>, TC<sub>nm</sub>, TS<sub>nm</sub> に関し連立常微分方程式形を構成したものが我々のスペクトル・モデルである。ただし、アスペクト比 a/R が十分小さいとして、

$$e \equiv \varepsilon / (1 + \varepsilon r) \equiv \varepsilon \ll 1 \quad \text{の近似を使っている。}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q C_{0k} = -\frac{k^{n^2}}{\sqrt{Gr}} Q C_{0k} - (-1)^k \frac{TC_{1k}}{2k^{n^2}} + \frac{\varepsilon}{k^{n^2}} \sum_{n=1} n X A D_{nk}$$

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_{n^*,k^*} \cdot \begin{pmatrix} Q B_{n^*,k^*-2} \\ Q B_{n^*,k^*} \\ Q B_{n^*,k^*+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{Gr}} A V_{n^*,k^*} + A B_{n^*,k^*} - \frac{\varepsilon}{2} A A D_{n^*,k^*},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} T C_{n^*,j^*} \\ T S_{n^*,j^*} \\ T S_{n^*,j^*} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\text{Pr} \sqrt{Gr}} \begin{pmatrix} (j^2 + \varepsilon^2 n^{n^2}) T C_{n^*,j^*} \\ (j^2 + \varepsilon^2 n^{n^2}) T C_{n^*,j^*} \\ (j^2 + \varepsilon^2 n^{n^2}) T S_{n^*,j^*} - \frac{4\varepsilon^2 \delta_{n^*,j^*}}{i^{n^*} \pi} \\ (j^2 + \varepsilon^2 n^{n^2}) T S_{n^*,j^*} \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} C A D_{n^*,j^*} \\ C A D_{n^*,j^*} \\ S A D_{n^*,j^*} + \\ S A D_{n^*,j^*} \end{pmatrix}$$

where  $k^n = i^n (\text{odd}), j^n (\text{even})$ ,

$$\begin{pmatrix} X A D_{n^*} \\ X A D_{j^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=2} \sum_{i=2} G G S(j, j^*, i^n) Q Q_{i,j} + \sum_{i=3} \sum_{i=3} G G S(i, i^*, i^n) Q Q_{i,i} \\ \sum_{j=2} \sum_{i=3} G G C(i, j^*, i^n) Q Q_{i,j} + \sum_{i=3} \sum_{j=2} G G C(j, i^*, i^n) Q Q_{i,j} \end{pmatrix},$$

and  $Q Q_{n^*,k^*} \equiv Q S_{n^*} Q C_{n^*} - Q C_{n^*} Q S_{n^*}$

$$\mathbf{A}_{n^*,k^*} \equiv \begin{pmatrix} (k^{n^*} - 2)^2 + \varepsilon^2 n^{n^2} \\ (k^{n^*} - 2)^2 + k^{n^2} + 2\varepsilon^2 n^{n^2} \\ k^{n^2} + \varepsilon^2 n^{n^2} \end{pmatrix}, \quad Q B \equiv \begin{pmatrix} Q C \\ Q S \end{pmatrix},$$

$$A V_{n^*,k^*} \equiv \begin{pmatrix} Y V_{n^*,k^*} \\ Z V_{n^*,k^*} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q C_{n^*,k^*-2} & Q C_{n^*,k^*} & Q C_{n^*,k^*+2} \\ Q S_{n^*,k^*-2} & Q S_{n^*,k^*} & Q S_{n^*,k^*+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N1_{n^*,k^*} \\ N2_{n^*,k^*} \\ N3_{n^*,k^*} \end{pmatrix}$$

where  $k^n = i^n, j^n$ , see Appendix for N1, 2, 3.

$$A B_{n^*,k^*} \equiv \begin{pmatrix} Y B_{n^*,k^*} \\ Z B_{n^*,k^*} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} T C_{0k^*-2} (k^{n^*} - 2) + T C_{0k^*} k^{n^*} \\ 0 \end{pmatrix} (-1)^{k^*} \delta_{k^*} \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=1} \begin{pmatrix} (T C_{nk^*-2} (k^{n^*} - 2) + T C_{nk^*} k^{n^*}) (-1)^{k^*} C C C (n, 1, n^*) \\ (T S_{nk^*-2} (k^{n^*} - 2) + T S_{nk^*} k^{n^*}) (-1)^{k^*} S C S (n, 1, n^*) \end{pmatrix},$$

where  $k^n = i^n (\geq 3), j^n (\geq 2)$

$$A A D_{n^*,k^*} \equiv \begin{pmatrix} Y A D_{n^*,k^*} \\ Z A D_{n^*,k^*} \end{pmatrix} \equiv n^{n^*} \begin{pmatrix} X Z Z X_{n^*,k^*} \\ -X Y Y X_{n^*,k^*} \end{pmatrix} \\ + 2 \sum_{n=1} \sum_{n=1} \begin{pmatrix} n^i Y Z Z Y_{n^*,k^*} C C C_{n,n^*,n^*} - n^i Z Y Y Z_{n^*,k^*} S S C_{n,n^*,n^*} \\ -n^i Y Y Y Y_{n^*,k^*} C S S_{n,n^*,n^*} + n^i Z Z Z Z_{n^*,k^*} S C S_{n,n^*,n^*} \end{pmatrix}$$

where  $k^n = i^n (\geq 3), j^n (\geq 2)$

$$\begin{pmatrix} X Z Z X_{n^*,j^*} \\ X Y Y X_{n^*,j^*} \\ X Z Z X_{n^*,j^*} \\ X Y Y X_{n^*,j^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{j=2} \sum_{i=3} X_i Q S_{n^*,j^*} N R I_{n^*,j^*,j^*} \\ -\sum_{j=2} \sum_{i=3} X_i Q C_{n^*,j^*} N R I_{n^*,j^*,j^*} \\ -\sum_{j=2} \sum_{i=3} X_i Q S_{n^*,j^*} N R I_{n^*,j^*,j^*} \\ -\sum_{j=2} \sum_{i=3} X_i Q C_{n^*,j^*} N R I_{n^*,j^*,j^*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=2} \sum_{i=3} X_i Q S_{n^*,j^*} N R I_{n^*,j^*,j^*} \\ \sum_{j=2} \sum_{i=3} X_i Q C_{n^*,j^*} N R I_{n^*,j^*,j^*} \\ \sum_{j=2} \sum_{i=3} X_i Q S_{n^*,j^*} N R I_{n^*,j^*,j^*} \\ \sum_{j=2} \sum_{i=3} X_i Q C_{n^*,j^*} N R I_{n^*,j^*,j^*} \end{pmatrix}$$

where see Appendix for NRI, NRI

$$\begin{pmatrix} Y Z Z Y_{n^*,j^*} \\ Y Y Y Y_{n^*,j^*} \\ Z Y Y Z_{n^*,j^*} \\ Z Z Z Z_{n^*,j^*} \end{pmatrix} = \sum_{j=2} \sum_{j=2} \begin{pmatrix} Q C_{n^*} Q S_{n^*,j^*} \\ Q C_{n^*} Q C_{n^*,j^*} \\ Q S_{n^*} Q C_{n^*,j^*} \\ Q S_{n^*} Q S_{n^*,j^*} \end{pmatrix} N Q_{n^*,j^*,j^*} - \sum_{i=3} \sum_{i=3} \begin{pmatrix} Q C_{n^*} Q S_{n^*,i^*} \\ Q C_{n^*} Q C_{n^*,i^*} \\ Q S_{n^*} Q C_{n^*,i^*} \\ Q S_{n^*} Q S_{n^*,i^*} \end{pmatrix} N Q_{n^*,i^*,i^*},$$

where see Appendix for NQ

$$\begin{pmatrix} Y Z Z Y_{n^*,j^*} \\ Y Y Y Y_{n^*,j^*} \\ Z Y Y Z_{n^*,j^*} \\ Z Z Z Z_{n^*,j^*} \end{pmatrix} = \sum_{j=2} \sum_{i=3} \begin{pmatrix} Q C_{n^*} Q S_{n^*,i^*} \\ Q C_{n^*} Q C_{n^*,i^*} \\ Q S_{n^*} Q C_{n^*,i^*} \\ Q S_{n^*} Q S_{n^*,i^*} \end{pmatrix} N Q_{n^*,j^*,i^*} - \sum_{i=3} \sum_{j=2} \begin{pmatrix} Q C_{n^*} Q S_{n^*,j^*} \\ Q C_{n^*} Q C_{n^*,j^*} \\ Q S_{n^*} Q C_{n^*,j^*} \\ Q S_{n^*} Q S_{n^*,j^*} \end{pmatrix} N Q_{n^*,i^*,j^*},$$

where see Appendix for NQ

$$\begin{pmatrix} C A D_{n^*,j^*} \\ C A D_{n^*,j^*} \\ S A D_{n^*,j^*} \\ S A D_{n^*,j^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^{n^*} Q C_{0,j^*} \delta_{n^*,j^*} + 2n^{n^*} X S Z C_{n^*,j^*} + 4Q C Q C_{n^*,j^*} + 4Y S Z C_{n^*,j^*} - 4Z C Y S_{n^*,j^*} \\ j^{n^*} Q C_{0,j^*} \delta_{n^*,j^*} + 2n^{n^*} X S Z C_{n^*,j^*} + 4Q C Q C_{n^*,j^*} + 4Y S Z C_{n^*,j^*} - 4Z C Y S_{n^*,j^*} \\ -2n^{n^*} X C Y C_{n^*,j^*} + 4Q S Q S_{n^*,j^*} - 4Y C Y C_{n^*,j^*} + 4Z S Z S_{n^*,j^*} \\ -2n^{n^*} X C Y C_{n^*,j^*} + 4Q S Q S_{n^*,j^*} - 4Y C Y C_{n^*,j^*} + 4Z S Z S_{n^*,j^*} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X S Z C_{n^*,j^*} \\ X S Z C_{n^*,j^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X T Q C_{n^*,j^*} (T S, Q S) \\ X T Q C_{n^*,j^*} (T S, Q S) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} X C Y C_{n^*,j^*} \\ X C Y C_{n^*,j^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X T Q C_{n^*,j^*} (T C, Q C) \\ X T Q C_{n^*,j^*} (T C, Q C) \end{pmatrix},$$

where

$$\begin{pmatrix} X T Q C_{n^*,j^*} (T T, Q Q) \\ X T Q C_{n^*,j^*} (T T, Q Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1} \sum_{i=1} \\ \sum_{i=1} \sum_{i=1} \end{pmatrix} [i X_i \begin{pmatrix} T T_{n^*,j^*} R C C C_{i,j^*} \\ T T_{n^*,j^*} R C S S_{i,j^*} \end{pmatrix} + Q Q_{n^*,j^*} \begin{pmatrix} i T C_{0,j^*} (R S S C_{-2,j^*,j^*} + R S S C_{i,j^*,j^*}) \\ -j T C_{0,j^*} (R S C S_{-2,j^*,j^*} + R S C S_{i,j^*,j^*}) \end{pmatrix}] \\ - \begin{pmatrix} \sum_{i=1} \sum_{i=1} \\ \sum_{i=1} \sum_{i=1} \end{pmatrix} [i X_i \begin{pmatrix} T T_{n^*,j^*} R S S C_{i,j^*} \\ T T_{n^*,j^*} R S C S_{i,j^*} \end{pmatrix} + Q Q_{n^*,j^*} \begin{pmatrix} j T C_{0,j^*} (R C C C_{-2,j^*,j^*} + R C C C_{i,j^*,j^*}) \\ -j T C_{0,j^*} (R C S S_{-2,j^*,j^*} + R C S S_{i,j^*,j^*}) \end{pmatrix}]$$

$$\begin{pmatrix} Q C Q C_{n^*,j^*} \\ Q C Q C_{n^*,j^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q Q_{n^*,j^*} (Q C, C C C) \\ Q Q_{n^*,j^*} (Q C, C C C) \end{pmatrix} (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \begin{pmatrix} Q S Q S_{n^*,j^*} \\ Q S Q S_{n^*,j^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q Q_{n^*,j^*} (Q S, S C S) \\ Q Q_{n^*,j^*} (Q S, S C S) \end{pmatrix}$$

where

$$\begin{pmatrix} Q Q_{n^*,j^*} (Q Q, T R I) \\ Q Q_{n^*,j^*} (Q Q, T R I) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{i=1} \begin{pmatrix} -i^{n^*} (Q Q_{n^*,i^*} + Q Q_{n^*}) \\ j^{n^*} (Q Q_{n^*,i^*} + Q Q_{n^*}) \end{pmatrix} T R I (n, 1, n^*)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} YZC_{r,r} \\ YZC_{s,r} \\ ZCY_{r,r} \\ ZCY_{s,r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} YZ_{r,r}(TS,TC,QC,CS,CCC) \\ YZ_{r,r}(TS,TC,QC,CS,CCC) \\ YZ_{r,r}(TS,TC,QC,CS,SSC) \\ YZ_{r,r}(TS,TC,QC,CS,SSC) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} YCY_{r,r} \\ YCY_{s,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} YZ_{r,r}(TC,TS,QC,CS) \\ YZ_{r,r}(TC,TS,QC,CS) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ZCY_{r,r} \\ ZCY_{s,r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} YZ_{r,r}(TC,TS,QC,SSC) \\ YZ_{r,r}(TC,TS,QC,SSC) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ZSZ_{r,r} \\ ZSZ_{s,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} YZ_{r,r}(TS,TC,QC,SSC) \\ YZ_{r,r}(TS,TC,QC,SSC) \end{pmatrix} \\ \text{where} \\ YZ_{r,r}(T_1, T_2, Q_1, Q_2, TR) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nTR(n, m, n^2) \\ YZ_{r,r}(T_1, T_2, Q_1, Q_2, TR) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nTR(n, m, n^2) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{T_{r,r}(-j-2)RSCC_{r,r,r} - jRSCC_{r,r,r}}{T_{r,r}(-j-2)RSCS_{r,r,r} - jRSCS_{r,r,r}} \right) - Q_{r,r} \left( \frac{T_{r,r}(j'RCCC_{r,r,r} + j'RCCC_{r,r,r})}{T_{r,r}(-j'RCCS_{r,r,r} - j'RCCS_{r,r,r})} \right) \right] \right] \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{T_{r,r}((j-2)RCCC_{r,r,r} + jRCCC_{r,r,r})}{T_{r,r}((j-2)RCCS_{r,r,r} + jRCCS_{r,r,r})} \right) - Q_{r,r} \left( \frac{T_{r,r}(-j'RSCC_{r,r,r} - j'RSCC_{r,r,r})}{T_{r,r}(j'RSCS_{r,r,r} + j'RSCS_{r,r,r})} \right) \right] \right] \end{aligned}$$

各モードの直交性が通常のフーリエ変換のスペクトル・モデルと異なるため、必要な数表を作成して、プログラムに組み込んだ。

#### 4. 小自由度(3変数)モデル

モードを  $QC_{01}$ ,  $TC_{01}$ ,  $TC_{11}$ ,  $TS_{11}$  のみという最低次の4変数に制限したときには

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} QC_{01} &= \frac{-1}{\sqrt{Gr}} QC_{01} + \frac{TC_{11}}{2} \\ \frac{\partial}{\partial t} TC_{01} &= \frac{-1}{Pr\sqrt{Gr}} TC_{01} \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} TC_{11} \\ TS_{11} \end{pmatrix} &= \frac{-1}{Pr\sqrt{Gr}} \begin{pmatrix} (1+\varepsilon^2)TC_{11} \\ (1+\varepsilon^2)TS_{11} - \frac{4\varepsilon^2}{\pi} \end{pmatrix} + \varepsilon QC_{01} \begin{pmatrix} 1 - \frac{8}{3\pi} TS_{11} \\ \frac{8}{3\pi} TC_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。 $QC_{01}$ は流線関数のアンギュラー・モードの振幅であり、その時間発展には、移流項の貢献が存在せず、粘性項と浮力項のみが存在する。 $TC_{01}$ の式には粘性項のみが存在し、他の項とは独立して、指数関数的に減衰するのみである。 $TC_{11}$ ,  $TS_{11}$ の時間発展には粘性項のみならず移流項の貢献がある。定常解は二種類存在し、非主流解

$$TC_{01s} = 0, \quad QC_{01s} = 0, \quad TC_{11s} = 0, \quad TS_{11s} = \frac{4\varepsilon^2}{\pi(1+\varepsilon^2)}$$

と

$$\varepsilon Gr > \frac{1}{1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)}} \frac{2(1+\varepsilon^2)}{Pr} \cong \frac{2}{Pr}$$

の時、主流解

$$\begin{aligned} QC_{01s} &= \pm \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon Pr} \sqrt{1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)}} - \frac{2(1+\varepsilon^2)}{Pr\varepsilon Gr}} \\ &\cong \pm \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon Pr} \sqrt{1 - \frac{2}{Pr\varepsilon Gr}}} \end{aligned}$$

$$TC_{01s} = 0, \quad TC_{11s} = \frac{2}{\sqrt{Gr}} QC_{01s}$$

$$TS_{11s} = \frac{3\pi}{8} \left(1 - \frac{2(1+\varepsilon^2)}{Pr\varepsilon Gr}\right) \cong \frac{3\pi}{8} \left(1 - \frac{2}{Pr\varepsilon Gr}\right)$$

である。この主流解が存在するためには、 $TC_{11}$ の時間発展の移流項に線形項  $\varepsilon QC_{01}$  が存在することが不可欠である。この項は閉ループの下部加熱・上部冷却という境界条件を表現している

$-\sin\theta$  モードの移流効果に対応している。この定常解の温度分布の一例を示したのが、Fig.5である。反時計回りの主流によって、ループ下部で熱せられた高温部がループ上部に移流されて、冷却部の中に深く貫入している様子が見取れる。主流解が存在するための条件は、動作流体として水を想定した  $Pr=6$  の場合、

$$\varepsilon Gr > \frac{2}{Pr} = \frac{1}{3}$$

である。しかしながら、有次元量で書き直すと

$$\frac{(T_h - T_c)}{2} > \frac{2}{\beta g C \rho^2 \varepsilon^4 R^3} \lambda \mu$$

なので、全体的に大きくて相対的に太いループの中に熱伝導性が悪くて粘性の低い流体を封入すればするほど、小さい温度差で主流を生じさせることができることを示している。

また、上下温度差モードの振幅  $TS_{11s}$  を示す式は、 $\varepsilon < 1$  の時、3種の無次元パラメータが全部縮退して、それらの積  $Pr\varepsilon Gr$  に対してゼロから単調増加傾向であるが、上限値が存在し、それは

$$\frac{3\pi}{8} \cong 1.178$$

である。ループ上部中心では、境界条件モードの値が  $-1$  なので、ループ上部中心の無次元温度は  $1.178 - 1 = 0.178$  を超えることはないことを示している。しかし、これは、冷却部であるループ上部中心温度が加熱部であるループ下部中心で温度より高温であることを示している。ループ中心部での上下温度差の正負が逆転する条件、すなわち、 $TS_{11}$  の値が1となる境界は、 $Pr=6$  の場合、

$$\varepsilon Gr = \frac{1}{1 - \frac{8}{3\pi}} \frac{2}{Pr} \cong 2.205$$

高温の流体塊が冷却部に貫入することによって、ループの半径方向に大きな温度勾配が存在することがこの実験装置の特徴のひとつである。

また、ループに沿った主流の全流量の半分を表わすループ外壁における流線関数の値も  $\varepsilon Gr$  に対してゼロから単調増加傾向であるが、上限値が存在し、それは

$$\frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon Pr} \sqrt{1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)}}} \cong \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon Pr}}$$

すなわち、粘性が高く、熱伝導性が悪く、ループ形状が相対的に太いほどその上限値は低く抑えられる。

ループの左右温度差モードの振幅  $TC_{11}$  は、主流量  $QC_{01}$  に比例する。すなわち、

$$\begin{aligned} TC_{11s} &= \frac{2}{\sqrt{Gr}} QC_{01s} = \pm \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{2(1+\varepsilon^2)}{Pr\varepsilon Gr} \sqrt{1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)}} - \frac{2(1+\varepsilon^2)}{Pr\varepsilon Gr}} \\ &\cong \pm \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{2}{Pr\varepsilon Gr} \left(1 - \frac{2}{Pr\varepsilon Gr}\right)} \end{aligned}$$

$\varepsilon < 1$  の時、ここでも3種の無次元パラメータが全部縮退して、それらの積  $Pr\varepsilon Gr$  の関数となっている。この式の平方根の中は単調増加関数と単調減少関数の積となっており、 $Pr\varepsilon Gr$  は2以上であり、4の時最大値1/4をとって、その後単調減少し、0に収束する。0に収束する理由として、この対流実験装置の形状が閉じていることが重要である。温度分布の舌状の貫入が進むことによって結果的に左右の温度差が解消されてゆく。

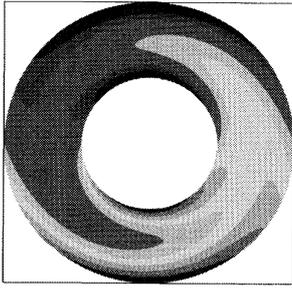


Fig.5 定常解の温度分布

続いて、それぞれの定常解に対して、線形不安定性を調査する。まずは、非主流解に関して、線形化方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} QC'_{01} \\ TC'_{11} \\ TS'_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{Gr}} & \frac{1}{2} & 0 \\ \varepsilon A & \frac{-(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QC'_{01} \\ TC'_{11} \\ TS'_{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{where } A = 1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)}$$

$$QC'_{01} = Xe^{-i\omega t}, \quad TC'_{11} = Ye^{-i\omega t}, \quad TS'_{11} = Ze^{-i\omega t}$$

を代入して

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{Gr}} + i\omega & \frac{1}{2} & 0 \\ \varepsilon A & \frac{-(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} + i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} + i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QC'_{01} \\ TC'_{11} \\ TS'_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

自明で無い解を持つためには、行列式=0より、

$$\left( \frac{-(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} + i\omega, -\omega \right) \left( \frac{-1}{\sqrt{Gr}} + i\omega, -\omega \right) \left( \frac{-(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} + i\omega, -\omega \right) - \frac{\varepsilon A}{2} = 0$$

この式は2種類の解を持ち、一方は、

$$\omega_r = 0, \quad \omega_i = \frac{-(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}},$$

すなわち、常に安定である。他方の解は、

$$\left( \frac{-1}{\sqrt{Gr}} + i\omega, -\omega \right) \left( \frac{-(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} + i\omega, -\omega \right) - \frac{\varepsilon A}{2} = 0,$$

すなわち、

$$\left[ \omega^2 + \omega_i^2 + \omega_r \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}} + 1 \right) + \frac{(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} - \frac{\varepsilon A}{2} \right] - i\omega_r \left[ 2\omega_r + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}} + 1 \right) \right]$$

の解である。ここにも2種類の解が存在し、一方は、

$$\omega_r = -\frac{1}{2\sqrt{Gr}} \left( \frac{(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}} + 1 \right), \quad \omega_i = \pm \sqrt{\frac{1}{4Gr} \left( 1 - \frac{(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left( 1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)} \right)}$$

やはり、常に安定である。他方の解は、

$$\omega_r = 0, \quad \text{and } f(\omega) = \omega^2 + \omega_i \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}} + 1 \right) + \frac{(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} - \frac{\varepsilon}{2} \left( 1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)} \right) = 0$$

の解であり、 $\omega_i > 0$ の実数解を持つ条件は

$$f(0) = \frac{(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} - \frac{\varepsilon}{2} \left( 1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)} \right) < 0,$$

すなわち、

$$\varepsilon Gr > \frac{1}{\left( 1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)} \right)} \frac{2(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}} \cong \frac{2}{\text{Pr}}$$

である。こうして、主流解が存在する条件が満たされると同時に、非主流解は不安定化する事がわかる。

続いて、主流解の安定性を調査する。すなわち、主流解に対して、線形化方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} QC'_{01} \\ TC'_{11} \\ TS'_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{Gr}} & \frac{1}{2} & 0 \\ \varepsilon \left( 1 - \frac{8}{3\pi} TS'_{11} \right) & \frac{-(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} & -\frac{8\varepsilon QC'_{01}}{3\pi} \\ \frac{8\varepsilon}{3\pi} TC'_{11} & \frac{8\varepsilon QC'_{01}}{3\pi} & \frac{-(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QC'_{01} \\ TC'_{11} \\ TS'_{11} \end{pmatrix}$$

$$QC'_{01} = Xe^{-i\omega t}, \quad TC'_{11} = Ye^{-i\omega t}, \quad TS'_{11} = Ze^{-i\omega t}$$

を代入して、

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{Gr}} + i\omega & \frac{1}{2} & 0 \\ \varepsilon \left( 1 - \frac{8}{3\pi} TS'_{11} \right) & \frac{-(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} + i\omega & -\frac{8\varepsilon QC'_{01}}{3\pi} \\ \frac{8\varepsilon}{3\pi} TC'_{11} & \frac{8\varepsilon QC'_{01}}{3\pi} & \frac{-(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} + i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QC'_{01} \\ TC'_{11} \\ TS'_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

自明で無い解を持つためには、行列式=0より、

$$\left( \frac{-1}{\sqrt{Gr}} + i\omega \right) (-B + i\omega) (-B + i\omega) - \frac{1}{2} \left( \frac{8\varepsilon}{3\pi} \right)^2 TC'_{11} QC'_{01} + \left( \frac{-1}{\sqrt{Gr}} + i\omega \right) \left( \frac{8\varepsilon}{3\pi} \right)^2 QC'_{01}^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \left( 1 - \frac{8}{3\pi} TS'_{11} \right) (-B + i\omega) = 0,$$

where

$$QC'_{01}^2 = \frac{3\pi}{8} \frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon \text{Pr}} C, \quad TS'_{11} = \frac{3\pi}{8} \left( 1 - \frac{2(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\varepsilon Gr} \right), \quad TC'_{11} = \frac{2}{\sqrt{Gr}} QC'_{01},$$

$$C \equiv 1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)} - \frac{2(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\varepsilon Gr}, \quad B \equiv \frac{(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}}$$

従って、

$$\left( \frac{-1}{\sqrt{Gr}} + i\omega \right) (-B + i\omega) (-B + i\omega) + \left( \frac{-2}{\sqrt{Gr}} + i\omega \right) \frac{\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{2\text{Pr}} C - \frac{(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} (-B + i\omega) = 0$$

すなわち、

$$-i\omega^3 + H\omega^2 + i\omega F - G = 0,$$

where

$$F \equiv \frac{\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{2\text{Pr}} \left( 1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)} + \frac{2}{\varepsilon Gr} \right)$$

$$G \equiv \frac{\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{Gr}} \left[ 1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)} - \frac{2(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\varepsilon Gr} \right]$$

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( 1 + 2 \frac{(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}} \right)$$

$\omega$  に  $\omega_r + i\omega_i$  を代入して、

$$-i(\omega_r + i\omega_i)^3 + H(\omega_r + i\omega_i)^2 + i(\omega_r + i\omega_i)F - G = 0,$$

すなわち、

$$[(3\omega_r^2 - \omega_i^2)\omega_r + H(\omega_r^2 - \omega_i^2) - F\omega_r - G] + i\omega_r[(-\omega_r^2 + 3\omega_i^2) + 2H\omega_r + F] = 0.$$

虚数部=0 より、

$$\omega_r[-\omega_r^2 + 3\omega_i^2 + 2H\omega_r + F] = 0,$$

この方程式には二種の解が有り、一方は

$$\omega_r = 0 \text{ の時、実数部=0 より、}$$

$$g(\omega_i) \equiv \omega_i^3 + H\omega_i^2 + F\omega_i + G = 0$$

これが正の実数解を持つための条件は  $g(0) < 0$

すなわち、

$$\varepsilon Gr < \frac{1}{1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)}} \frac{2(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}}$$

しかしながら、今は主流解が存在する前提なので、

$$\varepsilon Gr > \frac{1}{1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)}} \frac{2(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}}$$

従って、不安定解は存在しない。

では、他方の解は

$$\omega_r^2 = +3\omega_i^2 + 2H\omega_r + F$$

であり、その時、実数部=0 より、

$$[(3\omega_r^2 - \omega_i^2)\omega_r + H(\omega_r^2 - \omega_i^2) - F\omega_r - G] = 0.$$

すなわち、

$$f(\omega_i) \equiv 8\omega_i^3 + 8H\omega_i^2 + 2(F + H^2)\omega_i + (HF - G) = 0$$

中立曲線は、 $f(0) = 0$ 、すなわち、

$$HF - G = 0$$

すなわち、

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \left[ 1 + 2 \frac{(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}} \frac{\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{2\text{Pr}} \left( 1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)} + \frac{2}{\varepsilon G} \right) - \frac{\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\sqrt{G}} \left[ 1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)} \frac{2(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}\varepsilon G} \right] \right] = 0$$

すなわち、

$$\frac{2}{\varepsilon Gr} \left[ 1 + \frac{4(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}} \right] = \left[ 1 - \frac{2(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}} \right] \left[ 1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)} \right]$$

すなわち、

$$\varepsilon Gr = \frac{2}{\left[ 1 - \frac{32\varepsilon^2}{3\pi^2(1+\varepsilon^2)} \right] \left[ 1 - \frac{2(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}} \right]} \cong 2 \frac{1 + \frac{4(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}}}{1 - \frac{2(1+\varepsilon^2)}{\text{Pr}}}$$

となり、 $\varepsilon$  と  $Gr$  の積が  $Pr$  の関数と成っているようにいわば縮退しているため、安定性マップは 2 次元で表現される (Fig.6)。すなわち、閉ループのアスペクト比が小さくて過熱部冷却部の温度差が大きい装置は、アスペクト比が大きくて過熱部冷却部の温度差が小さい装置に相当する。

また、この中立曲線は  $1/Pr=1/2$  で漸近線を持ち、粘性が小さく熱伝導性の良い流体では、主流は常に安定である。逆に、粘性が大きく、熱伝導性が悪い流体では、加熱部・冷却部温度差が大きくなると、定常主流解は不安定となる。例えば、水を想定した  $Pr=6$  の場合、 $\varepsilon Gr=1/3$  を超えると、正負の 2 個の定常主流解が存在し、 $\varepsilon Gr=5$  を超えるとその定常主流解は不安定化する。たとえば、反時計回りの定常主流解は、わずかなノイズが存在すると、次第に、その解軌道が定常状態からずれ始め、やがて時計回りの定常主流解付近に移動する、しかし、その状態も不安定であるため、やがて再び、反時計回り状態に戻ってくる事をくりかえす。すなわち、主流のカオス的反転が引き起こされる。

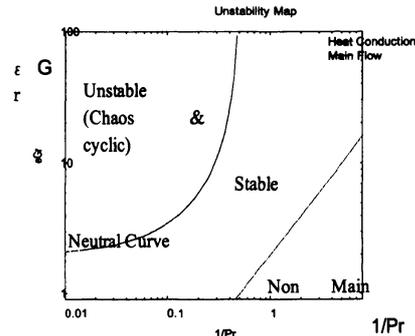


Fig.6 Stability map of 3 variable model

## 5. 数値実験

上述の 2 次元スペクトル・モデルを、トランケーション波数をループの接線方向に  $3M$  半径方向に  $M$  とし、Fortran 言語でコーディングした。トランケーション波数の比が 3 対 1 なのは、空間解像度を接線方向と半径方向に均一にすることを前提とし、ループのアスペクト比 ( $a/R$ ) が  $1/6$  であることに対応している。

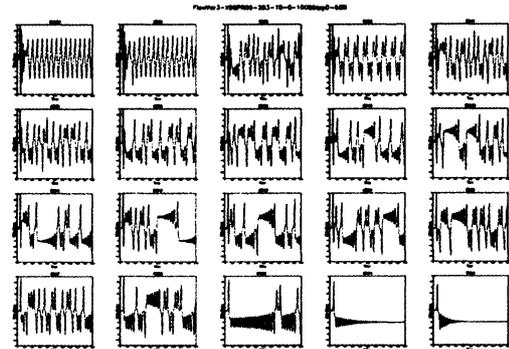


Fig.7 3 変数モデルによる主流の時系列 (横軸は無次元時間)  
図の配置について、第 1 行の左から  $\varepsilon Gr=100,80,60,50,40$ 、第 2 行左から  $\varepsilon Gr=30,25,20,18,16$ 、第 3 行左から  $\varepsilon Gr=14,12,10,9,8$ 、第 4 行左から  $\varepsilon Gr=7,6,5,4,3$  の順にならべてある。

室内実験ではアスペクト比が 1/20 であるにもかかわらず、1/6 の数値実験を行う理由は、ここでの目的は実験ループ内を再現することよりも、自由度の大小がもたらす効果を調べることにあるからである。自由度を大きくしたときに、計算時間を節約するために、アスペクト比を 1/6 とした。

まずは、最小自由度モデルの例として、あえて自由度を減らし、上記 3 変数モデルを時間発展させてみた。水を想定して、プラントル数  $Pr$  を 6 に固定して、 $\epsilon Gr$  を 3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,16,18,20,25,30,40,50,60,80,100 の 20 通りに変化させた。計算条件は時間刻み幅  $D=1/10$ 、計算終了無次元時刻は 2000 である。初期値はノイズを想定して、すべてのモード（と言っても 3 個）の初期振幅として、 $1.0 \times 10^6$  を選ぶと、Fig.6 のような主流の時系列が得られた。

定常主流の中立曲線 ( $Pr=5$ ) を超えたパラメータ領域からカオス的振る舞いを示し、上記線形不安定理論に完全に一致した。また、 $\epsilon Gr$  が大きいときは、周期的に反転する傾向が有ることわかる。また、3 変数モデルの厳密な定常解から時間発展させると、定常のままではあることは確認してある。

## 6. 大自由度モデル数値実験

自由度が 大きくなると振る舞いはどの様に変化するのだろうか。トランケーション波数を 15:5 (自由度 280) にして、初期値をノイズ (全モードの振幅を  $1 \times 10^6$ ) 計算終了時刻を 10000 まで上げて時間発展させた結果が Fig.8a,b である。

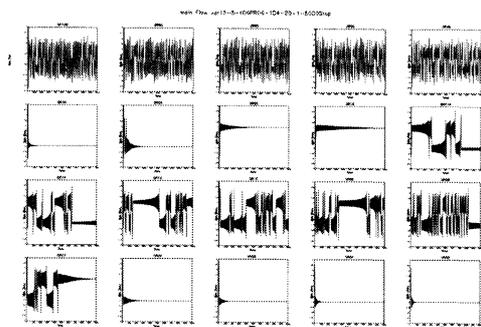


Fig.8a 多自由度モデルによる主流の時系列 (横軸は無次元時間) 図の配置については、Fig.7と同様である。

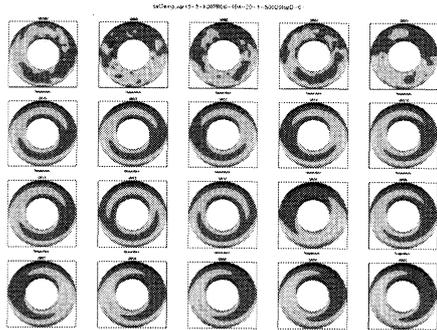


Fig.8b 多自由度モデルによる計算終了時刻における温度分布 図の配置については、Fig.7と同様である。

3 変数モデルの結果とは、いくつかの点で、質的に異なる。まず、主流が不安定となる臨界点は、5 から 7 付近に移動した。また、3 変数モデルではカオス的振る舞いが繰り返されていた、 $\epsilon Gr=18, 20, 25, 30$  の場合に、主流は安定化した。すなわち、2 種類の反転領域の間に安定領域が挟まる形となった。

$\epsilon Gr$  が 8 から 14 までの間の主流の反転は、温度分布を見ると滑らかであり、層流カオス反転と名付けることが出来る。 $\epsilon Gr$  が 40 から 100 までの主流の反転は、温度分布を見ると良く乱れているので、乱流カオス反転と名付けることが出来る。しかも、 $\epsilon Gr$  が 7 の場合は、時間発展の前半は、激しく反転が繰り返されているにもかかわらず、後半では、安定化している。 $\epsilon Gr$  が 16 の場合も、前半は層流カオス反転でありながら、後半では、安定なのか判断に迷うような、Sensitivity が感じられる。初期値依存性が予想されるので、次のようなパラメータ連続変化実験を行った。

## 7. パラメータ連続変化実験

初期条件として、 $\epsilon Gr=1$  の時の 3 変数モデルの定常解を選び、実験条件としての  $\epsilon Gr$  の値を 1 から 100 まで、無次元時間 40000 かけてゆっくりと変化させ続けながら時間発展させた。その時の主流の時系列が Fig.9 のグラフのうち、黒実線である。驚くべきことに  $\epsilon Gr$  が 60 付近まで、主流の反転は見られない。また、安定している主流の大きさは徐々に減少している様子が認められる。この減少は、3 変数モデルでの定常主流解が  $\epsilon Gr$  に対して単調増加関数であったことと矛盾する。すなわち、3 変数モデルには含まれていないモードが主流の安定化に貢献していると考えられる。

さらに、パラメータ固定実験 (Fig.8) と比較すると、層流カオス反転と名付けたパラメータ領域は大きな初期値依存性が有ることがわかった。すなわち、安定状態とはほど遠いノイズ状態の初期値から時間発展させると、層流カオスが発現し、極めて安定な  $\epsilon Gr$  の値の小さい時の 3 変数モデルの定常解から時間発展させると安定状態が発現する。

それでは、 $\epsilon Gr$  の値が 100 の時の 3 変数モデルの定常解という、もうひとつの安定状態とはほど遠い初期値にして、実験条件として、 $\epsilon Gr$  の値を 100 から、やはり無次元時間 40000 かけて、ゆっくりと、1 まで変化させる実験を行った。その結果が Fig.9 のもう一つのグラフ (緑色) である。今度は  $\epsilon Gr$  が 55 付近まで、激しく反転を繰り返し、その後は先の連続 Up 実験を逆にたどるように安定状態を保ったまま推移した。パラメータ固定実験 (Fig.8) での層流カオス反転のパラメータ領域でも安定している事が特徴である。パラメータ連続変化実験が以前の状態を引きずるといふ履歴性を持つものとしたら、パラメータ固定実験 (Fig.8) の 2 種類のカオス反転領域に挟まれた層流安定状態の履歴性が発現したと解釈できる。

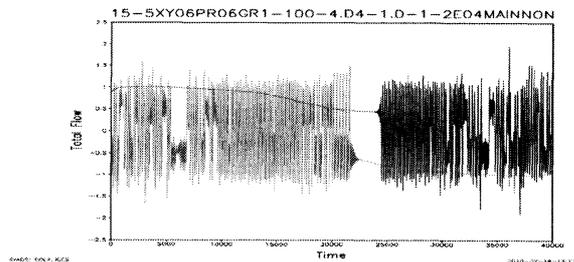


Fig.9 パラメータ連続変化実験における主流の時系列 (横軸は無次元時間 40000 まで)

## 8. 層流安定からの脱出実験

パラメータ固定実験 (Fig.8) で発現した層流カオス反転とパラメータ連続変化実験で発現した層流安定状態という、振る舞いの多重性をさらに確認するために、さらなる実験を行った。

そのためにまず、パラメータ連続変化 Up 実験における、 $\epsilon Gr$  の値が、3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,16,18,20,25,30,40,50,60,80,100 になった瞬間の 20 種の状態を初期状態にして、それらの  $\epsilon Gr$  の値を実験条件にしたパラメータ固定実験を計算終了時刻 2000 まで行い、その安定性を確認した。その結果が、Fig.10 である。

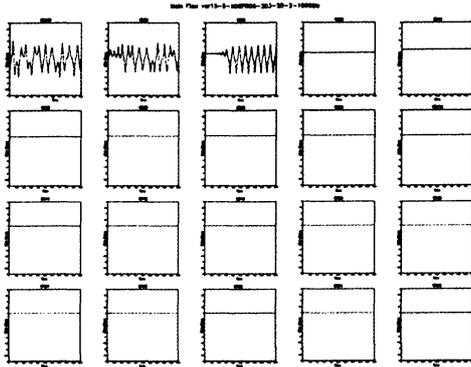


Fig.10 安定性確認実験における主流の時系列 (横軸は無次元時間) 図の配置については、Fig.7と同様である。

パラメータ連続変化実験においても主流が不安定であった、 $\epsilon Gr=100,80,60$  の 3 例を除いて、総て安定であった。

続いて、多重性のもう一方の振る舞いである、層流カオス反転状態に移行させるため、上記、安定性確認実験で使用した 20 種類の初期状態に人為的にノイズを混入させるため、すべてのモードの振幅に一律に  $1.0 \times 10^4$  を加えて無次元時間 2000 までパラメータ固定実験を行った。その結果は、Fig.11 である。

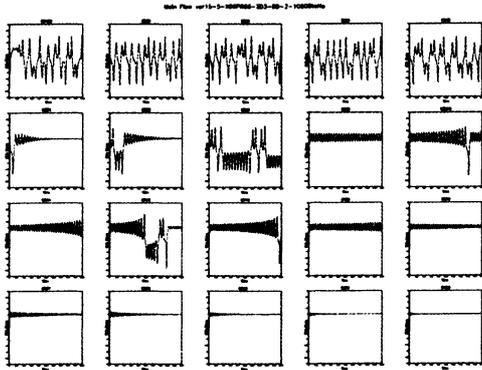


Fig.11 安定からの脱出実験における主流の時系列 (横軸は無次元時間) 図の配置については、Fig.7と同様である。

$\epsilon Gr$  が 40 と 50 の場合、及び、10 から 16 の場合では、カオス的的反転が復活した。 $\epsilon Gr$  が 16 から 30 の場合には、一時的には、カオス的的反転が復活したが、やがて、安定状態に収束していくように見える。

## 9. 最後に

無限自由度とは言えないが、かなり大きな自由度 (15-5 モデルでは 280) を持つ閉ループ内熱対流系において、小自由度系の特徴を持つカオス的振る舞いが、実現されたことの意味は大きい。それを実現するための必要条件はあらゆるモードの成長を平等に許すため、ノイズのみの初期条件で時間発展させることである。

しかしながら、その調査の過程で明らかになった、より重要なことは、以下のとおりである。

1. このカオス的振る舞いは、初期条件に、大きく依存し、同じ実験条件下でも、安定化させる事が可能であること
2. 一旦、実現した小自由度的カオスは、ひたすら長時間の時間発展をさせるうちに、いつかは、定常安定になるという、過渡的現象である可能性が強い。
3. 現実の複雑系の予測可能性が低いのは、初期値依存性が高いからという理由だけではなく、多自由度系は、たくさんの種類の振る舞いの多重性を持っているからであると思われる。
4. 現実の室内実験の長時間パラメータ固定実験で現れた、自発的レジームシフトは、振る舞いの多重性とノイズがもたらす、絶妙な共同作業である可能性が強い。小自由度モデル (3 変数・ローレンツのモデル) の持つカオス的振る舞いは、多自由度系においても、初期条件に強く依存しながら、有限の時間の間でのみ実現可能な過渡的現象であったとしても、理想化された実験条件と制御不能性を内包した現実世界の「ギャップ」に思いを巡らせれば、この過渡的現象こそが、真に「リアル」である可能性がある。すなわち、適当なノイズ (現実世界のノイズであれ、数値計算世界の数値誤差であっても) に曝され、幾種類かの過渡的現象を彷徨い続けているのが「現実」であるかも知れないのである。

Appendix

$$\begin{aligned}
 CCC(n, n', n'') &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos n'\theta \cos n''\theta d\theta \\
 CSS(n, n', n'') &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin n'\theta \sin n''\theta d\theta \\
 SSC(n, n', n'') &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin n'\theta \cos n''\theta d\theta \\
 SCS(n, n', n'') &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos n'\theta \sin n''\theta d\theta \\
 RCCC(k, k', k'') &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(kr) \cos(k'r) \cos(k''r) dr \\
 RCSS(k, k', k'') &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(kr) \sin(k'r) \sin(k''r) dr \\
 RSSC(k, k', k'') &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(kr) \sin(k'r) \cos(k''r) dr \\
 RSCS(k, k', k'') &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(kr) \cos(k'r) \sin(k''r) dr
 \end{aligned}$$

ただし、 $n''=0$  の時は人為的に  $1/2$  をかける。

$$\begin{aligned}
 GGS(j, j', j'') &= R_{j,j',j''}(RSCS, RCSS), \quad GGS(i, i', i'') = R_{i,i',i''}(RCSS, RSCS) \\
 GGC(j, j', j'') &= R_{j,j',j''}(RSSC, RCCC), \quad GGC(i, i', i'') = R_{i,i',i''}(RCCC, RSSC), \\
 \text{where} \\
 R_{k,k',k''}(RT1, RT2) \\
 &\equiv R_{1,k-2,k'-2,k''}(RT1) + R_{1,k-2,k',k''}(RT1) + R_{1,k-2,k',k''}(RT1) + R_{1,k,k',k''}(RT1) \\
 &+ R_{2,k-2,k'-2,k''}(RT2) + R_{2,k-2,k',k''}(RT2) + R_{2,k-2,k',k''}(RT2) + R_{2,k,k',k''}(RT2) \\
 \text{and} \\
 R_{k,k',k''}(RSCS) &\equiv k' k'' RSCS_{k,k',k''}, \quad R_{k,k',k''}(RCSS) \equiv k' RCSS_{k,k',k''} \\
 R_{k,k',k''}(RSCS) &\equiv -k' k'' RCSS_{k,k',k''}, \quad R_{k,k',k''}(RCSS) \equiv -k' RSCS_{k,k',k''} \\
 R_{k,k',k''}(RSSC) &\equiv k' k'' RSSC_{k,k',k''}, \quad R_{k,k',k''}(RCCC) \equiv -k' RCCC_{k,k',k''} \\
 R_{k,k',k''}(RSCS) &\equiv -k' k'' RCCC_{k,k',k''}, \quad R_{k,k',k''}(RCSS) \equiv k' RSSC_{k,k',k''}
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} N1_{n',k'} \\ N2_{n',k'} \\ N3_{n',k'} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (k''-2)^4 + \varepsilon^2(2n''^2+1)(k''-2)^2 + \varepsilon^4(n''^4-4n''^2) \\ k''^4 + (k''-2)^4 + \varepsilon^2(2n''^2+1)(k''^2 + (k''-2)^2) + 2\varepsilon^4(n''^4-4n''^2) \\ k''^4 + \varepsilon^2(2n''^2+1)k''^2 + \varepsilon^4(n''^4-4n''^2) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 NRI_{n',j',j''} &= (NN(i, i'-2, n'') \quad NN(i, i', n'')) \begin{pmatrix} RCSS(i, i'-2, i''-2) + RCSS(i, i'-2, i'') \\ RCSS(i, i', i''-2) + RCSS(i, i', i'') \end{pmatrix} \\
 NRI_{n',j',j''} &= (NN(j, j'-2, n'') \quad NN(j, j', n'')) \begin{pmatrix} RSCS(j, j'-2, j''-2) + RSCS(j, j'-2, j'') \\ RSCS(j, j', j''-2) + RSCS(j, j', j'') \end{pmatrix} \\
 NRI_{n',j',j''} &= (NN(i, j'-2, n'') \quad NN(i, j', n'')) \begin{pmatrix} RCCC(i, j'-2, j''-2) + RCCC(i, j'-2, j'') \\ RCCC(i, j', j''-2) + RCCC(i, j', j'') \end{pmatrix} \\
 NRI_{n',j',j''} &= (NN(j, i'-2, n'') \quad NN(j, i', n'')) \begin{pmatrix} RSSC(j, i'-2, j''-2) + RSSC(j, i'-2, j'') \\ RSSC(j, i', j''-2) + RSSC(j, i', j'') \end{pmatrix} \\
 \text{where } NN(k, k', k'') &\equiv k[k^2 - k^2 - \varepsilon^2(1 - k^2)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 NQ_{m',j',j''} &= NQ_{n',j',j''}(RSCS), \quad NQ_{m',j',j''} = NQ_{n',j',j''}(RCSS) \\
 NQ_{m',j',j''} &= NQ_{n',j',j''}(RSSC), \quad NQ_{m',j',j''} = NQ_{n',j',j''}(RCCC), \\
 \text{where}
 \end{aligned}$$

$$NQ_{n',k',k''}(RT) \equiv \begin{pmatrix} QQ(k-2, k'-2, n, n'') \\ QQ(k-2, k', n, n'') \\ QQ(k, k'-2, n, n'') \\ QQ(k, k', n, n'') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} RT_{k-2,k'-2,k''} + RT_{k-2,k',k''} \\ RT_{k-2,k',k''} + RT_{k-2,k',k''} \\ RT_{k,k'-2,k''} + RT_{k,k'-2,k''} \\ RT_{k,k',k''} + RT_{k,k',k''} \end{pmatrix}$$

$$\text{and } QQ(k, k', n, n'') \equiv k[k^2 - k^2 - \varepsilon^2(n^2 - n^2 + 1)]$$

参考文献

- Lorenz, E. N. 1963: Deterministic Nonperiodic Flow. Journal of Atmospheric Science, Vol.20, pp130-141.
- Suda, F. and K. Mimura 1989: Temperature and velocity distribution in a circular natural convection loop, 24<sup>th</sup> National Heat Transfer Symposium, Japan, Vol.3 pp752-754 (in Japanese)
- Sano, O. 1991: Cellular structure in a natural convection loop and its chaotic behaviour. I. Experiment, Fluid Dynamic Research, Vol.8 pp189-204
- Sano, O. 1991: Cellular structure in a natural convection loop and its chaotic behaviour. II. Theory, Fluid Dynamic Research, Vol.8 pp205-220
- Yorke, J. A. and E. D. Yorke 1981: Chaotic behavior and fluid dynamics, in: Hydrodynamic Stability and the Transition to Turbulence (Springer, Berlin) ch.4
- 三村和男、2006:無限自由度を持つ現実流体中の低次元カオス、九州大学応用力学研究所研究集会報告 17ME-S 4、pp134-139
- 横嶋悟、晝間 喜雄、三村和男、2008:閉ループ内熱対流数値実験～2つの計算モデル～、九州大学応用力学研究所研究集会報告 19ME-S6、pp98-101
- 三村和男、2008:無限自由度を持つ現実流体中の低次元カオス～スペクトルモデルによる考察～、九州大学応用力学研究所研究集会報告 19ME-S6、pp108-113